Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout.

Par

A. Kolmogoroff (Moscou).

Le but de cette Note est de donner *un exemple d'une fonction sommable*[1]) *dont la série de Fourier diverge presque partout* (c'est-à-dire: partout sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle).

La fonction construite dans cette note est à carré non sommable et je ne sais rien sur l'ordre de grandeur des coefficients de sa série de Fourier. Les méthodes employées ici ne permettent pas de construire une série de Fourier divergente partout.

I. Je vais démontrer plus loin l'existence d'une suite de fonctions: $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x) \ldots$ définies pour $0 \leqq x \leqq 2\pi$ et jouissant de propiétés suivantes:

1° $$\varphi_n(x) \geqq 0; \int_0^{2\pi} \varphi_n(x)dx = 2 \qquad (n = 1, 2 \ldots)$$

2° Les sommes partielles de la série de Fourier de $\varphi_n(x)$ sont bornées.

3° A chaque fonction $\varphi_n(x)$ on peut faire correspondre une quantité positive M_n, un ensemble E_n et un nombre entier q_n, tels que:

3ª $$\lim_{n=\infty} M_n = +\infty$$

3ᵇ $$\lim_{n=\infty} \text{mes}\, E_n = 2\pi$$

3ᶜ pour chaque point de l'ensemble E_n il existe une somme partielle de la série de Fourier de $\varphi_n(x)$ avec l'indice au plus égal à q_n plus grande en valeur absolue que M_n.

[1]) c'est-à-dire: intégrable au sens de M. Lebesgue.

Les fonctions $\varphi_n(x)$ étant supposées construites, il est aisé de former une suite d'entiers croissants $n_1, n_2 \ldots n_k \ldots$ tels que l'on ait:

A) $\frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \leqq \frac{1}{2^k}$, et par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \leqq 1.$$

B) La quantité $\frac{1}{2}\sqrt{M_{n_k}}$ est plus grande en valeur absolue que le maximum des sommes partielles des séries de Fourier de $k-1$ fonctions:

$$\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots \varphi_{n_{k-1}}.$$

C) $q_{n_i} \leqq \frac{1}{2^k}\sqrt{M_{n_k}}$ pour tous les $i < k$.

Si les n_i sont connus pour toutes les valeurs de i plus petites que k, on peut déterminer n_k en l'assujetissant à faire vérifier les inégalités A), B), C).

Posons maintenant

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \varphi_{n_k}(x).$$

En vertu de 1^0 et A) cette série converge [1]) presque partout vers une fonction sommable et les coefficients de la série de Fourier de $\Phi(x)$ sont égaux aux sommes des coefficients de Fourier des fonctions:

$$\frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \varphi_{n_k}(x). \qquad (k=1, 2, 3 \ldots)$$

Considérons la somme partielle de la série de Fourier $\Phi(x)$, qui est plus grande que M_{n_k}, pour $\varphi_{n_k}(x)$, en un point de l'ensemble E_{n_k}, en vertu de 3^0.

a) Pour le terme de la série $\varphi_{n_k}(x) : \sqrt{M_{n_k}}$ elle est plus grande que $\sqrt{M_{n_k}}$.

b) Pour la somme de tous les termes, avec l'indice de plus petit que k, d'après la condition B, elle est moindre que $\frac{1}{2}\sqrt{M_{n_k}}$.

c) Pour le terme avec l'indice $s > k$ elle est plus petite que $\frac{6}{2^s}$.

[1]) Cf. par ex. ce volume page 211, th. de M. Fubini.

En effet, la somme partielle à l'indice au plus égal à $q_{n_k} \leqq \frac{1}{2^s}\sqrt{M_{n_k}}$.

(en vertu de C),

est moindre que $2q_{n_k}+1$ multiplié par l'intégrale de la valeur absolue de la fonction, qui dans ce cas doit être égale à $2:\sqrt{M_{n_k}}$.

De a), b), c) il résulte que la somme considérée de $\Phi(x)$ est plus grande en valeur absolue que

$$\frac{1}{2}\sqrt{M_{n_k}} - \frac{6}{2^k}.$$

D'où nous tirons la conclusion que la série de Fourier $\Phi(x)$ est divergente en tout point de l'ensemble $E = \overline{\lim}\, E_{n_k}$, mes $E = 2\pi$.

II. Construction de la fonction $\varphi_n(x)$.

Soit

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

une suite finie d'entiers impairs croissants, telle que les conditons données plus tard soient remplies.

Déterminons la suite $m_1, m_2, \ldots m_n$

(1) $$m_1 = n, \quad 2m_k + 1 = \lambda_k(2n+1).$$

Posons

(2) $$A_k = k\frac{4\pi}{2n+1}, \qquad 1 \leqq k \leqq n$$

$$A_n = 2\pi - \frac{2\pi}{2n+1}.$$

Posons, enfin, $\varphi_n(x) = \frac{m_k^2}{n}$ dans le segment Δ_k:

(3) $$A_k - \frac{1}{m_k^2}, \quad A_k + \frac{1}{m_k^2}.$$

Pour chaque point n'appartenant pas aux segments Δ_k, nous posons $\varphi_k(x) = 0$.

Il est evident que

$$\varphi_n(x) \geqq 0, \quad \int_0^{2\pi} \varphi_n(x)\,dx = 2 \qquad \text{(Condition 1°)}$$

$\varphi_n(x)$ étant à variation bornée, la condition 2° est aussi remplie.

Considérons la somme partielle de la série de Fourier $\varphi_n(x)$, avec l'indice m_k:

$$(4) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_n(\alpha)\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(\alpha-x)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}d\alpha.$$

Supposons le point x situé dans le segment σ_k:

$$(5) \qquad A_{k-1}+\frac{2}{n^2},\quad A_k-\frac{2}{n^2}.$$

Quand les λ_i, pour les $i<k$, sont déterminés, et, par conséquent la fonction $\varphi_n(x)$ est determinée dans les segments Δ_i, on peut prendre λ_k assez grand, pour que l'intégrale (4), étendue à tous les segments $\Delta_i (i<k)$ soit pour chaque point appartenant à σ_k, aussi petite que l'on veut. Je suppose qu'elle est plus petite que 1 en valeur absolue.

Considérons maintenant l'intégrale (4) étendue à un segment Δ_s, $s\geqq k$,

$$\frac{1}{\pi}\int_{\Delta_s}\frac{m_s^2}{n}\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(\alpha-x)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}d\alpha=\frac{1}{\pi}\int_{\Delta_s}\frac{m_s^2}{n}\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_s-x)}{\sin\frac{1}{2}(A_s-x)}d\alpha+$$

$$(6) \qquad +\frac{1}{\pi}\int_{\Delta_s}\frac{m_s^2}{n}\left[\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(\alpha-x)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}-\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_s-x)}{\sin\frac{1}{2}(A_s-x)}\right]d\alpha.$$

En tenant compte que $|\alpha-A_s|\leqq\frac{1}{m_s^2}$, on peut voir que la différence entre les crochets est moindre que

$$\frac{1}{m_s^2}\operatorname{Max}\left|\frac{d}{d\alpha}\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\right|<\frac{4m_k^2}{m_s^2}\leqq 4.$$

Et, comme la longueur Δ_s est égale à $\frac{2}{m_s^2}$, le second membre (6) est plus petit que $\frac{4}{n}$. Ayant une constante sous la première intégrale, nous avons l'expression (6) égale à

$$(7) \qquad \frac{2}{\pi n}\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_s-x)}{\sin\frac{1}{2}(A_s-x)}+\frac{\tau}{n},\quad |\tau|\leqq 4.$$

La somme des termes avec τ pour $s = k, k+1, \dots n$ est plus petite en valeur absolue que 4. En remarquant que:

$$\frac{2m_k+1}{2}(A_s - A_k) = (s-k)\lambda_k 2\pi,$$

$$\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_s - x) = \sin\frac{2m_k+1}{2}(A_k - x)$$

$$A_s - x < A_s - A_{k-1} = (s-k+1)\frac{4\pi}{2n+1} < (s-k+1)\frac{2\pi}{n},$$

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(A_s - x)} > \frac{n}{\pi(s-k+1)},$$

nous voyons que la somme des premiers membres de (7) pour $s = k, k+1, \dots n$ est égale en valuer absolue à

$$(8) \qquad \frac{1}{\pi n}\left|\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_k - x)\right|\sum_{s=k}^{s=n}\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(A_s - x)} >$$

$$> \frac{1}{\pi^2}\left|\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_s - x)\right|\sum_{r=1}^{r=n-k}\frac{1}{r}.$$

Ainsi pour chaque point x de σ_k l'intégrale (4) est plus grande que

$$\frac{1}{\pi^2}\left|\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_k - x)\right|\sum_{r=1}^{r=n-k}\frac{1}{r} - 5$$

en valeur absolue.

Soit E_n l'ensemble de tous les points x, situés dans les segments σ_k, avec $n-k > \sqrt{n}$, tels que la condition suivante est remplie:

$$\frac{1}{\pi^2}\left|\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_k - x)\right| > \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{r=1}^{r=E(\sqrt{n})}\frac{1}{r}}} = \frac{1}{N_n}$$

On peut voir que pour chaque point de E_n, situé dans σ_k, la somme partielle de la série de Fourier $\varphi_n(x)$, avec l'indice m_k, est plus grande que $N_n - 5 = M_n$.

On peut démontrer sans peine que $\lim \operatorname{Mes} E_n = 2\pi$.

Moscou 2. VI. 1922.