605. Ασκήσεις – Κεφάλαια 5 και 6

Σειρές Fourier

22 Μαΐου 2021

Άσκηση 5.4

Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι: για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)\,d\lambda(x) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\,d\lambda(x) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\,d\lambda(x),$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,d\lambda(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d\lambda(x) = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,d\lambda(x).$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + 2\pi$ παίρνουμε

$$\int_a^b f(x)\,d\lambda(x) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(y-2\pi)\,d\lambda(y) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(y)\,d\lambda(y) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\,d\lambda(x),$$

διότι $f(y-2\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x - 2\pi$ παίρνουμε

$$\int_a^b f(x)\,d\lambda(x) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(y+2\pi)\,d\lambda(y) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(y)\,d\lambda(y) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\,d\lambda(x),$$

διότι $f(y+2\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 5.4

Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι: για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)\, d\lambda(x) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\, d\lambda(x) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\, d\lambda(x),$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\, d\lambda(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\lambda(x) = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\, d\lambda(x).$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + a$ παίρνουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\, d\lambda(x) = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(y)\, d\lambda(y) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, d\lambda(y) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\lambda(x),$$

διότι

$$\int_{-\pi}^{-\pi+a} f(y)\, d\lambda(y) = \int_{\pi}^{\pi+a} f(y)\, d\lambda(y)$$

από την 2π-περιοδικότητα της f, άρα

$$\begin{aligned}\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(y)\, d\lambda(y) &= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(y)\, d\lambda(y) + \int_{\pi}^{\pi+a} f(y)\, d\lambda(y)\\ &= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(y)\, d\lambda(y) + \int_{-\pi}^{-\pi+a} f(y)\, d\lambda(y) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, d\lambda(y).\end{aligned}$$

Άσκηση 5.6

Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η f είναι άρτια, τότε $\widehat{f}(-k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά συνημιτόνων.

(β) Αν η f είναι περιττή, τότε $\widehat{f}(-k) = -\widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά ημιτόνων.

(α) Κάνοντας την αντικατάσταση $y = -x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-y)e^{-iky}d\lambda(y)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}d\lambda(y) = \widehat{f}(k).\end{aligned}$$

(β) Κάνοντας την αντικατάσταση $y = -x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-y)e^{-iky}d\lambda(y)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (-f(y))e^{-iky}d\lambda(y) = -\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

Άσκηση 5.6

Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι:

(γ) Αν $f(x+\pi) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε περιττό ακέραιο k.

(γ) Γράφουμε

$$\begin{aligned} 2\pi\widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{0} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) \\ &= \int_{0}^{\pi} f(y-\pi)e^{-ik(y-\pi)}d\lambda(y) + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) \\ &= e^{ik\pi}\int_{0}^{\pi} f(y)e^{-iky}d\lambda(y) + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) \\ &= -\int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

διότι $f(y-\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ από την υπόθεση, και $e^{ik\pi} = -1$ αν ο k είναι περιττός.

Άσκηση 5.6

Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι:

(δ) Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\hat{f}(k)} = \hat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

(δ) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\overline{\widehat{f}(k)} &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)e^{-ikx}}d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x}d\lambda(x)\\ &= \widehat{f}(-k).\end{aligned}$$

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής και $\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε από την

$$\widehat{\overline{f}}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}e^{-ikx}d\lambda(x) = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}d\lambda(x)} = \overline{\widehat{f}(-k)} = \widehat{f}(k)$$

βλέπουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $g = f - \overline{f}$ έχει συντελεστές Fourier

$$\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{\overline{f}}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{f}(k) = 0,$$

συνεπώς $g \equiv 0$. Έπεται ότι $f = \overline{f}$, άρα $f(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 5.9

Έστω $f, f_n \in L_1(\mathbb{T})$ ($n \in \mathbb{N}$) συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_n(x)|\, d\lambda(x) = 0$. Δείξτε ότι $\widehat{f_n}(k) \to \widehat{f}(k)$ όταν $n \to \infty$, ομοιόμορφα ως προς k. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $|\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| < \varepsilon$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\, d\lambda(x) < \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
|\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) e^{-ikx} d\lambda(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_n(x) - f(x)) e^{-ikx} d\lambda(x) \right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\, |e^{-ikx}|\, d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\, d\lambda(x) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Άσκηση 5.10

Ορίζουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < 2\pi$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, και επεκτείνουμε την f σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f, x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi, \pi]$. Έχουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < \pi$ και $f(x) = f(x + 2\pi) = -\pi - x$ αν $-\pi < x < 0$. Παρατηρήστε ότι

$$f(-x) = -\pi + x = -(\pi - x) = -f(x)$$

για κάθε $0 < x < \pi$, δηλαδή η f είναι περιττή στο $[-\pi, \pi]$. Συνεπώς,

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, d\lambda(x) = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ομοίως, $a_0(f) = 0$.

Άσκηση 5.10

Ορίζουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < 2\pi$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, και επεκτείνουμε την f σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f,x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές $b_k(f)$: αφού η $f(x)\sin kx$ είναι άρτια, έχουμε

$$\begin{aligned} b_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, d\lambda(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin kx\, d\lambda(x) \\ &= \left[-2\frac{(\pi - x)\cos kx}{\pi k}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{k}\, d\lambda(x) \\ &= \frac{2\pi}{\pi k} + \left[\frac{2\sin kx}{\pi k^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$S(f,x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

Άσκηση 5.11

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $S(f, x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Παρατηρήστε ότι $f(0) = f(2\pi)$, άρα η f επεκτείνεται σε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση. Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi, \pi]$. Έχουμε $f(x) = (\pi - x)^2$ αν $0 < x < \pi$ και $f(x) = f(x + 2\pi) = (-\pi - x)^2 = (\pi + x)^2$ αν $-\pi < x < 0$. Παρατηρήστε ότι

$$f(-x) = (\pi - x)^2 = f(x)$$

για κάθε $0 < x < \pi$, δηλαδή η f είναι άρτια στο $[-\pi, \pi]$. Συνεπώς,

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, d\lambda(x) = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Για τον $a_0(f)$ γράφουμε

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - x)^2 d\lambda(x) = \left[\frac{-(\pi - x)^3}{6\pi}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi^3}{6\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Άσκηση 5.11

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $S(f, x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Υπολογίζουμε τους συντελεστές $a_k(f)$, $k \geqslant 1$: αφού η $f(x)\cos kx$ είναι άρτια, έχουμε

$$\begin{aligned}
a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx \, d\lambda(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)^2 \cos kx \, d\lambda(x) \\
&= \left[\frac{2(\pi - x)^2 \sin kx}{\pi k}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{2(\pi - x)\sin kx}{k} \, d\lambda(x) \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin kx}{k} \, d\lambda(x) \\
&= \left[-\frac{4(\pi - x)\cos kx}{\pi k^2}\right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{k^2} \\
&= \frac{4\pi}{\pi k^2} = \frac{4}{k^2}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$S(f, x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Άσκηση 5.11

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $S(f,x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty,$$

η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Δηλαδή,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα,

$$f(0) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Άσκηση 5.12

Έστω $0 < \alpha \leqslant 1$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-περιοδική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε, για κάθε $k \geqslant 1$,

$$|a_k(f)| \leqslant \frac{C}{k^\alpha} \qquad \text{και} \qquad |b_k(f)| \leqslant \frac{C}{k^\alpha}.$$

Έστω $k \in \mathbb{N}$. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + \pi/k$, έχουμε

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} f(x-\pi/k)\cos(kx-\pi)\,d\lambda(x) \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} f(x-\pi/k)\cos(kx)\,d\lambda(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-\pi/k)\cos(kx)\,d\lambda(x), \end{aligned}$$

λόγω της 2π-περιοδικότητας της f. Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x-\pi/k)]\cos(kx)\,d\lambda(x),$$

και χρησιμοποιώντας την υπόθεση παίρνουμε

$$|a_k(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-\pi/k)|\,|\cos(kx)|\,d\lambda(x) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M|\pi/k|^\alpha d\lambda(x) = \frac{C}{k^\alpha},$$

όπου $C = M\pi^\alpha$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $|b_k(f)| \leqslant C/k^\alpha$.

Άσκηση 5.13

Θεωρούμε την περιττή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[0, \pi]$ ορίζεται από την $f(x) = x(\pi - x)$. Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)^3}.$$

Αφού η f είναι περιττή, έχουμε $\widehat{f}(0) = 0$. Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x) = \frac{-i}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(kx)\, d\lambda(x) \\
&= \frac{-i}{\pi} \left[-\frac{\pi x \cos(kx)}{k} + \frac{\pi \sin(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} + \frac{i}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin(kx)\, d\lambda(x) \\
&= i \frac{(-1)^k \pi}{k} - \frac{i}{\pi} \left[\frac{x^2 \cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} + \frac{2i}{\pi k} \int_0^{\pi} x \cos(kx)\, d\lambda(x) \\
&= i \frac{(-1)^k \pi}{k} - i \frac{(-1)^k \pi}{k} + \frac{2i}{\pi k} \left[\frac{x \sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2i[(-1)^k - 1]}{\pi k^3}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 5.13

Θεωρούμε την περιττή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[0, \pi]$ ορίζεται από την $f(x) = x(\pi - x)$. Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)^3}.$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned}
\sum_{k\neq 0} \frac{2i[(-1)^k - 1]}{\pi k^3} e^{ikx} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2i[(-1)^k - 1]}{\pi k^3} e^{ikx} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2i[(-1)^k - 1]}{\pi k^3} e^{-ikx} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2i[(-1)^k - 1]}{\pi k^3} (e^{ikx} - e^{-ikx}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k+1)^3} \sin((2k+1)x),
\end{aligned}$$

διότι $(-1)^k - 1 = 0$ αν ο k είναι άρτιος, και

$$2i[(-1)^k - 1](e^{i(2k+1)x} - e^{-i(2k+1)x}) = -4i(2i \sin((2k+1)x)) = 8 \sin((2k+1)x).$$

Άσκηση 5.14

Έστω $0 < \delta < \pi$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{\delta} & \text{αν } |x| \leqslant \delta \\ 0 & \text{αν } \delta \leqslant |x| \leqslant \pi \end{cases}$ Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f και δείξτε ότι $f(x) = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos k\delta}{k^2\pi\delta} \cos kx$.

Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} \left(1 - \frac{x}{\delta}\right) d\lambda(x) = \frac{\delta}{2\pi}.$$

Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \left(1 - \frac{|x|}{\delta}\right) e^{-ikx} d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \left(1 - \frac{|x|}{\delta}\right) \cos(kx)\, d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} \left(1 - \frac{x}{\delta}\right) \cos(kx)\, d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k} - \frac{x\sin(kx)}{\delta k} - \frac{\cos(kx)}{\delta k^2}\right]_0^{\delta} \\
&= \frac{\sin(k\delta)}{\pi k} - \frac{\delta\sin(k\delta)}{\pi\delta k} + \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2} = \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 5.14

Έστω $0 < \delta < \pi$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με
$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{\delta} & \text{αν } |x| \leqslant \delta \\ 0 & \text{αν } \delta \leqslant |x| \leqslant \pi \end{cases}$ Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f και
δείξτε ότι $f(x) = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos k\delta}{k^2\pi\delta} \cos kx$.

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f,x) = \frac{\delta}{2\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2} e^{ikx} = \frac{\delta}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}(e^{ikx} + e^{-ikx})$$

$$= \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2} \cos(kx).$$

Αφού

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2} < +\infty,$$

έχουμε $f(x) = S(f,x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 5.15

Θεωρούμε την 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[-\pi, \pi]$ ορίζεται από την $f(x) = |x|$. Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \pi/2$ και $\widehat{f}(k) = \frac{-1+(-1)^k}{\pi k^2}, \qquad k \neq 0$. Γράψτε τη σειρά Fourier $S(f)$ της f σαν σειρά συνημιτόνων και ημιτόνων. Θέτοντας $x = 0$ δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, d\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x d\lambda(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-ikx} d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx) \, d\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos(kx) \, d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 5.15

Θεωρούμε την 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[-\pi, \pi]$ ορίζεται από την $f(x) = |x|$. Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \pi/2$ και $\widehat{f}(k) = \frac{-1+(-1)^k}{\pi k^2}, \qquad k \neq 0$. Γράψτε τη σειρά Fourier $S(f)$ της f σαν σειρά συνημιτόνων και ημιτόνων. Θέτοντας $x = 0$ δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} + \sum_{k\neq 0} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} e^{ikx} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \\
&= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^k - 1]}{\pi k^2} \cos(kx) \\
&= \frac{\pi}{2} - 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)x).
\end{aligned}$$

Άσκηση 5.15

Θεωρούμε την 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[-\pi, \pi]$ ορίζεται από την $f(x) = |x|$. Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \pi/2$ και $\widehat{f}(k) = \frac{-1+(-1)^k}{\pi k^2}, \qquad k \neq 0$. Γράψτε τη σειρά Fourier $S(f)$ της f σαν σειρά συνημιτόνων και ημιτόνων. Θέτοντας $x = 0$ δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Αφού $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)^2} < +\infty$, έχουμε $f(x) = S(f,x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα,

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(2k+1)^2},$$

δηλαδή $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Τότε,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{3}\,\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Άσκηση 5.16

Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, d\lambda(x) = -\int_0^{2\pi} f\big(x + \frac{\pi}{n}\big) \sin nx \, d\lambda(x).$$

και συμπεράνατε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, d\lambda(x) = 0.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $x = y + \pi/n$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, d\lambda(x) &= \int_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} f\left(y + \frac{\pi}{n}\right) \sin(\pi + ny) \, d\lambda(y) \\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \sin(nx) \, d\lambda(x). \end{aligned}$$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε:

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, d\lambda(x) \right| \leqslant \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \right| \, d\lambda(x).$$

Τώρα, το συμπέρασμα έπεται από γνωστή πρόταση, διότι $t = \pi/n \to 0$.

Άσκηση 5.17

Θεωρώντας την περιττή επέκταση της $\cos x$ από το $(0,\pi)$ στο $(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$ δείξτε ότι

$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin(2kx)}{4k^2-1} \;\text{ για κάθε }\; 0<x<\pi.$$

Επεκτείνουμε την $f:[\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0<x\pi\\ 0, & x=-\pi,0,\pi\\ -\cos x, & -\pi<x<0\end{cases}$ σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση σ' όλο το $\mathbb{R}$. Επομένως, είναι $a_k(f)=0$, αφού f περιττή και

$$\begin{aligned} b_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,d\lambda(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin kx\,d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(k-1)x+\sin(k+1)x]\,d\lambda(x). \end{aligned}$$

Αν ο k είναι περιττός, τότε βλέπουμε εύκολα ότι $b_k=0$ ενώ αν ο $k=2s$ τότε $b_{2s}(f)=\frac{8}{\pi}\frac{s}{4s^2-1}$. Συμπεραίνουμε ότι $S(f,x)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin(2kx)}{4k^2-1}$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$, έπεται ότι αν $0<x<\pi$ τότε

$$\cos x = S(f,x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin(2kx)}{4k^2-1}.$$

Άσκηση 5.25

Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ και $g \in L_\infty(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)\, d\lambda(x) = \widehat{f}(0)\widehat{g}(0).$$

Αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο στην περίπτωση που η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Τότε, ολοκληρώνουμε την απόδειξη ως εξής: αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\varepsilon > 0$, βρίσκουμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p_ε τέτοιο ώστε $\|f - p_\varepsilon\|_1 \leqslant \varepsilon$ και γράφουμε

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)d\lambda(x) - \widehat{f}(0)\widehat{g}(0)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x) - p_\varepsilon(x)|\,|g(x)|\,d\lambda(x) \\
&+ \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} p_\varepsilon(x)g(nx)d\lambda(x) - \widehat{p_\varepsilon}(0)\widehat{g}(0)\right| + |\widehat{p_\varepsilon}(0) - \widehat{f}(0)|\,\|\widehat{g}(0)| \\
&\leqslant \|f - p_\varepsilon\|_1\|g\|_\infty + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} p_\varepsilon(x)g(nx)d\lambda(x) - \widehat{p_\varepsilon}(0)\widehat{g}(0)\right| + \|p_\varepsilon - f\|_1|\widehat{g}(0)| \\
&\leqslant \varepsilon(\|g\|_\infty + |\widehat{g}(0)|) + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} p_\varepsilon(x)g(nx)d\lambda(x) - \widehat{p_\varepsilon}(0)\widehat{g}(0)\right|.
\end{aligned}$$

Άσκηση 5.25

Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ και $g \in L_\infty(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)\, d\lambda(x) = \widehat{f}(0)\widehat{g}(0).$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)d\lambda(x) - \widehat{f}(0)\widehat{g}(0) \right| \leqslant \varepsilon(\|g\|_\infty + |\widehat{g}(0)|).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)d\lambda(x) - \widehat{f}(0)\widehat{g}(0) \right| = 0.$$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, και λόγω γραμμικότητας του ζητούμενου ως προς f μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(x) = e^{ikx}$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$. Αν $k = 0$ είναι φανερό ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(nx)d\lambda(x) &= \frac{1}{n}\frac{1}{2\pi} \int_{-n\pi}^{n\pi} g(y)d\lambda(y) = \frac{1}{n} \cdot n\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(y)d\lambda(y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(y)d\lambda(y) = \widehat{g}(0)\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, λόγω της περιοδικότητας της g.

Άσκηση 5.25

Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ και $g \in L_\infty(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)\, d\lambda(x) = \widehat{f}(0)\widehat{g}(0).$$

Μένει να δείξουμε ότι, για κάθε $k \neq 0$,

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{ikx} g(nx) d\lambda(x) = 0.$$

Παρόμοιο επιχείρημα με το αρχικό δείχνει ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι η g είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Σε αυτήν την περίπτωση ελέγχουμε την $(*)$ με απλές πράξεις.

Άσκηση 6.5

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2})$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Θεωρούμε την $g(x) = f\left(\frac{x}{2\pi}\right)$. Από την υπόθεση έχουμε ότι η g είναι 2π-περιοδική, και $g(x) = g(x + 2\sqrt{2}\pi)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}\,d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+2\sqrt{2}\pi}^{\pi+2\sqrt{2}\pi} g(x-2\sqrt{2}\pi)e^{-ik(x-2\sqrt{2}\pi)}\,d\lambda(x) \\
&= e^{ik2\sqrt{2}\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+2\sqrt{2}\pi}^{\pi+2\sqrt{2}\pi} g(x)e^{-ikx}\,d\lambda(x) = e^{ik2\sqrt{2}\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}\,d\lambda(x) \\
&= e^{ik2\sqrt{2}\pi}\widehat{g}(k).
\end{aligned}$$

Αν $k \neq 0$ έχουμε $e^{ik2\sqrt{2}\pi} \neq 1$, άρα $\widehat{g}(k) = 0$. Έπεται ότι $g(x) = \widehat{g}(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η g είναι σταθερή. Άρα, και η f είναι σταθερή.

Άσκηση 6.2

Έστω $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$(s_n(f)) * g = s_n(f * g) = f * (s_n(g)).$$

Θυμηθείτε ότι $s_n(f) = (f * D_n)$ και ότι η πράξη $*$ της συνέλιξης είναι προσεταιριστική και μεταθετική:

$$s_n(f) * g = (f * D_n) * g = f * (D_n * g) = f * (g * D_n) = f * s_n(g).$$

Όμοια δείχνουμε και την άλλη ισότητα.

Άσκηση 6.3

Έστω $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ μια οικογένεια καλών πυρήνων. Δείξτε ότι: για κάθε $p>1$,

$$\lim_{\delta\to 0}\|K_\delta\|_p = \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_\delta(x)|^p d\lambda(x)\right)^{1/p} = +\infty.$$

Έστω $p>1$ και q ο συζυγής εκθέτης του, δηλαδή $1/p+1/q=1$. Για κάθε $0<\eta<\pi$ θεωρούμε τη συνάρτηση $g_\eta = \chi_{[-\eta,\eta]}$. Από την ανισότητα Hölder παίρνουμε

$$(\eta/\pi)^{1/q}\|K_\delta\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_\eta(t)|^q\, d\lambda(t)\right)^{1/q}\|K_\delta\|_p \geqslant \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_\delta(x)g_\eta(x)\, d\lambda(x)\right|.$$

Από την άλλη πλευρά, από τις ιδιότητες των καλών πυρήνων παίρνουμε

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_\delta(x)g_\eta(x)\, d\lambda(x)\right| = \left|1-\frac{1}{2\pi}\int_{\eta<|x|\leqslant\pi}K_\delta(x)\, d\lambda(x)\right|.$$

Έστω $M>0$. Υπάρχει $\eta\in(0,\pi)$ ώστε $(\pi/\eta)^{1/q}>2M$. Επιπλέον, υπάρχει $\delta_0>0$ ώστε αν $0<\delta<\delta_0$ τότε $\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\eta<|x|\leqslant\pi}K_\delta(x)\, d\lambda(x)\right|<1/2$. Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω βλέπουμε ότι αν $0<\delta<\delta_0$ τότε

$$\|K_\delta\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_\delta(x)|^p\, d\lambda(x)\right)^{1/p} > M,$$

το οποίο δείχνει ότι $\|K_\delta\|_p\to+\infty$ καθώς $\delta\to 0$.

Άσκηση 6.7

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $Q_n(t) = \alpha_n \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n$, όπου η θετική σταθερά α_n επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\, d\lambda(t) = 1.$$

Δείξτε ότι: αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε $f * Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$.

Δείχνουμε ότι η $\{Q_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Από τον ορισμό της, κάθε Q_n είναι άρτια, μη αρνητική συνάρτηση και ικανοποιεί την $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t) d\lambda(t) = 1$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι, για κάθε $0 < \delta < \pi$,

$$\int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} Q_n(t) d\lambda(t) = 2\int_{\delta}^{\pi} Q_n(t) d\lambda(t) \to 0 \quad \text{όταν } n \to \infty.$$

Έστω $0 < \delta < \pi$. Παρατηρούμε ότι $\frac{1+\cos t}{2} \leqslant \frac{1+\cos \delta}{2} < 1$ για κάθε $t \in [\delta, \pi]$. Συνεπώς,

$$\int_{\delta}^{\pi} Q_n(t) d\lambda(t) \leqslant 2\pi\alpha_n \left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^n.$$

Θα δείξουμε ότι $\alpha_n \leqslant 4(n+1)$, οπότε το ζητούμενο έπεται από την $\lim_{n\to\infty}(n+1)\theta^n = 0$ για $\theta = \frac{1+\cos\delta}{2} < 1$.

Άσκηση 6.7

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $Q_n(t) = \alpha_n \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n$, όπου η θετική σταθερά α_n επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\, d\lambda(t) = 1.$$

Δείξτε ότι: αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε $f * Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$.

Γράφουμε

$$\frac{2\pi}{\alpha_n} = 2\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n = 2\int_0^{\pi}\cos^{2n}(t/2)d\lambda(t) = 4\int_0^{\pi/2}\cos^{2n} y\, d\lambda(y).$$

Η $f(y) = \cos y$ είναι κοίλη στο $[0, \pi/2]$ και $f(0) = 1$, $f(\pi/2) = 0$. Συνεπώς, $\cos y \geqslant 1 - \frac{2y}{\pi}$ για κάθε $y \in [0, \pi/2]$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\frac{2\pi}{\alpha_n} \geqslant 4\int_0^{\pi/2}\left(1 - \frac{2y}{\pi}\right)^{2n} d\lambda(y) = 2\pi\int_0^1 (1-s)^{2n} ds = \frac{4\pi}{2n+1}.$$

Δηλαδή, $\alpha_n \leqslant \frac{2n+1}{2}$.

Αφού η $\{Q_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων, για κάθε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ισχύει $f * Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$. Τέλος, παρατηρούμε ότι κάθε Q_n είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Άρα, οι συναρτήσεις $f * Q_n$ είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα (εξηγήστε γιατί). Έτσι, έχουμε απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

Άσκηση 6.10

Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι ο τελεστής $T : L_1(\mathbb{T}) \to L_1(\mathbb{T})$ που ορίζεται μέσω της $T(g) = f * g$ έχει νόρμα

$$\|T\| := \sup\{\|T(g)\|_1 : \|g\|_1 \leqslant 1\} = \|f\|_1.$$

Για κάθε $g \in L^1(\mathbb{T})$ έχουμε

$$\|T(g)\|_1 = \|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1,$$

άρα ο T είναι φραγμένος τελεστής και $\|T\| \leqslant \|f\|_1$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\|F_n\|_1 = 1$, άρα

$$\|T\| \geqslant \|T(F_n)\|_1 = \|F_n * f\|_1 = \|\sigma_n(f)\|_1.$$

Αφού $\|\sigma_n(f) - f\|_1 \to 0$, έχουμε $\|\sigma_n(f)\|_1 \to \|f\|_1$. Συνεπώς,

$$\|T\| \geqslant \lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f)\|_1 = \|f\|_1.$$