605. Ασκήσεις – Κεφάλαιο 4

Χώροι L_p

17 Απριλίου 2021

Άσκηση 11

Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L_p(E)$ με $\|f_n\|_p \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο E, δείξτε ότι $f \in L_p(E)$ και $\|f\|_p \leqslant 1$.

Αφού $|f_n|^p \to |f|^p$ σχεδόν παντού στο E, από το λήμμα του Fatou έχουμε

$$\|f\|_p^p = \int_E |f|^p \, d\lambda = \int_E \lim_{n\to\infty} |f_n|^p \, d\lambda \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E |f_n|^p \, d\lambda \leqslant 1,$$

διότι

$$\int_E |f_n|^p \, d\lambda = \|f_n\|_p^p \leqslant 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από την υπόθεση.

Άσκηση 2

Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι $f \in L_p(E)$ αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) < \infty$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_n = \{x \in E : n-1 \leqslant |f| < n\}$. Παρατηρούμε ότι $(n-1)^p \lambda(E_n) \leqslant \int_{E_n} |f|^p \, d\lambda \leqslant n^p \lambda(E_n)$. Επίσης, αφού τα E_n είναι ξένα, από την προσθετικότητα του ολοκληρώματος έχουμε

$$\sum_{n=k}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p \, d\lambda = \int_{\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n} |f|^p \, d\lambda \leqslant \int_E |f|^p \, d\lambda$$

για κάθε $k \geqslant 1$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f \in L_p(E)$. Τότε, αφού $\frac{n}{n-1} \leqslant 2$ για κάθε $n \geqslant 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n^p \lambda(E_n) &\leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^p (n-1)^p \lambda(E_n) \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} 2^p (n-1)^p \lambda(E_n) \\ &\leqslant 2^p \sum_{n=2}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p \, d\lambda \leqslant 2^p \int_E |f|^p \, d\lambda < \infty. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(E_n) < \infty$.

Άσκηση 2

Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι $f \in L_p(E)$ αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) < \infty.$$

Αντίστροφα, αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(E_n) < \infty$$

τότε

$$\begin{aligned} \int_E |f|^p \, d\lambda &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} n^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) < \infty, \end{aligned}$$

άρα $f \in L_p(E)$.

Άσκηση 5

Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < q < \infty$.

(α) Αν $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_q [\lambda(E)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

(β) Δείξτε ότι $L_q(E) \subseteq L_p(E)$.

(α) και (β) Υποθέτουμε ότι $\|f\|_q < \infty$, αλλιώς το δεξιό μέλος απειρίζεται και δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αν $f \in L_q(E)$, μπορούμε να γράψουμε

$$\int_E |f|^p \cdot \mathbf{1}\, d\lambda \leqslant \left(\int_E |f|^q d\lambda \right)^{p/q} \left(\int_E \mathbf{1}\, d\lambda \right)^{1-p/q} = \|f\|_q^p (\lambda(E))^{1-p/q},$$

χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder για τις $|f|^p$ και $\mathbf{1}$ με εκθέτες $\frac{q}{p}$ και $\frac{q}{q-p}$ αντίστοιχα. Άρα,

$$\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_q^p (\lambda(E))^{1-\frac{p}{q}} < +\infty,$$

απ' όπου έπεται ότι $f \in L^p(E)$ και $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q [\lambda(E)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$.

Άσκηση 5

Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < q < \infty$.

(γ) Δείξτε ότι $L_q(E) \neq L_p(E)$.

(γ) Έστω $1 \leqslant p < q < \infty$. Θα ορίσουμε $f \in L_p(E) \setminus L_q(E)$. Αφού $0 < \lambda(E) < \infty$ μπορούμε να βρούμε ξένα μετρήσιμα $E_n \subset E$ με $\lambda(E_n) = \frac{\lambda(E)}{2^n}$ και $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$, της μορφής $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{E_n}(x)$, όπου $a_n > 0$ που θα επιλεγούν κατάλληλα. Έχουμε

$$\|f\|_q^q = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) a_n^q \quad \text{και} \quad \|f\|_p^q = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) a_n^p.$$

Αν ορίσουμε

$$a_n = 2^{n/q}$$

τότε

$$\|f\|_q^q = \lambda(E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^n = \infty$$

ενώ

$$\|f\|_p^p = \lambda(E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^{np/q} = \lambda(E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(1-p/q)}} < \infty$$

(έχουμε $\delta = 1 - p/q > 0$ διότι $p < q$, και η γεωμετρική σειρά με λόγο $2^{-(1-p/q)} = 2^{-\delta} < 1$ συγκλίνει).

Άσκηση 6

Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < q < r < \infty$. Δείξτε ότι κάθε $f \in L_q(E)$ γράφεται στην μορφή $f = g + h$ για κάποιες $g \in L_p(E)$ και $h \in L_r(E)$.

Θεωρούμε το σύνολο $B = \{|f| > 1\}$ και ορίζουμε τις $g = f\chi_B$, $h = f - g$. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $f = g + h$. Παρατηρούμε ότι $|f(x)|^p \leqslant |f(x)|^q$ για κάθε $x \in B$, διότι $p < q$ και $|f(x)| > 1$ αν $x \in B$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_E |g|^p d\lambda &= \int_E |f|^p \chi_B \, d\lambda = \int_B |f|^p \, d\lambda \leqslant \int_B |f|^q \, d\lambda \\ &\leqslant \int_E |f|^q \, d\lambda = \|f\|_q^q < \infty,\end{aligned}$$

διότι $f \in L_q(E)$. Άρα, $g \in L_p(E)$.
Για την h παρατηρούμε ότι $h = f\chi_{E\setminus B}$, και $|h(x)| \leqslant 1$ για κάθε $x \in E \setminus B$. Συνεπώς, $|h(x)|^r \leqslant |h(x)|^q$ για κάθε $x \in E \setminus B$, διότι $q < r$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_E |h|^r d\lambda &= \int_E |f|^r \chi_{E\setminus B} \, d\lambda = \int_{E\setminus B} |f|^r \, d\lambda \leqslant \int_{E\setminus B} |f|^q \, d\lambda \\ &\leqslant \int_E |f|^q \, d\lambda = \|f\|_q^q < \infty,\end{aligned}$$

διότι $f \in L_q(E)$. Άρα, $h \in L_r(E)$.

Άσκηση 7

Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < r < \infty$. Δείξτε ότι: αν $f \in L_p(E) \cap L_r(E)$ τότε $f \in L_q(E)$ για κάθε $p \leqslant q \leqslant r$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p < q < r$. Υπάρχει $t \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $q = (1-t)p + tr$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder για τις συναρτήσεις $|f|^{(1-t)p}$ και $|f|^{tr}$ με εκθέτες $\frac{1}{1-t}$ και $\frac{1}{t}$ αντίστοιχα, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f|^q \, d\lambda = \int_E |f|^{(1-t)p} |f|^{tr} \, d\lambda &\leqslant \left(\int_E \left(|f|^{(1-t)p} \right)^{\frac{1}{1-t}} d\lambda \right)^{1-t} \left(\int_E \left(|f|^{tr} \right)^{\frac{1}{t}} d\lambda \right)^{t} \\ &= \left(\int_E |f|^p d\lambda \right)^{1-t} \left(\int_E |f|^r d\lambda \right)^{t} = \|f\|_p^{(1-t)p} \|f\|_r^{tr} < \infty.\end{aligned}$$

Άρα, $f \in L_q(E)$.

Άσκηση 16

Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Έστω $0 \neq f \in L_\infty(E)$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $1 \leqslant p < \infty$,

$$\|f\|_p^p = \int_E |f(x)|^p \, d\lambda \leqslant \int_E \|f\|_\infty^p d\lambda = \|f\|_\infty^p \lambda(E) < \infty,$$

άρα $f \in L_p(E)$. Επίσης, $\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty [\lambda(E)]^{1/p} \to \|f\|_\infty$ καθώς το $p \to \infty$, άρα $\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty$.
Από την άλλη πλευρά, αν $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, τότε το σύνολο $B_\varepsilon = \{x \in X : |f(x)| \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ έχει θετικό μέτρο, και

$$\|f\|_p^p \geqslant \int_{B_\varepsilon} |f(x)|^p d \, d\lambda \geqslant (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \lambda(B_\varepsilon),$$

άρα

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant (\|f\|_\infty - \varepsilon) \lim_{p\to\infty} [\lambda(B_\varepsilon)]^{1/p} = \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon \in (0, \|f\|_\infty)$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty$, και έπεται ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Άσκηση 9

Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $c_1, \ldots, c_m > 0$ με $c_1 + \cdots + c_m = 1$. Δείξτε ότι: αν $f_1, \ldots, f_m : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int_E \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i} \right) d\lambda \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_E |f_i|\, d\lambda \right)^{c_i}.$$

Αν $\int_E |f_i|\, d\lambda = 0$ για κάποιο $i = 1, \ldots, m$, τότε $f_i = 0$ σχεδόν παντού, άρα $\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i} = 0$ σχεδόν παντού, και τα δύο μέλη της ζητούμενης ανισότητας είναι ίσα με μηδέν. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\int_E |f_i|\, d\lambda > 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$g_i = \frac{1}{\int_E |f_i|\, d\lambda} f_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Τότε, $\int_E |g_i|\, d\lambda = 1$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $x \mapsto \ln x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ και την $\sum_{j=1}^m c_j = 1$ βλέπουμε ότι (αν $|g_i(x)| > 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$)

$$\begin{aligned} \ln(|g_1(x)|^{c_1}|g_2(x)|^{c_2}\cdots|g_m(x)|^{c_m}) &= c_1\ln(|g_1(x)|) + c_2\ln(|g_2(x)|) + \cdots + c_m\ln(|g_m(x)|) \\ &\leqslant \ln(c_1|g_1(x)| + c_2|g_2(x)| + \cdots + c_m|g_m(x)|), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$|g_1(x)|^{c_1}|g_2(x)|^{c_2}\cdots|g_m(x)|^{c_m} \leqslant c_1|g_1(x)| + c_2|g_2(x)| + \cdots + c_m|g_m(x)|.$$

Άσκηση 9

Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $c_1, \ldots, c_m > 0$ με $c_1 + \cdots + c_m = 1$. Δείξτε ότι: αν $f_1, \ldots, f_m : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int_E \left(\prod_{i=1}^{m} |f_i|^{c_i} \right) d\lambda \leqslant \prod_{i=1}^{m} \left(\int_E |f_i| \, d\lambda \right)^{c_i}.$$

Είδαμε ότι

$$|g_1(x)|^{c_1} |g_2(x)|^{c_2} \cdots |g_m(x)|^{c_m} \leqslant c_1 |g_1(x)| + c_2 |g_2(x)| + \cdots + c_m |g_m(x)|.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει προφανώς και στην περίπτωση που $g_i(x) = 0$ για κάποιο i. Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

$$\int_E \left(\prod_{i=1}^{m} |g_i|^{c_i} \right) d\lambda \leqslant c_1 \int_E |g_1| \, d\lambda + \cdots + c_m \int_E |g_m| \, d\lambda = c_1 + \cdots + c_m = 1.$$

Αφού

$$\prod_{i=1}^{m} |g_i|^{c_i} = \frac{\prod_{i=1}^{m} |f_i|^{c_i}}{\prod_{i=1}^{m} \left(\int_E |f_i| \, d\lambda \right)^{c_i}},$$

έπεται ότι

$$\int_E \left(\prod_{i=1}^{m} |f_i|^{c_i} \right) d\lambda \leqslant \prod_{i=1}^{m} \left(\int_E |f_i| \, d\lambda \right)^{c_i}.$$

Άσκηση 3

Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f_n, f \in L_p(E)$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο E, δείξτε ότι $\|f_n - f\|_p \to 0$ αν και μόνο αν $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

Από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_p$ έχουμε

$$\left|\, \|f_n\|_p - \|f\|_p \,\right| \leqslant \|f_n - f\|_p.$$

Συνεπώς, αν $\|f_n - f\|_p \to 0$ έχουμε $\|f_n\|_p - \|f\|_p \to 0$, δηλαδή $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.
Για την αντίστροφη ανισότητα, χρησιμοποιούμε την γενίκευση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης. Ορίζουμε $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p)$ και $g = 2^{p+1}|f|^p$. Έχουμε

$$\begin{aligned} |f_n - f|^p &\leqslant (|f_n| + |f|)^p \leqslant (2\max\{|f_n|, |f|\})^p = 2^p \max\{|f_n|^p, |f|^p\} \\ &\leqslant 2^p(|f_n|^p + |f|^p) = g_n. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $g_n \to g$ σχεδόν παντού (διότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού). Επίσης, $g_n, g \in L_1(E)$ (διότι $|f_n|^p, |f|^p \in L_1(E)$) και

$$\int_E |g_n|\, d\lambda = 2^p \left(\int_E |f_n|^p\, d\lambda + \int_E |f|^p\, d\lambda \right) \to 2^{p+1} \int_E |f|^p\, d\lambda = \int_E g\, d\lambda,$$

διότι $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.
Αφού $|f_n - f|^p \to 0$ σχεδόν παντού, συμπεραίνουμε ότι $\int_E |f_n - f|^p\, d\lambda \to 0$, δηλαδή $\|f_n - f\|_p \to 0$.

Άσκηση 4

Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 < p < \infty$ και q ο συζυγής εκθέτης του p. Αν $f_n \to f$ στον $L_p(E)$ και $g_n \to g$ στον $L_q(E)$, δείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ στον $L_1(E)$.

Παρατηρούμε ότι

$$\|f_n g_n - fg\|_1 \leqslant \|f_n(g_n - g)\|_1 + \|g(f_n - f)\|_1 \leqslant \|f_n\|_p \|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q$$

από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_1$ και την ανισότητα Hölder. Επίσης, αφού

$$|\,\|f_n\|_p - \|f\|_p\,| \leqslant \|f_n - f\|_p \to 0,$$

έχουμε $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$, άρα η ακολουθία $(\|f_n\|_p)$ είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|f_n\|_p \leqslant M$ για κάθε n. Από την υπόθεση έχουμε επίσης $\|f_n - f\|_p \to 0$ και $\|g_n - g\|_q \to 0$, άρα

$$\|f_n g_n - fg\|_1 \leqslant M\|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q \to 0.$$

Άσκηση 14

Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L_p(E)$ με $\|f_n - f\|_p \to 0$. Έστω (g_n) ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο E με $g_n \to g$ στο E. Δείξτε ότι $\|f_n g_n - fg\|_p \to 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την απλή παρατήρηση ότι αν $u \in L_p(E)$ και $v \in L_\infty(E)$ τότε $uv \in L_p(E)$ και

$$\|uv\|_p^p = \int_E |u|^p |v|^p \, d\lambda \leqslant \int_E |u|^p \|v\|_\infty^p \, d\lambda = \|v\|_\infty^p \|u\|_p^p.$$

δηλαδή $\|uv\|_p \leqslant \|v\|_\infty \|u\|_p$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \|f_n g_n - fg\|_p &= \|(f_n - f)g_n + f(g_n - g)\|_p \leqslant \|(f_n - f)g_n\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \\ &\leqslant \|g_n\|_\infty \|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \leqslant M\|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p. \end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος έχουμε $\|f_n - f\|_p \to 0$, άρα $M\|f_n - f\|_p \to 0$. Για τον δεύτερο όρο χρησιμοποιούμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης: έχουμε

$$|f(g_n - g)|^p = |f|^p |g_n - g|^p \leqslant |f|^p (|g_n| + |g|)^p \leqslant (2M)^p |f|^p$$

και η $(2M)^p |f|^p$ είναι ολοκληρώσιμη, διότι $f \in L_p(E)$ (ως $\|\cdot\|_p$-όριο των $f_n \in L_p(E)$). Επίσης, $|f(g_n - g)|^p \to 0$, διότι $|f(x)| < \infty$ και $g_n(x) - g(x) \to 0$. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, και έχουμε
$\int_E |f(g_n - g)|^p \, d\lambda \to 0$, δηλαδή $\|f(g_n - g)\|_p \to 0$. Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\|f_n g_n - fg\|_p \leqslant M\|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \to 0.$$

Άσκηση 18

Έστω E, F μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E), \lambda(F) < \infty$.

(α) Δείξτε ότι η $\chi_E * \chi_F$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(β) Δείξτε ότι υπάρχουν $x_0 \in \mathbb{R}^d$ και $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|x - x_0| < \varepsilon$ τότε $\lambda(E \cap (F + x)) > 0$. Δηλαδή, το $E - F$ έχει μη κενό εσωτερικό.

(α) Γράφουμε

$$\begin{aligned} |(\chi_E * \chi_F)(x) - (\chi_E * \chi_F)(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} [\chi_E(x - z) - \chi_E(y - z)]\chi_F(z) d\lambda(z) \right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E(x - z) - \chi_E(y - z)| d\lambda(z). \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $f(z) = \chi_E(x - z)$, τότε $\chi_E(y - z) = \chi_E(x - z - (x - y) = f(z + (x - y)) = f_{x-y}(z)$. Αφού $\lambda(E) < \infty$, έχουμε $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Έπεται ότι

$$\lim_{y \to x} \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E(x - z) - \chi_E(y - z)| d\lambda(z) = \lim_{x \to y} \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_{x-y}| \, d\lambda = 0.$$

Άσκηση 18

Έστω E, F μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E), \lambda(F) < \infty$.

(α) Δείξτε ότι η $\chi_E * \chi_F$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(β) Δείξτε ότι υπάρχουν $x_0 \in \mathbb{R}^d$ και $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|x - x_0| < \varepsilon$ τότε $\lambda(E \cap (F + x)) > 0$. Δηλαδή, το $E - F$ έχει μη κενό εσωτερικό.

(β) Παρατηρούμε ότι $(\chi_E * \chi_F)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x - y)\chi_F(y)\, d\lambda(y) = \lambda((x - E) \cap F)$. Επίσης,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} (\chi_E * \chi_F)(x)\, d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x - y)\chi_F(y)\, d\lambda(y)\, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \chi_F(y) \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x - y)\, d\lambda(x)\, d\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \chi_F(y)\lambda(y + E)\, d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_F(y)\lambda(E)\, d\lambda(y) \\
&= \lambda(E) \int_{\mathbb{R}^d} \chi_F(y)\, d\lambda(y) = \lambda(E)\lambda(F) > 0.
\end{aligned}
$$

Άρα, υπάρχει $x \in \mathbb{R}^d$ ώστε $\lambda((x - E) \cap F) > 0$.

Άσκηση 18

Έστω E, F μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E), \lambda(F) < \infty$.

(α) Δείξτε ότι η $\chi_E * \chi_F$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(β) Δείξτε ότι υπάρχουν $x_0 \in \mathbb{R}^d$ και $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|x - x_0| < \varepsilon$ τότε $\lambda(E \cap (F + x)) > 0$. Δηλαδή, το $E - F$ έχει μη κενό εσωτερικό.

(β) Εφαρμόζοντας την προηγούμενη παρατήρηση για τα $-E, F$, βλέπουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ώστε

$$\lambda(E \cap (F + x_0)) > 0.$$

Θέτουμε $F_1 = F + x_0$. Η συνάρτηση

$$f(x) := (\chi_{-E} * \chi_{F_1})(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{-E}(x - z)\chi_{F_1}(z)\, d\lambda(z) = \lambda((x + E) \cap F_1)$$

είναι συνεχής και

$$f(0) = \lambda(E \cap F_1) = \lambda(E \cap (F + x_0)) > 0.$$

Άρα, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|u| < \varepsilon$ τότε

$$f(u) = \lambda((E + u) \cap (F + x_0)) > 0.$$

Ειδικότερα, για κάθε $|u| < \varepsilon$ έχουμε $E \cap (F + x_0 - u) = -u + (E + u) \cap (F + x_0) \neq \emptyset$, και θέτοντας $x = x_0 - u$ έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ με $|x - x_0| < \varepsilon$ ισχύει $E \cap (F + x) \neq \emptyset$.

Άσκηση 13

Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω $f \in L_p(E)$. Δείξτε ότι

$$\int_E |f|^p \, d\lambda = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) \, d\lambda_1(t).$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Tonelli. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|^p \, d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \chi_E(x) \, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^{|f(x)|} p t^{p-1} \, d\lambda_1(t) \right) \chi_E(x) \, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^\infty p t^{p-1} \chi_{[0,|f(x))}(t) \, d\lambda_1(t) \right) \chi_E(x) \, d\lambda(x) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x) \chi_{[0,|f(x)|)}(t) \, d\lambda(x) \right) p t^{p-1} \, d\lambda_1(t) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\{x \in E : |f(x)| > t\}}(x) \, d\lambda(x) \right) p t^{p-1} \, d\lambda_1(t) \\
&= \int_0^\infty \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) p t^{p-1} \, d\lambda_1(t).
\end{aligned}$$

Άσκηση 21

Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $p \geqslant 1$ και σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $\lambda(\{x \in E : |f(x)| \geqslant t\}) \leqslant \frac{C}{t^p}$ για κάθε $t > 0$. Δείξτε ότι $f \in L_r(E)$ για κάθε $1 \leqslant r < p$.

Έστω $q \leqslant r < p$. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 13 γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|^r \, d\lambda(x) &= \int_0^\infty rt^{r-1}\lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) \, d\lambda(t) \\
&= \int_0^1 rt^{r-1}\lambda(\{|f| > t\}) \, d\lambda(t) + \int_1^\infty rt^{r-1}\lambda(\{|f| > t\}) \, d\lambda(t) \\
&\leqslant \int_0^1 rt^{r-1}\lambda(E) \, d\lambda(t) + \int_1^\infty rt^{r-1}\frac{C}{t^p} \, d\lambda(t) \\
&= \lambda(E)\int_0^1 rt^{r-1} d\lambda(t) + Cr\int_1^\infty t^{r-p-1} \, d\lambda(t) = \lambda(E) + \frac{Cr}{p-r} < \infty,
\end{aligned}$$

διότι

$$\int_1^\infty t^{r-p-1} \, d\lambda(t) = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{M^{r-p}}{r-p} - \frac{1}{r-p}\right) = \frac{1}{p-r},$$

αφού $r - p < 0$.
Έπεται ότι $f \in L_r(E)$.

Άσκηση 29

Έστω $f \in L_1[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $C > 0$ ώστε $\int_A |f| \, d\lambda \leqslant C\sqrt{\lambda(A)}$ για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο $A \subseteq [0,1]$. Δείξτε ότι $f \in L_p[0,1]$ για κάθε $1 \leqslant p < 2$.

Από την υπόθεση και από την ανισότητα Markov, αν $A_t = \{|f| \geqslant t\}$, $t > 0$, έχουμε

$$t\lambda(A_t) \leqslant \int_{A_t} |f| \, d\lambda \leqslant C\sqrt{\lambda(A_t)},$$

δηλαδή $\lambda(A_t) \leqslant C^2/t^2$. Έστω $1 \leqslant p < 2$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f|^p &= \int_0^\infty pt^{p-1}\lambda(\{|f| \geq t\}) \, d\lambda(t) \\ &= \int_0^1 pt^{p-1}\lambda(\{|f| \geq t\}) \, d\lambda(t) + \int_1^\infty pt^{p-1}\lambda(\{|f| \geq t\}) \, d\lambda(t) \\ &\leqslant \int_0^1 pt^{p-1} d\lambda(t) + \int_1^\infty pt^{p-1} + C^2 p \int_1^\infty t^{p-3} d\lambda(t) < \infty \end{aligned}$$

διότι $p - 3 < -1$. Άρα, $f \in L_p([0,1])$.

Άσκηση 22

Έστω $r > 1$ και $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $\|f_n\|_r \leqslant M$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο $(0,1)$. Δείξτε ότι για κάθε $1 \leqslant p < r$ ισχύει $\|f_n - f\|_p \to 0$.

Παρατηρούμε πρώτα ότι, από το λήμμα του Fatou, $\int_0^1 |f|^r \, d\lambda \leqslant \liminf \int_0^1 |f_n|^r \, d\lambda \leqslant M^r$, διότι $\|f\|_r \leqslant M$ για κάθε n. Έπεται ότι

$$\int_0^1 |f_n - f|^r \, d\lambda \leqslant \int_0^1 2^r(|f_n|^r + |f|^r) \, d\lambda \leqslant 2^{r+1} M^r.$$

Έστω $\delta > 0$. Αφού $f_n \to f$ σχεδόν παντού, υπάρχει $E \subseteq (0,1)$ με $\lambda(E) > 1 - \delta$, τέτοιο ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E. Για τυχόν $1 \leqslant p < r$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f_n - f|^p \, d\lambda &= \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \int_{E^c} |f_n - f|^p \, d\lambda \\
&\leqslant \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + [\lambda(E^c)]^{1-\frac{p}{r}} \left(\int_{E^c} |f_n - f|^r \right)^{\frac{p}{r}} \\
&< \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}} \left(\int_0^1 |f_n - f|^r \right)^{\frac{p}{r}} \\
&\leqslant \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}} 2^{r+1} M^r.
\end{aligned}$$

Άσκηση 22

Έστω $r > 1$ και $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $\|f_n\|_r \leqslant M$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο $(0,1)$. Δείξτε ότι για κάθε $1 \leqslant p < r$ ισχύει $\|f_n - f\|_p \to 0$.

Έστω $\delta > 0$. Αφού $f_n \to f$ σχεδόν παντού, υπάρχει $E \subseteq (0,1)$ με $\lambda(E) > 1 - \delta$, τέτοιο ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E. Για τυχόν $1 \leqslant p < r$ γράφουμε

$$\int_0^1 |f_n - f|^p \, d\lambda \leqslant \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}} 2^{r+1} M^r.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ ώστε

$$\delta^{1-\frac{p}{r}} 2^{r+1} M^r < \frac{\varepsilon^p}{2},$$

και μετά $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_n(x) - f(x)|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$ για κάθε $n \geqslant 0$ και για κάθε $x \in E$. Τότε, για κάθε $n \geqslant 0$ έχουμε

$$\int_0^1 |f_n - f|^p \, d\lambda \leqslant \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}} 2^{r+1} M^r < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p,$$

δηλαδή $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$. Άρα, $\|f_n - f\|_p \to 0$.

Άσκηση 25

Έστω $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ισχύει $f \cdot g \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Δείξτε ότι $g \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Υποθέτουμε ότι $g \notin L^\infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\lambda(A_n) > 0$, όπου $A_n = \{x : |g(x)| \geqslant n\}$. Ορίζουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \mathrm{sign}(g(x)) \chi_{A_n}(x).$$

Παρατηρούμε ότι

$$|f(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x),$$

και, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Beppo Levi, ότι

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, d\lambda(x) &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x)\, d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x)\, d\lambda(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty. \end{aligned}$$

Άρα, $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$.

Άσκηση 25

Έστω $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ισχύει $f \cdot g \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Δείξτε ότι $g \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Υποθέτουμε ότι $g \notin L^\infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\lambda(A_n) > 0$, όπου $A_n = \{x : |g(x)| \geqslant n\}$. Ορίζουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \mathrm{sign}(g(x)) \chi_{A_n}(x).$$

Είδαμε ότι $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Όμως,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x)\, d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x) |g(x)|\, d\lambda(x) \\
&\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} n \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x)\, d\lambda(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,
\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

Άσκηση 27

Έστω $1 < p < \infty$ και έστω $f \in L_p[0,\infty)$. Δείξτε ότι

$$\left|\int_0^x f(t)\, d\lambda(t)\right| \leqslant \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x > 0$ και ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{p}}} \int_0^x f(t)\, d\lambda(t) = 0.$$

Έστω q ο συζυγής εκθέτης του p και έστω $x > 0$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder γράφουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f(t)\, d\lambda(t)\right| &\leqslant \int_0^x |f(t)|\, d\lambda(t) = \int_0^\infty |f(t)|\chi_{[0,x]}(t)\, d\lambda(t)\\ &\leqslant \|f\|_p\|\chi_{[0,x]}\|_q = \|f\|_p x^{1/q} = \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την

$$\begin{aligned}\|\chi_{[0,x]}\|_q &= \left(\int_0^\infty \chi_{[0,x]}^q\, d\lambda\right)^{1/q}\\ &= \left(\int_0^\infty \chi_{[0,x]}\, d\lambda\right)^{1/q} = [\lambda([0,x])]^{1/q} = x^{1/q}.\end{aligned}$$

Άσκηση 27

Έστω $1 < p < \infty$ και έστω $f \in L_p[0,\infty)$. Δείξτε ότι

$$\left|\int_0^x f(t)\, d\lambda(t)\right| \leqslant \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x > 0$ και ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{p}}} \int_0^x f(t)\, d\lambda(t) = 0.$$

Για το δεύτερο ερώτημα, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|f\chi_{[\alpha,\infty)}\|_p = \left(\int_\alpha^\infty |f|^p\, d\lambda\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Μπορούμε να βρούμε τέτοιον α, διότι $|f|^p\chi_{[0,\alpha]} \nearrow |f|^p$ καθώς το $\alpha \to \infty$, και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_\alpha^\infty |f|^p\, d\lambda = \lim_{\alpha\to\infty} \left(\int_0^\infty |f|^p\, d\lambda - \int_0^\alpha |f|^p\, d\lambda\right) = 0.$$

Για κάθε $x > \alpha$ μπορούμε να γράψουμε

$$(*) \qquad \frac{1}{x^{1/q}} \left|\int_0^x f(t)\, d\lambda(t)\right| \leqslant \frac{1}{x^{1/q}} \int_0^\alpha |f(t)|\, d\lambda(t) + \frac{1}{x^{1/q}} \int_\alpha^x |f(t)|\, d\lambda(t).$$

Από την επιλογή του α έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^{1/q}}\int_{\alpha}^{x}|f(t)|\,d\lambda(t) &\leqslant \frac{1}{x^{1/q}}\|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p\|\chi_{[\alpha,x]}\|_q\\ &= \frac{(x-\alpha)^{1/q}}{x^{1/q}}\|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p < \|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p\\ &\leqslant \|f\chi_{[\alpha,\infty)}\|_p < \varepsilon\end{aligned}$$

για κάθε $x > \alpha$, άρα η $(*)$ δίνει

$$\frac{1}{x^{1/q}}\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| \leqslant \frac{1}{x^{1/q}}\int_0^{\alpha}|f(t)|\,d\lambda(t) + \varepsilon$$

για κάθε $x > \alpha$. Όμως,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1/q}}\int_0^{\alpha}|f(t)|\,d\lambda(t) = 0,$$

άρα

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1/q}}\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| \leqslant 0+\varepsilon=\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1/q}}\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| = 0,$$

και έπεται το ζητούμενο.

Άσκηση 8

Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) = 1$ και έστω $f \in L_p(E)$ για κάποιον $p \geqslant 1$. Δείξτε ότι

$$\ln \|f\|_p \geqslant \int_E \ln |f| \, d\lambda.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\ln \|f\|_p = \ln \left[\left(\int_E |f|^p \, d\lambda \right)^{1/p} \right] = \frac{1}{p} \ln \left(\int_E |f|^p \, d\lambda \right),$$

οπότε η ζητούμενη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\ln \left(\int_E |f|^p \, d\lambda \right) \geqslant p \int_E \ln |f| \, d\lambda = \int_E p \ln |f| \, d\lambda = \int_E \ln(|f|^p) \, d\lambda.$$

Θέτοντας $g = |f|^p$ έχουμε ότι η g είναι μη αρνητική, $g \in L_1(E)$, και θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\ln \left(\int_E g \, d\lambda \right) \geqslant \int_E \ln g \, d\lambda.$$

Γράφουμε $g = e^h$, όπου $h = \ln g$. Τότε, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\ln \left(\int_E e^h \, d\lambda \right) \geqslant \int_E h \, d\lambda.$$

Γράφουμε $g = e^h$, όπου $h = \ln g$. Τότε, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\ln\left(\int_E e^h \, d\lambda\right) \geqslant \int_E h \, d\lambda.$$

Ορίζουμε $t_0 = \int_E h \, d\lambda$. Υποθέτουμε ότι $t_0 \in \mathbb{R}$ (αν $t_0 = -\infty$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, και $t_0 < \infty$ διότι $h = \ln g \leqslant g - 1$ και η $g - 1$ είναι ολοκληρώσιμη στο E). Η συνάρτηση $u(t) := e^t$ είναι κυρτή, άρα για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$e^t - e^{t_0} = u(t) - u(t_0) \geqslant u'(t)(t - t_0) = e^{t_0}(t - t_0).$$

Δηλαδή,

$$e^{h(x)} - e^{t_0} \geqslant e^{t_0}(h(x) - t_0).$$

Ολοκληρώνοντας στο E και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\lambda(E) = 1$ παίρνουμε

$$\int_E e^{h(x)} \, d\lambda(x) - \int_E e^{t_0} \, d\lambda(x) \geqslant e^{t_0}\left[\int_E h(x) \, d\lambda(x) - \int_E t_0 \, d\lambda(x)\right] = e^{t_0}\left[t_0 - t_0\lambda(E)\right] = 0.$$

Συνεπώς,

$$\int_E e^{h(x)} \, d\lambda(x) \geqslant \int_E e^{t_0} \, d\lambda(x) = e^{t_0},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\ln\left(\int_E e^{h(x)} \, d\lambda(x)\right) \geqslant t_0 = \int_E h \, d\lambda.$$

Άσκηση 33

Έστω $0 < p < 1$. Ορίζουμε τον (αρνητικό αυτή τη φορά) *συζυγή εκθέτη* q του p από τη σχέση $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Αν $f, g : E \to [0, \infty]$ δείξτε ότι

$$\int_E fg\ d\lambda \geqslant \left(\int_E f^p\ d\lambda\right)^{1/p} \left(\int_E g^q\ d\lambda\right)^{1/q}.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder για τις $(fg)^p$ και g^{-p} με εκθέτες $r = \frac{1}{p}$ και $s = \frac{1}{1-p}$, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_E f^p\, d\lambda = \int_E (fg)^p g^{-p}\, d\lambda &\leqslant \left(\int_E fg\, d\lambda\right)^p \left(\int_E (g^{-p})^{\frac{1}{1-p}}\right)^{1-p} \\ &= \left(\int_E fg\, d\lambda\right)^p \left(\int_E g^q\right)^{-\frac{p}{q}},\end{aligned}$$

διότι $-\frac{p}{1-p} = q$ και $1 - p = -\frac{p}{q}$ αφού οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες. Έπεται ότι

$$\left(\int_E fg\, d\lambda\right)^p \geqslant \left(\int_E f^p\, d\lambda\right) \left(\int_E g^q\right)^{\frac{p}{q}},$$

και υψώνοντας στην $1/p$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 33

Έστω $0 < p < 1$. Ορίζουμε τον (αρνητικό αυτή τη φορά) *συζυγή εκθέτη* q του p από τη σχέση $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Αν $f, g : E \to [0, \infty]$ δείξτε ότι

$$\left(\int_E (f+g)^p \, d\lambda\right)^{1/p} \geqslant \left(\int_E f^p \, d\lambda\right)^{1/p} + \left(\int_E g^p \, d\lambda\right)^{1/p}.$$

Για την δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιούμε την ανισότητα, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη γράφουμε $\left(\int_E f^p \, d\lambda\right)^{1/p} \left(\int_E (f+g)^{-(1-p)q} \, d\lambda\right)^{1/q} \leqslant \int_E f(f+g)^{-(1-p)} \, d\lambda$ και $\left(\int_E g^p \, d\lambda\right)^{1/p} \left(\int_E (f+g)^{-(1-p)q} \, d\lambda\right)^{1/q} \leqslant \int_E g(f+g)^{-(1-p)} \, d\lambda$.
Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε
$\left[\left(\int_E f^p \, d\lambda\right)^{1/p} + \left(\int_E g^p \, d\lambda\right)^{1/p}\right] \left(\int_E (f+g)^{-(1-p)q} \, d\lambda\right)^{1/q} \leqslant$
$\int_E (f+g)(f+g)^{-(1-p)} \, d\lambda = \int_E (f+g)^p \, d\lambda$.
Αφού $-(1-p)q = p$, καταλήγουμε στην

$$\left(\int_E f^p \, d\lambda\right)^{1/p} + \left(\int_E g^p \, d\lambda\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_E (f+g)^p \, d\lambda\right)^{1-1/q} = \left(\int_E (f+g)^p \, d\lambda\right)^{1/p}.$$

Άσκηση 34

Δείξτε ότι αν $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, τότε ο $L_q[0,1]$ είναι πρώτης κατηγορίας υποσύνολο του $L_p[0,1]$.

Έχουμε δει ότι $L_q[0,1] \subseteq L_p[0,1]$. Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων $F_n = \{f \in L_p[0,1] : \|f\|_q \leqslant n\}$. Προφανώς ισχύει

$$L_q[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι κάθε F_n είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του $L_p[0,1]$. Παρατηρούμε τα εξής:

(α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το F_n είναι $\|\cdot\|_p-$κλειστό. Πράγματι, αν (f_k) είναι μια ακολουθία στο F_n, δηλαδή $\|f_k\|_q \leqslant n$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και αν $\|f_k - f\|_p \to 0$, τότε μπορούμε να δείξουμε ότι $\|f\|_q \leqslant n$: αφού $f_k \xrightarrow{L_p} f$, από την ανισότητα Markov έχουμε

$$\lambda(|f_k - f| > \varepsilon) \leqslant \varepsilon^{-p}\|f_k - f\|_p^p,$$

άρα $f_k \xrightarrow{\lambda} f$ κατά μέτρο. Άρα, υπάρχει υπακολουθία (f_{k_s}) της (f_k) ώστε $f_{k_s} \to f$ σχεδόν παντού. Έπεται ότι $|f_{k_s}|^q \to |f|^q$ και από το λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int |f|^q \, d\lambda \leqslant \liminf_{s\to\infty} \int |f_{k_s}|^q \, d\lambda \leqslant n^q,$$

διότι $\|f_{k_s}\|_q \leqslant n$. Άρα, $f \in F_n$.

Άσκηση 34

Δείξτε ότι αν $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, τότε ο $L_q[0,1]$ είναι πρώτης κατηγορίας υποσύνολο του $L_p[0,1]$.

Έχουμε δει ότι $L_q[0,1] \subseteq L_p[0,1]$. Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων $F_n = \{f \in L_p[0,1] : \|f\|_q \leqslant n\}$. Προφανώς ισχύει

$$L_q[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι κάθε F_n είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του $L_p[0,1]$. Παρατηρούμε τα εξής:

(β) Το F_n έχει κενό εσωτερικό: για κάθε $f \in F_n$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$B(f,\varepsilon) = \{g \in L_p[0,1] : \|f-g\|_p < \varepsilon\} \nsubseteq F_n.$$

Πράγματι, σταθεροποιούμε $f \in F_n$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\alpha \in (1/q, 1/p)$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$h(t) = \frac{\varepsilon(1-\alpha p)^{1/p}}{2t^{\alpha}},$$

η οποία ανήκει στον $L_p[0,1] \setminus L_q[0,1]$ (ελέγξτε το). Άρα, η συνάρτηση $f+h \in L_p[0,1]$ και μάλιστα $f+h \in B(f,\varepsilon)$ διότι $\|h\|_p = \varepsilon/2$, αλλά $f+h \notin F_n$, αφού $h \notin L_q[0,1]$.