Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (2020–21)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 1

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 21 Μαρτίου 2021)

1. (α) Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ απεικονίζει F_σ σύνολα σε F_σ σύνολα.
(β) Αποδείξτε ότι κάθε Lipschitz συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ απεικονίζει σύνολα μέτρου 0 σε σύνολα μέτρου 0.
(γ) Αποδείξτε ότι κάθε Lipschitz συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα.

2. Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E\subseteq\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda^*(A\triangle E)<\varepsilon$.

3. (α) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A)<\infty$. Αποδείξτε ότι για κάθε $B\subseteq\mathbb{R}$ με $A\subseteq B$ ισχύει

$$\lambda^*(B\setminus A)=\lambda^*(B)-\lambda(A).$$

(β) Έστω $A,B\subseteq\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda^*(A\cup B)=\lambda^*(A)+\lambda^*(B)<\infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα E,F τέτοια ώστε $A\subseteq E$, $B\subseteq F$ και $\lambda(E\cap F)=0$.

4. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής.

(α) Αν $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του $[0,1]$ τότε

$$\lim_{n\to\infty}\lambda^*(A_n)=\lambda^*\Big(\bigcap_{n=1}^\infty A_n\Big).$$

(β) Υπάρχουν υπεραριθμήσιμα το πλήθος ξένα ανά δύο Lebesgue μετρήσιμα σύνολα $A_i\subset\mathbb{R}$, $i\in I$, με $\lambda(A_i)>0$ για κάθε $i\in I$.

5. Έστω (E_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

(i) Αν $\lambda(E_n)<\frac{1}{2^n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $\chi_{E_n}(x)\to 0$ σχεδόν παντού.

(ii) Αν $\lambda(E_n)\to 0$ είναι πάντα σωστό ότι $\chi_{E_n}(x)\to 0$ σχεδόν παντού;

6. Έστω $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\sum\limits_{k=1}^\infty a_k<\infty$. Θεωρούμε το σύνολο A των $x\in(0,1)$ για τα οποία η ανισότητα $\left|x-\frac{m}{n}\right|<\frac{a_n}{n}$ έχει άπειρες λύσεις $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $\lambda(A)=0$.

7. Έστω $E\subseteq\mathbb{R}^d$. Για κάθε $n\geqslant 1$ ορίζουμε $U_n=\left\{x\in\mathbb{R}^d:\mathrm{dist}(x,E)<\frac{1}{n}\right\}$.

(α) Αποδείξτε ότι αν το E είναι συμπαγές τότε $\lambda(U_n)\to\lambda(E)$.

(β) Δώστε παραδείγματα που να δείχνουν ότι το συμπέρασμα του (α) δεν ισχύει αν το E είναι κλειστό και μη φραγμένο ή αν το E είναι ανοικτό και φραγμένο.

8. Έστω E μη μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta>0$ τέτοιος ώστε: αν B,C είναι μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και $E\subseteq B$ και $\mathbb{R}\setminus E\subseteq C$ τότε $\lambda(B\cap C)\geqslant\delta$.

9. Στο $[0,1]$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim y$ αν και μόνο αν $x - y \in \mathbb{Q}$ και στη συνέχεια ορίζουμε $N \subset [0,1]$ που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας. Ορίζουμε επίσης $T = [0,1] \setminus N$. Αποδείξτε ότι $\lambda^*(T) = 1$ και συμπεράνατε ότι

$$\lambda^*(N) + \lambda^*(T) > \lambda^*(N \cup T).$$

10. Θεωρούμε το σύνολο $A := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{k!} \mid \delta_k = 0 \text{ ή } 1 \right\}$. Αποδείξτε ότι το A είναι κλειστό σύνολο με κενό εσωτερικό και μέτρο $\lambda(A) = 0$.

Εξετάστε αν υπάρχει φυσικός αριθμός s τέτοιος ώστε το σύνολο

$$s \cdot A := A + A + \cdots + A = \{y_1 + \cdots + y_s \mid y_i \in A\}$$

να έχει θετικό μέτρο.