Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (2020–21)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 3

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 9 Μαΐου 2021)

1. (α) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μη μηδενική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $c>0$ ώστε

$$f^*(x)\geqslant \frac{c}{|x|}\quad \text{για κάθε } |x|\geqslant 1,$$

και συμπεράνατε ότι η f^* δεν είναι ολοκληρώσιμη.
(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\frac{1}{|x|(\ln 1/|x|)^2}\quad \text{αν } |x|\leqslant 1/2$$

και $f(x)=0$ αλλιώς. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Δείξτε επίσης ότι υπάρχει $c>0$ ώστε

$$f^*(x)\geqslant \frac{c}{|x|(\ln 1/|x|)}\quad \text{για κάθε } |x|\leqslant 1/2,$$

και συμπεράνατε ότι η f^* δεν είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.

2. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E)>0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$g(x)=\mathrm{dist}(x,E)=\inf\{|x-t|:t\in E\}.$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to y}\frac{g(x)}{|x-y|}=0$$

σχεδόν για κάθε $y\in E$.

3. Έστω $p>1$ και $f_n\in L^p[0,1]$ τέτοιες ώστε $\|f_n\|_p\leqslant 1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε: αν $E\subseteq[0,1]$ μετρήσιμο και $\lambda(E)<\delta$ τότε $\int_E|f_n|d\lambda<\varepsilon$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.
Ισχύει το ίδιο όταν $p=1$;

4. Έστω $f:[0,1]\to[0,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) Υπάρχει σταθερά $c_1>0$ τέτοια ώστε $\|f\|_p\leqslant c_1p$ για κάθε $p\geqslant 1$.

(β) Υπάρχει σταθερά $c_2>0$ τέτοια ώστε $\|e^{c_2f}\|_1<\infty$.

5. Έστω $f:[0,1]\to[0,+\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση με $0<\|f\|_\infty<+\infty$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^{n+1}d\lambda}{\int_0^1 f^n d\lambda}=\|f\|_\infty.$$

6. Έστω $1\leqslant p\leqslant\infty$ και $f\in L^p[0,\infty)$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^\infty f(x)e^{-nx}\,dx\longrightarrow 0$$

όταν $n\to\infty$. [*Υπόδειξη:* Εξετάστε τις περιπτώσεις $p=1$ και $1<p<\infty$ χωριστά.]

7. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες, τέτοιες ώστε $f_n \to 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$ και

$$\int_0^1 |f_n|^2 \, d\lambda \leqslant 1$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 |f_n| \, d\lambda \to 0.$$

8. Έστω $B_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leqslant 1\}$ η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^n$ (δηλ. $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, όπου $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$). Χρησιμοποιώντας την $e^{-s} = \int_s^\infty e^{-t} dt$, $s > 0$, αποδείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_2^2} d\lambda(x) = \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \lambda(B_2^n).$$

Στη συνέχεια αποδείξτε ότι

$$\lambda(B_2^n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

9. Έστω $1 < p < \infty$ και $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ μη αρνητικές συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την

$$\lambda(\{g > \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int_{\{g > \alpha\}} f \, d\lambda$$

για κάθε $\alpha > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\|g\|_p \leqslant q \, \|f\|_p,$$

όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p.

10. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο, με $\lambda(A) > 0$.

(α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(tx) \chi_A(x) \, d\lambda(x)$$

είναι συνεχής στο $t = 1$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε: αν $|t - 1| < \varepsilon$ τότε η ευθεία $y = tx$ τέμνει το $A \times A$ στο $\mathbb{R}^2$.