605. Ασκήσεις – Κεφάλαιο 1

Μέτρο Lebesgue

6 Μαρτίου 2021

Άσκηση 1

(α) Έστω A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) < +\infty$.

Αφού το A είναι φραγμένο, υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $A \subseteq (-\alpha, \alpha)^d$. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου,

$$\lambda^*(A) \leqslant v((-\alpha, \alpha)^d) = (2\alpha)^d < +\infty.$$

Άσκηση 1

(β) Έστω ότι το $A \subseteq \mathbb{R}^d$ έχει τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) > 0$.

Έστω x_0 εσωτερικό σημείο του A. Υπάρχει μη κενό ανοικτό διάστημα $I \subset A$ ώστε $x_0 \in I$. Από τη μονοτονία του εξωτερικού μέτρου,

$$\lambda^*(A) \geqslant \lambda^*(I) = v(I) > 0.$$

Άσκηση 2

(α) Αν το A είναι μετρήσιμο και $\lambda(A \triangle B) = 0$, τότε το B είναι μετρήσιμο και $\lambda(B) = \lambda(A)$ (με $A \triangle B$ συμβολίζουμε τη συμμετρική διαφορά $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ των A και B).

(β) Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, τότε

$$\lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

(α) Από την $\lambda(A \triangle B) = 0$ έχουμε ότι τα $A \setminus B$, $B \setminus A$ είναι μετρήσιμα και $\lambda(A \setminus B) = 0$ και $\lambda(B \setminus A) = 0$. Γράφοντας

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) = [A \setminus (A \setminus B)] \cup (B \setminus A),$$

συμπεραίνουμε ότι το B είναι μετρήσιμο, και

$$\lambda(B) = [\lambda(A) - \lambda(A \setminus B)] + \lambda(B \setminus A) = \lambda(A).$$

(β) Γράφουμε

$$\lambda(A) + \lambda(B) = \lambda(A \cap B) + \lambda(A \setminus B) + \lambda(B) = \lambda(A \cap B) + \lambda(A \cup B),$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα $A \setminus B$, B είναι ξένα και $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$.

Άσκηση 2

(γ) Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, $A \subseteq B$ και $\lambda(A) = \lambda(B) < +\infty$, τότε $\lambda(B \setminus A) = 0$.

(δ) Δώστε παράδειγμα μετρήσιμων συνόλων A, B με $A \subseteq B$ και $\lambda(A) = \lambda(B)$, αλλά $\lambda(B \setminus A) > 0$.

(γ) Από την $B = A \cup (B \setminus A)$ παίρνουμε $\lambda(B) = \lambda(A) + \lambda(B \setminus A)$, διότι τα A και $B \setminus A$ είναι ξένα. Αφού $\lambda(A) = \lambda(B) < +\infty$, διαγράφοντάς τα, από την προηγούμενη ισότητα παίρνουμε $\lambda(B \setminus A) = 0$.

(δ) Αν $A = [1, +\infty)$ και $B = [0, +\infty)$, τότε $A \subseteq B$, $\lambda(A) = \lambda(B) = +\infty$ και $B \setminus A = [0, 1)$, δηλαδή $\lambda(B \setminus A) = 1 > 0$.

Άσκηση 3

(α) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(B) = 0$, δείξτε ότι $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A)$.

(β) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(A \triangle B) = 0$, δείξτε ότι $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$.

(α) Αφού $A \subseteq A \cup B$, έχουμε $\lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(A \cup B)$. Από την υπόθεση και από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου προκύπτει η αντίστροφη ανισότητα:

$$\lambda^*(A \cup B) \leqslant \lambda^*(A) + \lambda^*(B) = \lambda^*(A),$$

διότι $\lambda^*(B) = 0$.

(β) Παρατηρήστε ότι $\lambda^*(A \setminus B) \leqslant \lambda^*(A \triangle B) = 0$. Συνεπώς, $\lambda^*(A \setminus B) = 0$. Όμοια, $\lambda^*(B \setminus A) = 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \lambda^*(A) &\leqslant \lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(B \cup (A \setminus B)) \\ &\leqslant \lambda^*(B) + \lambda^*(A \setminus B) = \lambda^*(B). \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $\lambda^*(B) \leqslant \lambda^*(A)$.

Άσκηση 4

(α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t > 0$. Συμβολίζουμε με tA το σύνολο $tA = \{tx : x \in A\}$. Δείξτε ότι $\lambda^*(tA) = t\, \lambda^*(A)$.

(α) Έστω $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα. Τότε η $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $J_n = tI_n$, είναι κάλυψη του tA και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) = t \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n),$$

διότι $\ell(tI) = t\ell(I)$ για κάθε διάστημα. Έπεται ότι

$$\lambda^*(tA) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : tA \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \right\} \leqslant t \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n).$$

Παίρνοντας infimum ως προς όλες τις καλύψεις $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ έχουμε την $\lambda^*(tA) \leqslant t\lambda^*(A)$.
Η αντίστροφη ανισότητα αποδεικνύεται όμοια.

Άσκηση 4

(β) Έστω $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|$ για κάθε $x, y \in B$. Δείξτε ότι

$$\lambda^*(f(A)) \leqslant C\lambda^*(A)$$

για κάθε $A \subseteq B$.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$ και $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \cap I_n \neq \varnothing$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $x, y \in A \cap I_n$, τότε

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y| \leqslant C\,\ell(I_n).$$

Συνεπώς, $\mathrm{diam}(f(A \cap I_n)) \leqslant C\,\ell(I_n)$. Έπεται ότι το σύνολο $f(A \cap I_n)$ περιέχεται σε διάστημα J_n μήκους $\ell(J_n) \leqslant C\,\ell(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Η $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι κάλυψη του $f(A)$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \varepsilon.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\lambda^*(f(A)) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : f(A) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right\} \leqslant \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} C\,\ell(I_n) + \varepsilon : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \\
&= C\,\lambda^*(A) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Άσκηση 4

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $A' = \{x^2 \mid x \in A\}$ έχει επίσης μέτρο $\lambda(A') = 0$.

(γ) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = A \cap [-n, n]$. Παρατηρήστε ότι $\lambda(A_n) = 0$ και ότι η $f(x) = x^2$ είναι $2n$-Lipschitz στο A_n. Από το (β) συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda^*(f(A_n)) \leqslant 2n\lambda(A_n) = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\lambda^*(f(A)) = \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_n)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(f(A_n)) = 0,$$

δηλαδή, $\lambda(f(A)) = 0$.

Άσκηση 5

(α) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $0 < \lambda^*(E) < +\infty$ και έστω $0 < \alpha < 1$. Δείξτε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα I με την ιδιότητα $\lambda^*(E \cap I) > \alpha\, \ell(I)$.

(α) Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{I_n\}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1+\varepsilon)\lambda^*(A)$$

(εδώ χρησιμοποιείται η υπόθεση ότι $0 < \lambda^*(E) < +\infty$). Από την υποπροσθετικότητα του λ^* παίρνουμε

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap I_n).$$

Έπεται ότι, για κάποιον $m \in \mathbb{N}$,

$$\lambda^*(A \cap I_m) \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon}\, \ell(I_m).$$

Παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{\alpha} - 1 > 0$ έχουμε το ζητούμενο.
Σημείωση. Το συμπέρασμα ισχύει και στην περίπτωση που $\lambda^*(E) = \infty$. Παρατηρήστε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε το $E_M := E \cap [-M, M]$ να ικανοποιεί την $0 < \lambda^*(E_M) < \infty$. Τότε μπορούμε να βρούμε ανοικτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\lambda^*(E \cap I) \geqslant \lambda^*(E_M \cap I) > \alpha\, \ell(I).$$

Άσκηση 5

(β) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $\delta > 0$ ώστε $\lambda(A \cap I) \geqslant \delta\, \ell(I)$ για κάθε ανοικτό διάστημα. Δείξτε ότι $\lambda(A^c) = 0$.

(β) Αφού $\lambda(A \cap I) \leqslant \ell(I)$ για κάθε ανοικτό διάστημα I, συμπεραίνουμε ότι $0 < \delta \leqslant 1$. Αν πάλι $\delta = 1$, έχουμε $\lambda(A \cap (-n, n)) = 2n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\lambda(A^c \cap (-n, n)) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\lambda(A^c) = 0$.
Υποθέτουμε λοιπόν ότι $0 < \delta < 1$. Έστω ότι $\lambda(A^c) > 0$. Από το (α) υπάρχει ανοικτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\lambda(A^c \cap I) > (1 - \delta)\, \ell(I).$$

Τότε,

$$\lambda(A \cap I) = \lambda(I) - \lambda(A^c \cap I) < \ell(I) - (1 - \delta)\, \ell(I) = \delta\, \ell(I),$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

Άσκηση 37

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το σύνολο $\Gamma = \{(x, f(x)) : a \leqslant x \leqslant b\}$ έχει μέτρο μηδέν.

Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in [a, b]$ και $|x - y| \leqslant \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$. Μπορούμε λοιπόν να χωρίσουμε το $[a, b]$ σε k διαδοχικά διαστήματα $I_1, \ldots, I_k$ μήκους μικρότερου ή ίσου από δ. Τότε, για κάθε $j = 1, \ldots, k$ έχουμε ότι το $f(I_j)$ περιέχεται σε ένα διάστημα T_j μήκους $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Παρατηρούμε ότι

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{k} \{(x, f(x)) : x \in I_j\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_j \times f(I_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_j \times T_j.$$

Συνεπώς,

$$\lambda(\Gamma) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \times T_j) = \sum_{j=1}^{k} \ell(I_j)\ell(T_j) \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^{k} \ell(I_j) = \varepsilon,$$

διότι

$$\sum_{j=1}^{k} \ell(I_j) = \ell([a, b]) = b - a.$$

Άσκηση 6

Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\} > 0.$$

Δείξτε ότι

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

Η ανισότητα $\lambda^*(A \cup B) \leqslant \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$ ισχύει πάντα.
Για την $\lambda^*(A \cup B) \geqslant \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda^*(A \cup B) < \infty$.
Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια κάλυψη του $A \cup B$ από ανοικτά διαστήματα. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος ανοικτά διαστήματα $J_{n,1}, \ldots, J_{n,k_n}$ με μήκος μικρότερο από $\delta/2$, όπου $\delta = \mathrm{dist}(A, B)$, ώστε $I_n \subseteq J_{n,1} \cup \cdots \cup J_{n,k_n}$ και $\sum_{s=1}^{k_n} \ell(J_{n,s}) < \ell(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. (Αν $I_n = (a_n, b_n)$, θεωρήστε το κλειστό διάστημα $\left[a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, b_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right]$ και χωρίστε το σε k_n διαδοχικά διαστήματα μήκους μικρότερου από $\delta/2$, στη συνέχεια καλύψτε καθένα από αυτά με ανοικτό διάστημα μήκους πάλι μικρότερου από δ). Τότε, η $\{J_{n,s} : n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant s \leqslant k_n\}$ είναι κάλυψη του $A \cup B$ από ανοικτά διαστήματα μήκους μικρότερου από $\delta/2$, και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{k_n} \ell(J_{n,s}) < \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \varepsilon.$$

Αν $\{U_s\}_{s=1}^{\infty}$ είναι η οικογένεια των $J_{n,s}$ για τα οποία $A \cap J_{n,s} \neq \varnothing$ και $\{V_s\}_{s=1}^{\infty}$ είναι η οικογένεια των $J_{n,s}$ για τα οποία $B \cap J_{n,s} \neq \varnothing$, τότε $A \subseteq \bigcup_{s=1}^{\infty} U_s$, $B \subseteq \bigcup_{s=1}^{\infty} V_s$ και $U_s \cap V_m = \varnothing$ για κάθε s, m: Παρατηρήστε ότι αν $y \in U_s \cap V_m$ τότε υπάρχουν $a \in A \cap U_s$ και $b \in B \cap V_m$ ώστε $|y - a| < \ell(U_s) < \delta/2$ και $|y - b| < \ell(V_m) < \delta/2$, οπότε $\mathrm{dist}(A, B) \leqslant |a - b| \leqslant |a - y| + |y - b| < \delta$, το οποίο είναι άτοπο. Με άλλα λόγια, καθένα από τα ανοικτά διαστήματα $J_{n,s}$ ανήκει σε μία το πολύ από τις $\{U_s\}_{s=1}^{\infty}$ και $\{V_s\}_{s=1}^{\infty}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\lambda^*(A) + \lambda^*(B) &\leqslant \sum_{s=1}^{\infty} \ell(U_s) + \sum_{s=1}^{\infty} \ell(V_s) \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{k_n} \ell(J_{n,s}) \\
&< \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Παίρνοντας infimum ως προς όλες τις καλύψεις $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ του $A \cup B$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda^*(A) + \lambda^*(B) \leqslant \lambda^*(A \cup B) + \varepsilon,$$

και, αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε ότι $\lambda^*(A) + \lambda^*(B) \leqslant \lambda^*(A \cup B)$.

Άσκηση 8

Έστω E ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε το *εσωτερικό μέτρο Lebesgue* του E θέτοντας

$$\lambda_{(i)}(E) = \sup\{\lambda(F) : F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\}.$$

(α) Δείξτε ότι $\lambda_{(i)}(E) \leqslant \lambda^*(E)$.

(β) Υποθέτουμε ότι $\lambda^*(E) < \infty$. Δείξτε ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν $\lambda_{(i)}(E) = \lambda^*(E)$.

(α) Από τη μονοτονία του εξωτερικού μέτρου έχουμε $\lambda(F) \leqslant \lambda^*(E)$ για κάθε κλειστό $F \subseteq E$. Συνεπώς,

$$\lambda_{(i)}(E) = \sup\{\lambda(F) : F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\} \leqslant \lambda^*(E).$$

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο. Έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε ότι υπάρχει κλειστό $F \subseteq E$ ώστε $\lambda(E) < \lambda(F) + \varepsilon$. Από τον ορισμό του $\lambda_{(i)}(E)$ έπεται ότι $\lambda(E) < \lambda_{(i)}(E) + \varepsilon$. Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $\lambda^*(E) \leqslant \lambda_{(i)}(E)$. Από το (α) προκύπτει η ισότητα.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $\lambda^*(E) = \lambda_{(i)}(E) < \infty$. Μπορούμε τότε να βρούμε G_δ–σύνολο G και F_σ–σύνολο F ώστε $F \subseteq E \subseteq G$ και $\lambda(F) = \lambda^*(E) = \lambda(G) < \infty$. Τότε, $\lambda(G \setminus F) = \lambda(G) - \lambda(F) = 0$ και $E \setminus F \subseteq G \setminus F$, οπότε το $E \setminus F$ είναι Lebesgue μετρήσιμο (με $\lambda(E \setminus F) = 0$). Έπεται ότι το $E = F \cup (E \setminus F)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Άσκηση 8

(β) Υποθέτουμε ότι $\lambda^*(E) < \infty$. Δείξτε ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν $\lambda_{(i)}(E) = \lambda^*(E)$.

(γ) Δείξτε ότι αν $\lambda^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο (β) δεν είναι πάντα σωστή.

(γ) Αν $\lambda^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο (β) δεν είναι πάντα σωστή, με την εξής έννοια: υπάρχει μη μετρήσιμο σύνολο E με $\lambda_{(i)}(E) = \lambda^*(E) = \infty$. Παράδειγμα: θεωρήστε ένα μη μετρήσιμο $A \subset [0,1]$ και πάρτε σαν E το $A \cup [2, +\infty)$.

Άσκηση 11

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:

(i) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(A) = 0$, τότε το A είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο.

(ii) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και το A δεν είναι μετρήσιμο, τότε $\lambda^*(A) > 0$.

(iii) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda^*(A) < +\infty$, $B \subseteq A$, το B είναι μετρήσιμο και $\lambda(B) = \lambda^*(A)$, τότε το A είναι μετρήσιμο.

(i) Ψευδής: το σύνολο του Cantor έχει μηδενικό μέτρο αλλά είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

(ii) Αληθής: κάθε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) = 0$ είναι μετρήσιμο.

(iii) Αληθής: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ανοικτό σύνολο G_n ώστε $A \subseteq G_n$ και $\lambda(G_n) < \frac{1}{n} + \lambda^*(A)$. Ορίζουμε $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, οπότε $B \subseteq A \subseteq G$ και

$$\lambda(G \setminus B) = \lambda(G) - \lambda(B) < \frac{1}{n},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ που σημαίνει ότι το $N = G \setminus B$ είναι σύνολο μηδενικού μέτρου. Τότε, γράφοντας $A = B \cup (A \cap N)$ βλέπουμε ότι το A είναι μετρήσιμο.

Άσκηση 11

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:

(iv) Έστω $A \subseteq [a, b]$. Τότε, $\lambda^*(A) = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει κάλυψη του A από μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων (I_n) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ και κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα το πλήθος από τα διαστήματα I_n.

(v) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε $\lambda(A) = 0$ αν και μόνο αν όλα τα υποσύνολα του A είναι μετρήσιμα.

(iv) Αληθής: αν $\lambda^*(A) = 0$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα (J_n^{ε}) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n^{\varepsilon}) < \varepsilon$. Θέτουμε $I_{n,m} := J_n^{1/2^m}$. Τότε, η οικογένεια όλων των ανοικτών διαστημάτων $I_{n,m}$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.
Αντίστροφα, έστω (I_n) μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστημάτων με $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ και τέτοια ώστε κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα το πλήθος από τα διαστήματα I_n. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=n_0}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$. Αφού κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα (I_n), έπεται ότι $A \subseteq \bigcup_{n=n_0}^{\infty} I_n$. Τότε,

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε $\lambda^*(A) = 0$.

(v) Αληθής: αν $\lambda(A) = 0$, τότε προφανώς όλα τα υποσύνολά του είναι μετρήσιμα, και αν $\lambda(A) > 0$, τότε έχουμε δείξει ότι το A περιέχει μη μετρήσιμο σύνολο.

Άσκηση 12

(α) Έστω $A \subseteq [a, b]$ με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(α) Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε $A - A = \{x - y : x, y \in A\} \subseteq \mathbb{Q}$. Αφού $\lambda(A) > 0$ το A είναι μη κενό. Σταθεροποιούμε $x_0 \in A$ και από την

$$A - x_0 \subseteq A - A \subseteq \mathbb{Q}$$

συμπεραίνουμε ότι το $A - x_0$, άρα και το A, είναι αριθμήσιμο σύνολο. Τότε, $\lambda(A) = 0$, το οποίο είναι άτοπο: από την υπόθεση έχουμε $\lambda(A) > 0$.

Άσκηση 12

(γ) Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) > 1$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x \neq y$ στο E ώστε $x - y \in \mathbb{Z}$.

(γ) Ορίζουμε $E_m = E \cap [m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$. Κάθε E_m είναι Lebesgue μετρήσιμο, τα E_m είναι ξένα ανά δύο, και η ένωση τους είναι το E.
Θέτουμε $F_m = E_m - m = \{x - m : x \in E_m\}$. Παρατηρούμε ότι $F_m \subseteq [0,1)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $m \neq n$ στο $\mathbb{Z}$ ώστε $F_m \cap F_n \neq \varnothing$. Πράγματι, αν τα F_m ήταν ξένα ανά δύο, τότε θα είχαμε

$$1 = \lambda([0,1)) \geqslant \lambda\left(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} F_m\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda(F_m).$$

Όμως, $\lambda(F_m) = \lambda(E_m)$ για κάθε m. Συνεπώς,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda(F_m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda(E_m) = \lambda(E) > 1.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες καταλήγουμε σε άτοπο: $1 > 1$.
Υπάρχουν λοιπόν $m \neq n$ ώστε $(E_m - m) \cap (E_n - n) \neq \varnothing$. Δηλαδή, υπάρχουν $x \in E_m$ και $y \in E_n$ ώστε

$$x - m = y - n.$$

Με άλλα λόγια, υπάρχουν x, y στο E ώστε $x - y = m - n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Άσκηση 23

Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(E) < \infty$. Δείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $x \in \mathbb{R}, s > 0$ ώστε $x, x+s, x+2s, \ldots, x+(k-1)s \in E$.

Αφού $\lambda(E) > 0$, χρησιμοποιώντας την Άσκηση 5 βλέπουμε ότι υπάρχει διάστημα $[a, b]$ ώστε $\lambda(E \cap [a, b]) > \frac{k-1}{k}(b-a)$.
Θέτουμε $A = E \cap [a, b]$. Χωρίζουμε το $[a, b)$ σε k διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα μήκους $s := \frac{b-a}{k}$:

$$I_1 = [a, a+s), \quad I_2 = [a+s, a+2s), \quad \ldots \quad , \quad I_k = [a+(k-1)s, b),$$

και για κάθε $j = 1, \ldots, k$ ορίζουμε $A_j = A \cap I_j$. Κατόπιν, για κάθε $j = 1, \ldots, k$ θέτουμε $B_j = A_j - (j-1)s$. Παρατηρήστε ότι $B_j \subseteq I_1 = [a, a+s)$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$ και $B_1 = A_1$. Θα δείξουμε ότι

$$\bigcap_{j=1}^{k} B_j \neq \varnothing.$$

Τότε, αν πάρουμε κάποιο $x \in \bigcap_{j=1}^{k} B_j$ θα έχουμε ότι $x \in B_j = A_j - (j-1)s$ δηλαδή $x + (j-1)s \in A_j$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$. Αφού $A_j \subseteq A \subseteq E$ για κάθε j, έπεται ότι

$$x, x+s, x+2s, \ldots, x+(k-1)s \in E.$$

Ισχυρισμός

Αφού $\lambda(E) > 0$, υπάρχει διάστημα $[a, b]$ ώστε $\lambda(E \cap [a, b]) > \frac{k-1}{k}(b-a)$. Θέτουμε $A = E \cap [a, b]$. Χωρίζουμε το $[a, b)$ σε k διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα μήκους $s := \frac{b-a}{k}$: $I_1 = [a, a+s)$, $I_2 = [a+s, a+2s)$, $\ldots$, $I_k = [a+(k-1)s, b)$, και για κάθε $j = 1, \ldots, k$ ορίζουμε $A_j = A \cap I_j$. Κατόπιν, για κάθε $j = 1, \ldots, k$ θέτουμε $B_j = A_j - (j-1)s$. Παρατηρήστε ότι $B_j \subseteq I_1 = [a, a+s)$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$ και $B_1 = A_1$. Τότε, $\bigcap_{j=1}^k B_j \neq \varnothing$.

Για την απόδειξη γράφουμε

$$\begin{aligned}
\lambda\left(I_1 \setminus \bigcap_{j=1}^k B_j\right) &= \lambda\left(\bigcup_{j=1}^k (I_1 \setminus B_j)\right) \leqslant \sum_{j=1}^k \lambda(I_1 \setminus B_j) \\
&= \sum_{j=1}^k \lambda((I_1 + (j-1)s) \setminus (B_j + (j-1)s)) = \sum_{j=1}^k \lambda(I_j \setminus A_j) \\
&= \sum_{j=1}^k \lambda(I_j \setminus (A \cap I_j)) = \sum_{j=1}^k \lambda(I_j \cap A^c) = \lambda([a, b] \setminus A) \\
&< \frac{1}{k}(b-a) = \lambda(I_1).
\end{aligned}$$

Άρα, το $I_1 \setminus \bigcap_{j=1}^k B_j$ είναι γνήσιο υποσύνολο του I_1, και έπεται ότι $\bigcap_{j=1}^k B_j \neq \varnothing$.

Άσκηση 13

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} : \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$ είναι σύνολο Borel.

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε για κάθε } y, z \in (x-\delta, x+\delta),\ |f(y) - f(z)| < \frac{1}{m} \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$. Έστω $x \in A$ και έστω $m \in \mathbb{N}$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $y \in (x-\delta, x+\delta)$ ισχύει $|f(y) - f(x)| < \frac{1}{2m}$. Τότε, για κάθε $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$ έχουμε

$$|f(y) - f(z)| \leqslant |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(z)| < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m},$$

άρα $x \in A_m$. Αφού το m ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $A \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$.

Αντίστροφα, αν $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ μπορούμε να δείξουμε ότι $x \in A$: έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $m \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{m} < \varepsilon$, και αφού $x \in A_m$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$ τότε $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Ειδικότερα, για κάθε $y \in (x-\delta, x+\delta)$, θέτοντας $z = x$, παίρνουμε $|f(y) - f(x)| < \frac{1}{m} < \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι συνεχής στο x, δηλαδή $x \in A$. Έτσι, $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \subseteq A$.

Άσκηση 13

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} : \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$ είναι σύνολο Borel.

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε για κάθε } y, z \in (x-\delta, x+\delta), \ |f(y) - f(z)| < \frac{1}{m} \right\}.$$

Είδαμε ότι $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$. Δείχνουμε κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο. Έστω $x \in A_m$. Μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$ τότε $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Θα δείξουμε ότι $(x-\delta, x+\delta) \subseteq A_m$, δηλαδή το x είναι εσωτερικό σημείο του A_m. Έστω $u \in (x-\delta, x+\delta)$. Υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε $(u-\delta_1, u+\delta_1) \subseteq (x-\delta, x+\delta)$. Τότε, αν $y, z \in (u-\delta_1, u+\delta_1)$ έχουμε $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$, άρα $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Συνεπώς, $u \in A_m$.

Αφού κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο, έπεται ότι το $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ είναι G_δ–σύνολο.

Άσκηση 14

Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$$

είναι σύνολο Borel.

Παρατηρήστε ότι $\lim_{n\to\infty} f(x) = +\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $s \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant k$ να ισχύει $f_n(x) > s$. Συνεπώς,

$$B = \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > s\}.$$

Αφού οι f_n είναι συνεχείς, κάθε σύνολο της μορφής $\{x : f_n(x) > s\}$ (όπου $s, n \in \mathbb{N}$) είναι ανοικτό. Άρα, το B είναι σύνολο Borel.

Άσκηση 15

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.

Έστω $\mathcal{B}$ η Borel σ-άλγεβρα. Ορίζουμε $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}\}$.

1. Έχουμε $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \in \mathcal{B}$, άρα $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$.
2. Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ και, αφού η $\mathcal{B}$ είναι σ–άλγεβρα, $f^{-1}(A^c) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. Συνεπώς, $A^c \in \mathcal{A}$.
3. Αν $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε
$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{B}$$
διότι η $\mathcal{B}$ είναι σ–άλγεβρα. Συνεπώς, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
4. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, τότε το $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό διότι η f είναι συνεχής, άρα $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. Δηλαδή, η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Έπεται ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, άρα $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$. Αυτό δείχνει ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.

Άσκηση 16

Για κάθε $x \in [0, 1)$ συμβολίζουμε με $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ την δεκαδική παράσταση του x (αν το x έχει δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις θεωρούμε εκείνη που τελειώνει σε άπειρα μηδενικά). Βρείτε το εξωτερικό μέτρο καθενός από τα σύνολα:

(i) $A_1 = \{x \in [0, 1) : x_1 \neq 5\}$.

(ii) $A_2 = \{x \in [0, 1) : x_1 \neq 5 \ \text{ και } \ x_2 \neq 5\}$.

(i) Παρατηρήστε ότι

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{6}{10}, 1\right).$$

Συνεπώς, $\lambda(A_1) = \frac{9}{10}$.

(ii) Για τον ορισμό του A_1 χωρίσαμε το $[0, 1)$ σε δέκα ίσα και διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα $[0, 1/10), [1/10, 2/10), \dots, [9/10, 1)$ και αφαιρέσαμε το $[5/10, 6/10)$ το οποίο είναι το σύνολο των $x \in [0, 1)$ για τα οποία $x_1 = 5$. Για να ορίσουμε το A_2 χωρίζουμε καθένα από τα υπόλοιπα διαστήματα $[k/10, (k+1)/10)$, $k \neq 5$, σε δέκα ίσα και διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα μήκους $1/10^2$ και αφαιρούμε το ένα από αυτά (το έκτο κάθε φορά είναι το σύνολο των σημείων του υποδιαστήματος για τα οποία $x_2 = 5$). Αυτό σημαίνει ότι το A_2 αποτελείται από 81 ξένα ημιανοικτά διαστήματα μήκους $1/100$. Συνεπώς,

$$\lambda(A_2) = \frac{81}{100} = \left(\frac{9}{10}\right)^2.$$

Άσκηση 16

Για κάθε $x \in [0,1)$ συμβολίζουμε με $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ την δεκαδική παράσταση του x (αν το x έχει δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις θεωρούμε εκείνη που τελειώνει σε άπειρα μηδενικά). Βρείτε το εξωτερικό μέτρο καθενός από τα σύνολα:

(iii) $A_3 = \{x \in [0,1) : \text{για κάθε } \; n = 1, 2, \ldots, \; x_n \neq 5\}$.

(iii) Συνεχίζοντας τον συλλογισμό του (ii) βλέπουμε ότι το σύνολο

$$A_n = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5, \ldots, x_n \neq 5\}$$

έχει μέτρο

$$\lambda(A_n) = \left(\frac{9}{10}\right)^n.$$

Συνεπώς, για το σύνολο $A = \{x \in [0,1) : \text{για κάθε } \; n = 1, 2, \ldots, \; x_n \neq 5\}$ έχουμε $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ και, αφού η $\{A_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συνόλων, παίρνουμε

$$\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0.$$

Άσκηση 18

Έστω $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε

$$A(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right).$$

Τέλος, θέτουμε $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A(1/j)$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(A(\varepsilon)) \leqslant 2\varepsilon$.

(β) Αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$ δείξτε ότι το $[0,1] \setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.

(γ) Δείξτε ότι $A \subseteq [0,1]$ και $\lambda(A) = 0$.

(α) Παρατηρήστε ότι

$$\lambda(A(\varepsilon)) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda \left(\left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon.$$

(β) Αν το $[0,1] \setminus A(\varepsilon)$ ήταν κενό, θα είχαμε $[0,1] \subseteq A(\varepsilon)$, οπότε $1 \leqslant \lambda(A(\varepsilon))$. Όμως, αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$, από το (α) παίρνουμε $\lambda(A(\varepsilon)) \leqslant 2\varepsilon < 1$.

(γ) Αφού $0 \leqslant q_n \leqslant 1$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$ έχουμε $A \subseteq A(1/j) \subseteq [-1/j, 1 + 1/j]$. Άρα,

$$A \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} [-1/j, 1 + 1/j] = [0,1].$$

Άσκηση 18

Έστω $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Για κάθε $\varepsilon>0$ ορίζουμε

$$A(\varepsilon)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_n-\frac{\varepsilon}{2^n},\,q_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

Τέλος, θέτουμε $A=\bigcap_{j=1}^{\infty}A(1/j)$.

(δ) Δείξτε ότι $\mathbb{Q}\cap[0,1]\subseteq A$ και ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.

(δ) Έχουμε $\mathbb{Q}\cap[0,1]=\{q_n:\ n\in\mathbb{N}\}\subseteq A(1/j)$ για κάθε $j\in\mathbb{N}$, άρα $\mathbb{Q}\cap[0,1]\subseteq\bigcap_{j=1}^{\infty}A(1/j)=A$.

Για κάθε $j\in\mathbb{N}$, το $[0,1]\setminus A(1/j)$ είναι κλειστό και πουθενά πυκνό (διότι δεν περιέχει ρητούς). Ας υποθέσουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο. Αν $A=\{x_n:\ n\in\mathbb{N}\}$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$[0,1]=A\cup([0,1]\setminus A)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}([0,1]\setminus A(1/j))\right).$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο: όλα τα σύνολα $\{x_n\}$, $[0,1]\setminus A(1/j)$ είναι κλειστά, άρα κάποιο από αυτά θα έπρεπε να περιέχει διάστημα, από το θεώρημα του Baire. Συνεπώς, το A είναι υπεραριθμήσιμο.

Άσκηση 19

(α) Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα $\limsup_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1$. Δείξτε ότι: για κάθε $0 < \alpha < 1$ υπάρχει υπακολουθία $\{A_{k_n}\}$ της $\{A_n\}$ με

$$\lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\Big) > \alpha.$$

(α) Αφού $\limsup_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1$, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $n > m$ ώστε $\lambda(A_n) > 1 - \varepsilon$.

Έστω $0 < \alpha < 1$. Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε

$$\lambda(A_{k_n}) > 1 - \frac{1-\alpha}{2^n}.$$

Τότε, αν θέσουμε $A_{k_n}^c := [0,1] \setminus A_{k_n}$, έχουμε

$$\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_{k_n}^c) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{2^n} = 1 - \alpha.$$

Συνεπώς,

$$\lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\Big) = 1 - \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\Big) > \alpha.$$

Άσκηση 19

(β) Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E και έστω $c > 0$ με την ιδιότητα $\lambda(A_n) \geqslant c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\lambda(\limsup A_n) > 0$ και ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \varnothing.$$

(β) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \supseteq A_k$, άρα

$$\lambda\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \geqslant \lambda(A_k) \geqslant c.$$

Αν θέσουμε $E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$, τότε $E_k \searrow \limsup A_n$ και $\lambda(E_1) \leqslant \lambda(E) < \infty$. Συνεπώς,

$$\lambda(\limsup A_n) = \lim_{k\to\infty} \lambda(E_k) \geqslant c > 0.$$

Αφού $\lambda(\limsup A_n) > 0$, έχουμε $\limsup A_n \neq \varnothing$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in E$ το οποίο ανήκει σε άπειρα το πλήθος A_n. Ισοδύναμα, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}$. Με άλλα λόγια, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \varnothing$.

Άσκηση 20

Για κάθε $A \in \mathcal{M}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\rho(A, x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x-t, x+t))}{2t},$$

αν αυτό το όριο υπάρχει. Ο $\rho(A, x)$ είναι η *μετρική πυκνότητα* του A στο σημείο x.

(α) Δείξτε ότι $\rho(\mathbb{Q}, x) = 0$ και $\rho(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\lambda(\mathbb{Q} \cap (x-t, x+t)) = 0 \ \text{ και } \ \lambda((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (x-t, x+t)) = 2t.$$

[Παρατηρήστε ότι τα δύο σύνολα είναι ξένα, έχουν ένωση το $(x-t, x+t)$, και το πρώτο είναι αριθμήσιμο ως υποσύνολο του $\mathbb{Q}$.] Έπεται ότι

$$\rho(\mathbb{Q}, x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\lambda(\mathbb{Q} \cap (x-t, x+t))}{2t} = 0$$

και

$$\rho(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\lambda((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (x-t, x+t))}{2t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{2t}{2t} = 1.$$

Άσκηση 20

Για κάθε $A \in \mathcal{M}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\rho(A,x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x-t, x+t))}{2t},$$

αν αυτό το όριο υπάρχει. Ο $\rho(A,x)$ είναι η *μετρική πυκνότητα* του A στο σημείο x.
(β) Έστω $0 < \alpha < 1$. Κατασκευάστε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\rho(A,0) = \alpha$.

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $C_n = \left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right] \cup \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$. Στη συνέχεια επιλέγουμε μετρήσιμο $A_n \subset C_n$ ώστε $\lambda(A_n) = \alpha\lambda(C_n)$. Ορίζουμε $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Παρατηρήστε ότι, αν $\frac{1}{n+1} \leqslant t < \frac{1}{n}$, τότε

$$\frac{\lambda(A \cap (-t,t))}{2t} \leqslant \frac{\lambda(A \cap (-1/n, 1/n))}{2/(n+1)} = \frac{2\alpha/n}{2/(n+1)} = \alpha\frac{n+1}{n} \leqslant \alpha(1+2t),$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(A \cap (-t,t))}{2t} &\geqslant \frac{\lambda(A \cap (-1/(n+1), 1/(n+1)))}{2/n} = \frac{2\alpha/(n+1)}{2/n} \\ &= \alpha\frac{n}{n+1} \geqslant \alpha(1-2t). \end{aligned}$$

Έπεται ότι $\lim_{t\to 0^+} \frac{\lambda(A\cap(-t,t))}{2t} = \alpha$, δηλαδή $\rho(A,0) = \alpha$.

Άσκηση 33

Έστω $\epsilon > 0$. Έστω A το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους υπάρχουν άπειρα ανάγωγα κλάσματα $\frac{p}{q}$ που ικανοποιούν την $\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^{2+\epsilon}}$. Δείξτε ότι $\lambda(A) = 0$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $A_n = A \cap [-n, n]$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda(A_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, $\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = 0$, άρα $\lambda(A) = 0$.
Για κάθε $q \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $B_{n,q} = \bigcup_{p=-nq}^{nq} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^{2+\epsilon}}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^{2+\epsilon}}\right)$. Τότε,

$$A_n \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{q=k}^{\infty} B_{n,q} = \limsup_q B_{n,q}.$$

Έχουμε

$$\lambda(B_{n,q}) \leqslant \sum_{p=-nq}^{nq} \frac{2}{q^{2+\epsilon}} = \frac{4n}{q^{1+\epsilon}} + \frac{2}{q^{2+\epsilon}},$$

άρα

$$\sum_{q=1}^{\infty} \lambda(B_{n,q}) \leqslant 4n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{1+\epsilon}} + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{2+\epsilon}} < \infty.$$

Από το λήμμα Borel-Cantelli συμπεραίνουμε ότι $\lambda(A_n) \leqslant \lambda(\limsup_q B_{n,q}) = 0$.

Άσκηση 34

Θέτουμε $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Δείξτε ότι:

(α) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε: $A \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} R_j$ και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(R_j) < \varepsilon$.

(α) Το A είναι άπειρο αριθμήσιμο σύνολο, άρα μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή $A = \{a_j : j \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $j \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $R_j = \left(a_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+2}}, a_j + \frac{1}{2^{j+2}}\right)$. Τότε, $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ και

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(R_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Άσκηση 34

Θέτουμε $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Δείξτε ότι:

(β) Αν $\{R_j\}_{j=1}^m$ είναι μια *πεπερασμένη* οικογένεια ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \cup_{j=1}^m R_j$, τότε $\sum_{j=1}^m \lambda(R_j) \geqslant 1$.

(β) Έστω ότι $R_j = (a_j, b_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και ορίζουμε $T_j = (a_j - \varepsilon, b_j + \varepsilon)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Αφού $A = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq R_1 \cup \cdots \cup R_m$,

$$[0,1] = \overline{A} \subseteq \overline{R_1 \cup \cdots \cup R_m} = \overline{R_1} \cup \cdots \cup \overline{R_m} \subseteq T_1 \cup \cdots \cup T_m.$$

Έπεται ότι

$$1 = \ell([0,1]) \leqslant \sum_{j=1}^m \ell(T_j) = \sum_{j=1}^m (\ell(R_j) + 2\varepsilon) = 2m\varepsilon + \sum_{j=1}^m \lambda(R_j).$$

Το πλήθος m των διαστημάτων είναι σταθερό. Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$ έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 36

Εξετάστε αν υπάρχει αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{R} \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n} \right).$$

Μπορούμε να ορίσουμε αρίθμηση των ρητών για την οποία

$$\lambda \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n} \right) \right) < \infty.$$

Αυτό προφανώς αποδεικνύει το ζητούμενο. Θεωρούμε μία 1-1 και επί συνάρτηση από το $M := \{k^2 : k \in \mathbb{N}\}$ στο $\mathbb{Q} \setminus [0,1]$ και μία 1-1 και επί συνάρτηση από το $\mathbb{N} \setminus M$ στο $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Συνδυάζοντάς τις, έχουμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ με την ιδιότητα: $n = k^2$ αν και μόνο αν $|q_n| > 1$. Παρατηρήστε ότι $\bigcup_{n \notin M} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n} \right) \subseteq [-1, 2]$, άρα

$$\lambda \left(\bigcup_{n \notin M} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n} \right) \right) \leqslant 3.$$

Άσκηση 36

Εξετάστε αν υπάρχει αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{R} \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n} \right).$$

Παρατηρήστε ότι $\bigcup\limits_{n \notin M} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right) \subseteq [-1, 2]$, άρα

$$\lambda \left(\bigcup_{n \notin M} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n} \right) \right) \leqslant 3.$$

Επίσης,

$$\sum_{n \in M} \lambda \left(\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n} \right) \right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} < 4.$$

Άρα,

$$\lambda \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n} \right) \right) \leqslant \lambda \left(\bigcup_{n \notin M} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n} \right) \right) + \sum_{n \in M} \lambda \left(\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n} \right) \right) < \infty.$$

Άσκηση 21

Έστω E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $E \subset F$ και $\lambda(E) < \lambda(F)$. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in \big(\lambda(E), \lambda(F)\big)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο K ώστε $E \subset K \subset F$ και $\lambda(K) = \alpha$.

Δείχνουμε πρώτα το εξής: αν W είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(W) > 0$, τότε, για κάθε $0 < \beta < \lambda(W)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές $V \subset W$ ώστε $\lambda(V) = \beta$.

Πράγματι, αφού το W είναι συμπαγές, μπορούμε να βρούμε κλειστό διάστημα $[a, b] \subset \mathbb{R}$ και κλειστό διάστημα $Q \subset \mathbb{R}^{d-1}$ ώστε $W \subseteq Q_1 := [a, b] \times Q$. Ορίζουμε $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$f(t) = \lambda(W \cap \{x = (x_1, \dots, x_k) \in Q_1 : a \leqslant x_1 \leqslant t\}).$$

Η f είναι συνεχής: δείξτε ότι

$$|f(t) - f(s)| \leqslant \lambda_{d-1}(Q)\, |t - s|.$$

Αφού $f(a) = 0$ και $f(b) = \lambda(W)$, ο ισχυρισμός έπεται από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

Έστω τώρα E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $E \subset F$ και $\lambda(E) < \lambda(F)$. Έστω $\alpha \in \big(\lambda(E), \lambda(F)\big)$. Αφού $\alpha - \lambda(E) < \lambda(F \setminus E)$, μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο $W \subseteq F \setminus E$ με $\lambda(W) > \alpha - \lambda(E)$. Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό, βρίσκουμε συμπαγές $V \subset W$ ώστε $\lambda(V) = \alpha - \lambda(E)$. Αν θέσουμε $K = E \cup V$, έχουμε ότι το K είναι συμπαγές, $E \subset K \subset F$ και $\lambda(K) = \alpha$.

Άσκηση 31

Δώστε παράδειγμα συνόλου Borel που δεν είναι G_δ-σύνολο ούτε F_σ-σύνολο.

Θεωρούμε τα σύνολα $B = \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0]$ και $C = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, \infty)$. Παρατηρήστε ότι το B είναι F_σ-σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων και το C είναι G_δ-σύνολο διότι γράφεται στη μορφή $C = \bigcap_{\mathbb{Q}\cap(0,\infty)}((0, \infty) \setminus \{q\})$. Ειδικότερα, τα B και C είναι Borel σύνολα. Ορίζουμε

$$A = B \cup C = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, 0]) \cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, \infty)).$$

Το A είναι Borel σύνολο ως ένωση δύο Borel συνόλων.

Άσκηση 31

Δώστε παράδειγμα συνόλου Borel που δεν είναι G_δ-σύνολο ούτε F_σ-σύνολο.

Τώρα, παρατηρούμε τα εξής:

1. Το B δεν είναι G_δ-σύνολο. Αν ήταν, τότε θα υπήρχαν ανοικτά σύνολα $G_n \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Θέτοντας $U_n = G_n \cap (-\infty, 0]$ θα είχαμε $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ και κάθε U_n θα ήταν ανοικτό και πυκνό στον πλήρη μετρικό χώρο $(-\infty, 0]$ αφού $U_n \supseteq B$ και το B είναι πυκνό στο $(-\infty, 0]$. Θεωρώντας μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του B και τα ανοικτά πυκνά σύνολα $V_n = (-\infty, 0] \setminus \{q_n\}$ θα είχαμε
$$\varnothing = B \cap ((-\infty, 0] \setminus B) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right),$$
το οποίο είναι άτοπο από το θεώρημα Baire.
2. Το C δεν είναι F_σ-σύνολο. Αν ήταν, τότε το $\mathbb{R} \setminus C = \mathbb{Q} \cup (-\infty, 0]$ θα ήταν G_δ-σύνολο, άρα και η τομή του με το G_δ-σύνολο $[1, \infty)$, δηλαδή το $\mathbb{Q} \cap [1, \infty)$ θα ήταν G_δ-σύνολο. Αυτό οδηγεί σε άτοπο όπως πριν.
3. Το A δεν είναι G_δ-σύνολο. Αν ήταν, τότε επειδή το $(-\infty, 0]$ είναι G_δ-σύνολο, θα είχαμε ότι το $B = A \cap (-\infty, 0]$ είναι G_δ-σύνολο.
4. Ομοίως, το A δεν είναι F_σ-σύνολο. Αν ήταν, τότε επειδή το $[0, \infty)$ είναι κλειστό σύνολο, θα είχαμε ότι το $C = A \cap [0, \infty)$ είναι F_σ-σύνολο.

Άσκηση 32

Έστω A και B κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$ δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Δείξτε όμως ότι είναι πάντα F_σ-σύνολο.

Δείχνουμε πρώτα ότι αν το A είναι συμπαγές και το B κλειστό, τότε το $A+B$ είναι κλειστό. Έστω (x_n) ακολουθία στο $A+B$ με $x_n\to x\in\mathbb{R}$. Τότε, κάθε x_n γράφεται στη μορφή $x_n=a_n+b_n$, όπου $a_n\in A$ και $b_n\in B$. Αφού το A είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n}\to a\in A$. Τότε, $b_{k_n}=x_{k_n}-a_{k_n}\to x-a$. Αφού το B είναι κλειστό, έχουμε $x-a\in B$. Άρα, $x=a+(x-a)\in A+B$. Έπεται ότι το $A+B$ είναι κλειστό.

Υποθέτουμε τώρα ότι τα A, B είναι κλειστά. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n\cap[-n,n]$. Το A_n είναι συμπαγές, άρα το A_n+B είναι κλειστό από την προηγούμενη παρατήρηση. Έπεται ότι το

$$A+B=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n+B)$$

είναι F_σ-σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων.

Άσκηση 32

Έστω A και B κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$ δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Δείξτε όμως ότι είναι πάντα F_σ-σύνολο.

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι το $A+B$ δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Ορίζουμε $A=\mathbb{Z}$ και $B=\sqrt{2}\mathbb{Z}$. Τα A, B είναι κλειστά. Όμως, το $A+B=\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}=\{a+b\sqrt{2} : a,b\in\mathbb{Z}\}$ δεν είναι κλειστό. Θα δείξουμε ότι είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.
Παρατηρούμε ότι η ακολουθία (α_n) με $\alpha_n=(\sqrt{2}-1)^n$ είναι στο $A+B$ και $\alpha_n\to 0$. Έστω $x>0$ και έστω $\varepsilon>0$. Επιλέγουμε $n_0\in\mathbb{N}$ με $0<\alpha_{n_0}<\varepsilon$ και μετά $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ με $m\alpha_{n_0}\leqslant x<(m+1)\alpha_{n_0}$. Τότε, $0\leqslant x-m\alpha_{n_0}<\alpha_{n_0}<\varepsilon$. Αν $x<0$ δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε πάλι $m\in\mathbb{Z}$ ώστε $|x-m\alpha_{n_0}|<\varepsilon$. Αφού $m\alpha_{n_0}\in\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}=A+B$, έπεται ότι $\overline{A+B}=\mathbb{R}$.

Άσκηση 35

(α) Έστω G φραγμένο, μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει αριθμήσιμη κάλυψη $\{B_j\}$ του G από ανοικτές μπάλες ώστε: κάθε σημείο του G ανήκει σε άπειρες το πλήθος B_j και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j) < \infty$.

(α) Έστω ότι υπάρχει αριθμήσιμη κάλυψη $\{B_j\}$ του G από ανοικτές μπάλες ώστε: κάθε σημείο του G ανήκει σε άπειρες το πλήθος B_j και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j) < \infty$. Τότε, η πρώτη υπόθεση μας λέει ότι

$$G \subseteq \limsup_j B_j.$$

Από την δεύτερη υπόθεση και από το λήμμα Borel-Cantelli έχουμε ότι $\lambda\left(\limsup_j B_j\right) = 0$. Άρα, $\lambda(G) = 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού το G έχει μη κενό εσωτερικό.

Άσκηση 35

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{B_j\}$ ανοικτών μπαλών ώστε να καλύπτει το G όπως στο (α) και για κάθε $p > 1$ να ισχύει $\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda(B_j))^p < \infty$.

(β) Το G είναι φραγμένο, άρα περιέχεται σε έναν κύβο Q με μήκος ακμής a. Θέτουμε $Q_1^0 = Q$. Διχοτομούμε κάθε ακμή του Q_1^0, και παίρνουμε 2^d κλειστούς κύβους $Q_i^1, i = 1, \ldots 2^d$. Αν x_i^1 είναι το κέντρο του Q_i^1, θέτουμε $B_i^1 = B\left(x_i^1, 3\frac{a\sqrt{d}}{2}\right)$. Τότε $Q_i^1 \subseteq B_i^1$ για κάθε $i = 1, \ldots 2^d$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά, διχοτομώντας τις ακμές κάθε κύβου του προηγούμενου βήματος. Στο n-οστό βήμα παίρνουμε 2^{dn} μπάλες, καθεμία από τις οποίες έχει ακτίνα $3\frac{a\sqrt{d}}{2^n}$, άρα το άθροισμα των p δυνάμεων των μέτρων αυτών των μπαλών φράσσεται από

$$[\lambda(B_d)]^p 2^{dn} \left(3\frac{a\sqrt{d}}{2^n}\right)^{dp} = [\lambda(B_d)]^p (3a\sqrt{d})^{dp} 2^{nd(1-p)},$$

όπου B_d είναι η Ευκλείδεια μπάλα ακτίνας 1.

Άσκηση 35

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{B_j\}$ ανοικτών μπαλών ώστε να καλύπτει το G όπως στο (α) και για κάθε $p > 1$ να ισχύει $\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda(B_j))^p < \infty$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά, διχοτομώντας τις ακμές κάθε κύβου του προηγούμενου βήματος. Στο n-οστό βήμα παίρνουμε 2^{dn} μπάλες, καθεμία από τις οποίες έχει ακτίνα $3\frac{a\sqrt{d}}{2^n}$, άρα το άθροισμα των p δυνάμεων των μέτρων αυτών των μπαλών φράσσεται από

$$[\lambda(B_d)]^p 2^{dn}\left(3\frac{a\sqrt{d}}{2^n}\right)^{dp} = [\lambda(B_d)]^p (3a\sqrt{d})^{dp} 2^{nd(1-p)},$$

όπου B_d είναι η Ευκλείδεια μπάλα ακτίνας 1. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάθε σημείο του Q ανήκει σε κάποιον κύβο του n-οστού, άρα και σε μία μπάλα του n-οστού βήματος. Αν θεωρήσουμε την συλλογή όλων των μπαλών που ορίζονται με αυτόν τον τρόπο σε οποιοδήποτε βήμα, έχουμε μια κάλυψη $\{B_j\}_j$ του Q, άρα και του G, με την ιδιότητα ότι κάθε $x \in G$ ανήκει σε άπειρες B_j. Τέλος,

$$[\lambda(B_d)]^p \sum_{n=1}^{\infty}(3a\sqrt{d})^{dp} 2^{d(1-p)n} < \infty,$$

αφού $2^{d(1-p)} < 1$.

Άσκηση 24

Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$ και $\lambda(B) > 0$. Δείξτε ότι το $A + B$ περιέχει διάστημα.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα A και B έχουν πεπερασμένο και θετικό μέτρο. Μπορούμε να βρούμε αριθμήσιμη ένωση $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ διαστημάτων, που οι κορυφές τους έχουν ρητές συντεταγμένες, ώστε $A \subseteq G$ και

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \leqslant \frac{4}{3}\lambda(A) \leqslant \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A \cap I_k).$$

Έπεται ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\ell(I_k) \leqslant \frac{4}{3}\lambda(A \cap I_k).$$

Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα και στο B, καταλήγουμε στο εξής: υπάρχουν διαστήματα I_0 και J_0 με ρητά άκρα, ώστε

$$(*) \qquad \lambda(A \cap I_0) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I_0) \quad \text{και} \quad \lambda(B \cap J_0) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(J_0).$$

Αφού τα μήκη των I_0 και J_0 είναι ρητοί αριθμοί, μπορούμε να βρούμε $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε τα I_0 και J_0 να χωρίζονται σε m και n διαδοχικά διαστήματα αντίστοιχα, που όλα έχουν το ίδιο μήκος. Χρησιμοποιώντας και την $(*)$ βλέπουμε τώρα ότι υπάρχουν διαστήματα I_1 και J_1 που έχουν το ίδιο μήκος, ώστε

$$\lambda(A \cap I_1) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I_1) \quad \text{και} \quad \lambda(B \cap J_1) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(J_1).$$

Άσκηση 24

Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$ και $\lambda(B) > 0$. Δείξτε ότι το $A + B$ περιέχει διάστημα.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα A και B έχουν πεπερασμένο και θετικό μέτρο. Είδαμε ότι μπορούμε να βρούμε διαστήματα I_1 και J_1 που έχουν το ίδιο μήκος, ώστε

$$\lambda(A \cap I_1) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I_1) \quad \text{και} \quad \lambda(B \cap J_1) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(J_1).$$

Με άλλα λόγια, υπάρχει διάστημα I με κέντρο το 0 και υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda((A - x) \cap I) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I) \quad \text{και} \quad \lambda((B - y) \cap I) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I).$$

Έπεται ότι

$$\lambda((A - x) \cap (B - y) \cap I) \geqslant \frac{1}{2}\lambda(I) > 0.$$

Θέτουμε $C = (A - x) \cap (B - y)$. Από το Λήμμα του Steinhaus, το $C - C$ περιέχει διάστημα με κέντρο το 0. Αφού

$$A - B - (x + y) = (A - x) - (B - y) \supseteq C - C,$$

συμπεραίνουμε ότι το $A - B$ περιέχει διάστημα. Αντικαθιστώντας το B με το $-B$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 25

Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x, y \in E$ ισχύει $\frac{1}{2}(x+y) \in E$. Δείξτε ότι το E έχει μη κενό εσωτερικό.

Θεωρούμε το $\frac{E}{2} = \left\{ \frac{x}{2} : x \in E \right\}$. Αφού το E έχει θετικό μέτρο, το $\frac{E}{2}$ είναι μετρήσιμο και έχει θετικό μέτρο:

$$\lambda\left(\frac{E}{2}\right) = \frac{\lambda(E)}{2} > 0.$$

Από την Άσκηση 24, το σύνολο $\frac{E}{2} + \frac{E}{2}$ περιέχει κάποιο διάστημα.
Όμως, από την υπόθεση έπεται άμεσα ότι $\frac{E}{2} + \frac{E}{2} \subseteq E$. Άρα, το E περιέχει διάστημα. Ειδικότερα, έχει μη κενό εσωτερικό.

Άσκηση 27

Έστω $A \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι

$$\lambda\big(\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q})\big) = 0.$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Άσκηση 24. Αν είχαμε $\lambda\big(\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q})\big) > 0$ τότε το σύνολο $A - \big(\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q})\big)$ θα περιείχε κάποιο διάστημα I. Παρατηρούμε όμως ότι αν $x \in A - \big(\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q})\big)$ τότε $x \notin \mathbb{Q}$ (αλλιώς θα είχαμε $-x \in \mathbb{Q}$ και $x = a - y$, όπου $a \in A$ και $y \notin A + \mathbb{Q}$, το οποίο θα οδηγούσε στην $a - x = y \notin A + \mathbb{Q}$ το οποίο είναι άτοπο).
Αφού το διάστημα I περιέχει ρητούς, οδηγούμαστε σε άτοπο.

Άσκηση 38

Έστω $A \subseteq E \subseteq B$. Αν τα A, B είναι μετρήσιμα και $\lambda(A) = \lambda(B) < \infty$, δείξτε ότι το E είναι μετρήσιμο.

Παρατηρούμε ότι $E \setminus A \subseteq B \setminus A$ και $\lambda(B \setminus A) = \lambda(B) - \lambda(A) = 0$. Άρα, το $E \setminus A$ είναι μετρήσιμο και έπεται ότι το το $E = A \cup (E \setminus A)$ είναι μετρήσιμο.

Άσκηση 39

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Υποθέτουμε ότι $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ και $\lambda(E) = \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2)$. Δείξτε ότι τα E_1, E_2 είναι μετρήσιμα.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν ανοικτά σύνολα A_n, B_n, G_n με

$$E_1 \subseteq A_n, \;\; E_2 \subseteq B_n \;\text{ και }\; E \subseteq G_n,$$

τέτοια ώστε

$$\lambda(A_n) < \lambda^*(E_1) + \frac{1}{n}, \;\; \lambda(B_n) < \lambda^*(E_2) + \frac{1}{n} \;\text{ και }\; \lambda(G_n) < \lambda(E) + \frac{1}{n}.$$

Θέτουμε $C_n = \bigcap_{k=1}^{n}(G_k \cap A_k)$ και $D_n = \bigcap_{k=1}^{n}(G_k \cap B_k)$. Τότε, οι $(C_n), (D_n)$ είναι φθίνουσες ακολουθίες ανοικτών συνόλων, με $E_1 \subseteq C_n, E_2 \subseteq D_n$, και

$$\lambda(C_n) < \lambda^*(E_1) + \frac{1}{n}, \;\; \lambda(D_n) < \lambda^*(E_2) + \frac{1}{n}.$$

Ορίζουμε τώρα $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ και $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$. Τα C, D είναι G_δ-σύνολα, άρα είναι μετρήσιμα. Επιπλέον, $E_1 \subseteq C$ και $E_2 \subseteq D$, άρα $E \cap D^c \subseteq E_1$. Άρα, για να δείξουμε ότι το E_1 είναι μετρήσιμο, από την Άσκηση 38 αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda(C) = \lambda(E \cap D^c)$. Αφού τα $C, E \cap D^c$ έχουν πεπερασμένο μέτρο και $E \cap D^c \subseteq C$, αρκεί να δείξουμε ότι το $C \setminus (E \cap D^c) = (C \cap D) \cup (C \cap E^c)$ έχει μηδενικό μέτρο.

Άσκηση 39

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Υποθέτουμε ότι $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ και $\lambda(E) = \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2)$. Δείξτε ότι τα E_1, E_2 είναι μετρήσιμα.

Για το $C \cap E^c$, γράφουμε $C \cap E^c = \bigcap_{n=1}^{\infty}(C_n \cap E^c)$. Όμως, η $(C_n \cap E^c)$ είναι φθίνουσα, και

$$\lambda(C_n \cap E^c) \leqslant \lambda(G_n \cap E^c) = \lambda(G_n) - \lambda(E) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Επομένως, $\lambda(C \cap E^c) = 0$.

Για το $C \cap D$, γράφουμε $C \cap D = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(C_n \cap D_n)$. Όμως, η $(C_n \cap D_n)$ είναι φθίνουσα, και

$$\begin{aligned}\lambda(C_n \cap D_n) &= \lambda(C_n) + \lambda(D_n) - \lambda(C_n \cup D_n) \leqslant \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2) + \frac{2}{n} - \lambda(C_n \cup D_n)\\ &\leqslant \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2) + \frac{2}{n} - \lambda(E) = \frac{2}{n},\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις $E = E_1 \cup E_2 \subseteq C_n \cup D_n$ και $\lambda(E) = \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2)$. Άρα, $\lambda(C \cap D) = 0$.