

Συνέχεια Συναρτήσεων

Γενικός Ορισμός

Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$.

Η f είναι **συνεχής στο x_0** αν

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ ώστε αν } x \in A \text{ και } |x - x_0| < \delta \text{ τότε } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Ισοδύναμα:

- $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ ώστε αν $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ τότε $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ ώστε $f(A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$

Η f είναι **συνεχής** αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της

Σημεία συσσώρευσης και μεμονωμένα σημεία

Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$.

- Το $x \in \mathbb{R}$ είναι **σημείο συσσώρευσης** (σ.σ.) του A αν

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ ισχύει } ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

Ένα στοιχείο του $x \in \mathbb{R}$ είναι σ.σ. A αν υπάρχουν στοιχεία του A όσοδήποτε κοντά στο x και διαφορετικά του x

Ένα σ.σ. του A μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο A .

Π.χ. αν $A = (0,1)$ όλα τα στοιχεία του A είναι σ.σ. του αλλά και το 0 και το 1 που δεν ανήκουν στο A είναι σημεία σ.σ. του.

Αν το A είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων σ.σ. του είναι όλα τα στοιχεία του αντίστοιχου κλειστού διαστήματος ή των αντίστοιχων κλειστών διαστημάτων

- Ένα στοιχείο $x \in A$ είναι **μεμονωμένο σημείο** (μ.σ.) του A αν

$$\exists \delta > 0 \text{ ώστε } (x - \delta, x + \delta) \cap A = \{x\}$$

Ένα στοιχείο του A είναι μ.σ. αν μπορεί να απομονωθεί από τα υπόλοιπα σημεία του A

Π.χ. αν $A = (0,1) \cup \{2\}$ το 2 είναι μ.σ. του A

Σύνδεση γενικού και σχολικού ορισμού συνέχειας

• Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$

Περίπτωση 1. x_0 σ.σ. του A

Επειδή $x_0 \in A$ ισχύει

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ ώστε αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

αν και μόνο αν

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ ώστε αν $x \in A$ και $0 < |x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Άρα η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

- Περίπτωση 2. x_0 μ.σ. του A

Τότε $\exists \delta > 0$ ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A = \{x_0\}$

Αν για $\varepsilon > 0$ επιλέξουμε το παραπάνω δ τότε
αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$ προκύπτει $x = x_0$.

Άρα, αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$ τότε

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο x_0 .

Συνέχεια και Συνεκτικότητα

Απόσταση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών

Για κάθε δύο πραγματικούς αριθμούς x, y η απόσταση τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με $|x - y|$.

Από τον ορισμό και τις ιδιότητες της απολύτου τιμής προκύπτουν άμεσα οι επόμενες τέσσερις θεμελιώδεις ιδιότητες της απόστασης:

- i) $|x - y| \geq 0$, δηλαδή η απόσταση δύο αριθμών είναι μη αρνητική
- ii) $|x - y| = 0$ αν και μόνον αν $x = y$, δηλαδή η απόσταση δύο αριθμών είναι μηδέν αν και μόνον αν οι δύο αριθμοί συμπίπτουν,
- iii) $|x - y| = |y - x|$, δηλαδή η απόσταση δύο αριθμών είναι συμμετρική, και
- iv) $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$, δηλαδή η απόσταση δύο αριθμών είναι μικρότερη ή ίση του αθροίσματος των αποστάσεων κάθε ενός από αυτούς από ένα τρίτο αριθμό (τριγωνική ιδιότητα).

Συνάρτηση που ορίζει η απόσταση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών

Η απόσταση στο $\mathbb{R}$ ορίζει την συνάρτηση

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με } d(x, y) = |x - y|$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση d έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

$$i) d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

$$ii) d(x, y) = 0 \iff x = y,$$

$$iii) d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

$$iv) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, z, y \in \mathbb{R}.$$

Μετρικοί χώροι

Ορισμός. Έστω σύνολο $X \neq \emptyset$. Μία συνάρτηση $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζει μια απόσταση στο X αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- i) $d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in X$,
- ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- iii) $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in X$,
- iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \ \forall x, z, y \in X$.

- Η συνάρτηση d με τις παραπάνω ιδιότητες καλείται **μετρική** στο X
- Το σύνολο X με την μετρική d καλείται **μετρικός χώρος**
- Για $x, y \in X$ ο μη αρνητικός αριθμός $d(x, y)$ καλείται **απόσταση** των x, y που ορίζεται από την μετρική d του X .

Αν (X, d) μετρικός χώρος και $\emptyset \neq A \subseteq X$ τότε ο περιορισμός της μετρικής d στο $A \times A$, δηλαδή η $d|_{A \times A}$, ορίζει μια μετρική στο A .

Παραδείγματα μετρικών χώρων

- Σε κάθε μη κενό σύνολο X εύκολα διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με $d(x, y) = 1$ για $x \neq y$ και $d(x, y) = 0$ για $x = y$ είναι μια μετρική στο X .
- Η συνάρτηση $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $d(x, y) = |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι μια μετρική στο $\mathbb{R}$
- Η συνάρτηση $d_2: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, με $d_2(x, y) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}$ για κάθε $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ είναι μια μετρική στο $\mathbb{R}^2$.
Η μετρική αυτή λέγεται ευκλείδεια μετρική.
- Οι συναρτήσεις
 $d_1: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, με $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ και
 $d_\infty: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$
για κάθε $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, είναι μετρικές στο $\mathbb{R}^2$.

Ανοικτή μπάλα σε έναν μετρικό χώρο

Ορισμός. Έστω (X, d) μ.χ. Για κάθε $x \in X$ και $\varepsilon > 0$, ορίζουμε ως ανοικτή μπάλα στο X με κέντρο x και ακτίνα ε το σύνολο $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$.

- Στο $\mathbb{R}$ με την μετρική που ορίζει η απόλυτη τιμή ισχύει $B(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Επειδή $(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{|\alpha-\beta|}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{|\alpha-\beta|}{2} \right)$, κάθε ανοικτό διάστημα (α, β) με α, β πραγματικούς αριθμούς είναι ανοικτή μπάλα στο $\mathbb{R}$ με κέντρο $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ και ακτίνα $\varepsilon = \frac{|\alpha-\beta|}{2}$

- Στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}^2, d_2)$ η ανοικτή μπάλα $B(x, \varepsilon)$ είναι τα εσωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο x και ακτίνα ε

Ανοικτά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου

Ορισμός. Έστω (X, d) μ.χ. και $A \subseteq X$.

- i) Ένα σημείο $x \in A$ ονομάζεται **εσωτερικό σημείο** του A αν υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε $B(x, \delta_x) \subseteq A$.
- ii) Το A ονομάζεται **ανοικτό υποσύνολο** του X αν κάθε σημείο του είναι εσωτερικό, δηλαδή για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε $B(x, \delta_x) \subseteq A$.

Αποδεικνύεται ότι οι ανοικτές μπάλες κάθε μετρικού χώρου είναι ανοικτά σύνολα.

Πρόταση. Έστω (X, d) μ.χ. Ένα σύνολο $A \subseteq X$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X αν και μόνον αν είναι ένωση ανοικτών μπαλών.

Πρόταση. Αν A μη κενό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d) τότε το $V \subseteq A$ είναι ανοικτό υποσύνολο του μετρικού χώρου (A, d_A) αν και μόνον αν υπάρχει G ανοικτό υποσύνολο του μετρικού χώρου (X, d) ώστε $V = G \cap A$.

Συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων

- **Ορισμός.** Έστω $(X, d_1), (Y, d_2)$ δύο μετρικοί χώροι, $f: X \rightarrow Y$ και $x_0 \in X$.

Η f είναι συνεχής στο x_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ αν $d_1(x, x_0) < \delta$ τότε $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

- Ισοδύναμες εκφράσεις του παραπάνω ορισμού είναι:

i) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in B(x_0, \delta)$ τότε $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$

ii) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$

iii) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$

- **Ορισμός.** Μια συνάρτηση μεταξύ δύο μετρικών χώρων είναι συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

- **Πρόταση.** Έστω $(X, d_1), (Y, d_2)$ δύο μετρικοί χώροι και $f: X \rightarrow Y$.

Η f είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό $A \subseteq Y$ το $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X .

Συνεκτικά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου

- **Ορισμός.** Έστω A μη κενό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X .

Το A είναι συνεκτικό υποσύνολο του X αν δεν υπάρχουν G_1, G_2 ανοικτά υποσύνολα του X ώστε, αν θέσουμε $V_1 = G_1 \cap A$ και $V_2 = G_2 \cap A$, να ισχύει

$$V_1 \neq \emptyset, V_2 \neq \emptyset, V_1 \cap V_2 = \emptyset \text{ και } V_1 \cup V_2 = A$$

(ισοδύναμα: $G_1 \cap A \neq \emptyset, G_2 \cap A \neq \emptyset, G_1 \cap G_2 \cap A = \emptyset, A \subseteq G_1 \cup G_2$)

- Ένα μη κενό σύνολο A υποσύνολο ενός μετρικού χώρου, είναι συνεκτικό αν δεν μπορεί να «διασπαστεί» σε δύο «καλά» υποσύνολα του, όπου ως «καλά» υποσύνολα του εννοούμε τα ανοικτά υποσύνολα του (A, d_A) .
- Τα μόνα συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι τα διαστήματα, δηλαδή τα σύνολα με την ιδιότητα για κάθε δύο στοιχεία τους όλα τα ενδιάμεσα είναι στοιχεία του συνόλου.

Ιδιότητες συνεκτικών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου

- **Πρόταση.** Έστω X μ.χ. και A, B δύο συνεκτικά υποσύνολα του X . Αν $A \cap B \neq \emptyset$ τότε το σύνολο $A \cup B$ είναι συνεκτικό.
- **Ορισμός.** Αν X μ.χ., $A \subseteq X$ και $x \in X$ το x λέγεται σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $[(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A] \setminus \{x\} \neq \emptyset$.
Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A συμβολίζεται με A'
- **Πρόταση.** Έστω X μ.χ. και A, B δύο υποσύνολα του X ώστε $A \subseteq B \subseteq A \cup A'$. Αν το A είναι συνεκτικό υποσύνολο του X τότε και το B είναι συνεκτικό υποσύνολο του X .
- **Πρόταση.** Έστω $(X, d_1), (Y, d_2)$ δύο μετρικοί χώροι και $f: X \rightarrow Y$. Αν A είναι συνεκτικό υποσύνολο του X τότε το $f(A)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του Y .

Γράφημα πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής

Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ και συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Γράφημα της f είναι το σύνολο $G_f = \{(x, f(x)): x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Ερώτηση: Πότε το γράφημα της f είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$;

Δηλαδή, πότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν κόβεται;

- **Πρόταση.** Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ και συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν το A δεν είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε και το γράφημα της συνάρτησης G_f δεν είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.
- **Πρόταση.** Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ και συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής και το A είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το γράφημα της συνάρτησης G_f είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Ερώτηση

Αν μια συνάρτηση είναι ορισμένη σε ένα διάστημα και το γράφημα της είναι συνεκτικό τότε η συνάρτηση είναι συνεχής;

Η απάντηση σε αυτή την ερώτηση είναι αρνητική.

Αντιπαράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu \frac{1}{x}$ για $x \neq 0$ και $f(0) = 0$.

$G_1 = \{(x, f(x)): x < 0\}$ και $G_2 = \{(x, f(x)): x > 0\}$. Προφανώς ισχύει $G_f = G_1 \cup \{(0,0)\} \cup G_2$.

Τα σύνολα G_1, G_2 είναι συνεκτικά ως γραφήματα των συνεχών συναρτήσεων $f|_{(-\infty,0)}$ και $f|_{(0,+\infty)}$ αντίστοιχα.

Το σημείο $(0,0)$ είναι όριο ακολουθίας στοιχείων του G_1 , επειδή

$\left(-\frac{1}{2\pi n}, f\left(-\frac{1}{2\pi n}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2\pi n}, 0\right) \rightarrow (0,0)$, καθώς και ακολουθίας στοιχείων του G_2 ,

επειδή $\left(\frac{1}{2\pi n}, f\left(\frac{1}{2\pi n}\right)\right) = \left(\frac{1}{2\pi n}, 0\right) \rightarrow (0,0)$.

Άρα το σημείο $(0,0)$ είναι σημείο συσσώρευσης των συνεκτικών συνόλων G_1 και G_2 .

Επομένως τα σύνολα $G_1 \cup \{(0,0)\}$ και $G_2 \cup \{(0,0)\}$ είναι συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και επειδή έχουν μη κενή τομή, η

ένωση τους, δηλαδή το γράφημα G_f , είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Άρα, η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu \frac{1}{x}$ για $x \neq 0$ και $f(0) = 0$, έχει πεδίο ορισμού διάστημα και συνεκτικό γράφημα, δηλαδή η γραφική της παράσταση δεν διασπάται, αλλά δεν είναι συνεχής.

Ερώτηση

- Ποιες συνθήκες απαιτούνται ώστε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού διάστημα και συνεκτικό γράφημα να είναι συνεχής;
- **Πρόταση.** Έστω συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα. Αν το γράφημα G_f της f είναι συνεκτικό η f είναι συνεχής αν και μόνο αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια της f σε κάθε σημείο του A .