

# SUR LES POLYNÔMES A COEFFICIENTS UNIMODULAIRES

JEAN-PIERRE KAHANE

## Introduction

Ce travail fait suite à ceux de T. Körner [5], J. Byrnes [3], E. Beller et D. J. Newman [1] [2] et naturellement J. E. Littlewood [6]. Il emprunte une idée essentielle à Körner (nos lemmes 1 et 2) et, pour le reste, consiste en calculs élémentaires d'analyse de Fourier. Le théorème suivant répond à plusieurs questions posées dans la littérature (problème 19 de Littlewood dans [7], déjà traité par Körner; problème 22 de P. Erdős dans [4]). Le thème est exprimé ainsi par E. Beller [1]: "How close can we get to a situation where  $P(z)$  is a polynomial of degree  $n > 0$  which, on one hand, has coefficients of constant modulus, and on the other hand  $|P(z)|$  is constant for  $|z| = 1$ ?"

THEOREME. *Il existe une suite de polynômes*

$$P_n(z) = \sum_{m=1}^n a_{m,n} z^m \quad (|a_{m,n}| = 1; n = 1, 2, \dots; m = 1, \dots, n) \quad (1)$$

*et une suite  $\varepsilon_n$  positive tendant vers 0 telles que pour tout  $z$  de module 1 on ait*

$$(1 - \varepsilon_n)\sqrt{n} \leq |P_n(z)| \leq (1 + \varepsilon_n)\sqrt{n}. \quad (2)$$

Indiquons les meilleurs résultats précédemment connus.

*Il existe une suite de polynômes  $P_n(z)$  de la forme (1) et deux constantes  $A$  et  $B$  strictement positives telles que pour  $|z| = 1$  on ait*

$$A\sqrt{n} \leq |P_n(z)| \leq B\sqrt{n} \quad (\text{Körner 1979}).$$

C'est l'exposé de T. Körner à Orsay sur ce résultat qui est à l'origine de notre travail.

*Il existe une suite de polynômes  $P_n(z)$  de la forme (1) et une suite  $\varepsilon_n$  positive tendant vers 0 telles que l'on ait (2) pour  $|z| = 1$  et  $|z - 1| \geq \varepsilon_n$  (Littlewood 1962, Brynes 1977).*

*Il existe une suite de polynômes  $P_n(z)$  de la forme (1) tels que pour  $|z| = 1$  on ait*

$$|P_n(z)| \leq 1,1717\sqrt{n} \quad (\text{Beller 1971}).$$

---

Received 1 October, 1979.

Il existe une suite de polynômes  $P_n(z) = \sum_{m=1}^n a_{m,n} z^m$  tels que

$$\sum_{m=1}^n |a_{m,n}| > (\sqrt{n} - 3n^{3/10} \log n) \sup_{|z|=1} |P_n(z)| \quad (\text{Beller et Newman 1971}).$$

Il existe deux suites  $r_m$  et  $r'_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) à valeurs  $\pm 1$  telles que si l'on pose

$$P_n(z) = \sum_{m=1}^n r_m z^m, \quad Q_n(z) = \sum_{m=1}^n r'_m z^m$$

on ait

$$|P_n(z)|^2 + |Q_n(z)|^2 = 2n = 2^{j+1}$$

des que  $n$  est une puissance de 2, soit  $n = 2^j$ , et  $|z| = 1$  (Shapiro 1951, Rudin 1959).

Ce dernier résultat est remarquablement précis pour les couples de polynômes à coefficients unimodulaires, et on ne peut espérer l'analogue pour les polynômes eux-mêmes. Si  $P_n(z)$  est de la forme (1),  $|P_n(z)|$  ne peut être constant sur le cercle  $|z| = 1$ . En effet,

$$|P_n(z)|^2 = \sum_{-n+1}^{n-1} b_m z^m$$

avec  $|b_{-n-1}| = 1$ , donc  $|P_n(z)|^2$  n'est pas constante. Plus précisément, on a  $b_0 = n$  et

$$\sup_{|z| \geq 1} ||P_n(z)|^2 - b_0| \geq 1.$$

Cela montre que dans (2) on a nécessairement  $\varepsilon_n \geq \frac{1}{3n}$ .

Les ingrédients principaux pour la démonstration du théorème sont les lemmes 1, 2, 3. L'idée des lemmes 1 et 2 pour ce problème est due à T. Körner, et nous renvoyons à [5] pour leur démonstration. Le lemme 2 est une conséquence simple du lemme 1. Le lemme 1 a également pour conséquence le lemme 7. La démonstration du théorème repose sur les lemmes 3 et 6 (le lemme 6 est une simple transcription du lemme 3), les lemmes 2 et 7, et le lemme 5 qui est classique. A l'aide de ces indications, le lecteur peut s'exercer à retrouver la démonstration, qui est résumée dans la dernière partie.

L'exposé que nous ferons n'est pas le plus rapide. Après l'exposé des lemmes 1, 2, 3, nous en donnerons des applications de plus en plus élaborées, jusqu'à la proposition 4 qui contient le théorème et précise l'ordre de grandeur de  $\varepsilon_n$  le meilleur

que nous sachions atteindre. Les propositions 1, 2, 3 sont de moindre intérêt. La proposition 5 est une généralisation du théorème. C'est à peu près dans cet ordre qu'elles me sont apparues. Je remercie MM. Byrnes, Erdős et Newman de s'être intéressés à ce travail au stade de la proposition 2, et de m'avoir ainsi incité à le rédiger et à le poursuivre.

Les Lemmes 1, 2, 3.

LEMME 1. Soit  $X_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) une suite de variables aléatoires complexes indépendantes, d'espérance nulle et de module inférieur ou égal à 1:  $E(X_n) = 0, |X_n| \leq 1$ . On considère le polynôme trigonométrique aléatoire

$$R(x) = \sum_1^N X_n \exp(2\pi i n x).$$

Pour tout  $\lambda > 0$ , on a

$$\Pr [ \|R\|_\infty \geq \lambda \sqrt{N \log N} ] \leq 4\pi N^{2-\lambda^2/32}.$$

LEMME 2. Etant donné un polynôme trigonométrique

$$\sigma(x) = \sum_{n=\kappa+1}^{\kappa+N} \hat{\sigma}_n \exp(2\pi i n x), \quad 0 \leq \alpha \leq |\hat{\sigma}_n| \leq \beta,$$

il existe un polynôme trigonométrique

$$\rho(x) = \sum_{n=\kappa+1}^{\kappa+N} \hat{\rho}_n \exp(2\pi i n x)$$

tel que  $|\hat{\sigma}_n + \hat{\rho}_n| = \beta$  pour tout  $n$  ( $\kappa \leq n \leq \kappa + N$ ), et

$$\|\rho\|_\infty \leq 10\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \sqrt{N \log N}.$$

Les lemmes 1 et 2 sont des variantes du lemme 2 de Körner [5]. Le lemme 2 se démontre en choisissant  $\hat{\rho}_n = \pm \gamma_n$  convenable.

Avant d'énoncer le lemme 3, précisons quelques notations, et développons quelques calculs. Quand  $f \in L^1(\mathbb{R})$  on pose

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-2\pi i x y) f(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}).$$

La transformation de Fourier  $\mathcal{F} : f \rightarrow \hat{f}$  se prolonge aux distributions tempérées sur  $\mathbb{R}$ . La formule

$$\mathcal{F} : f(x) = \exp(-\pi s^2 x^2) \rightarrow \hat{f}(x) = \frac{1}{s} \exp(-\pi^2 x^2 / s^2),$$

valable au premier sens pour  $s$  complexe avec  $|\arg s| < \frac{\pi}{4}$ , se prolonge au second sens

pour  $|\arg s| \leq \frac{\pi}{4}$ . On a donc, pour  $a > 0$ ,

$$\mathcal{F} : \exp(-\pi i a x^2) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \exp(-\pi i/4) \exp(\pi i x^2/a)$$

$$\mathcal{F} : \exp(\pi i a x^2) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \exp(\pi i/4) \exp(-\pi i x^2/a).$$

Si  $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$  et  $a > 0$ , la convolution  $Q = \exp(\pi i a x^2) * \Phi$  a pour transformée de Fourier

$$\hat{Q}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp(\pi i/4) \exp(-\pi i x^2/a) \hat{\Phi}(x).$$

D'autre part

$$\begin{aligned} Q(x) &= \int \exp(\pi i a(x-y)^2) \Phi(y) dy \\ &= \exp(\pi i a x^2) \int \exp(-2\pi i a x y) \exp(\pi i a y^2) \Phi(y) dy \\ &= \exp(\pi i a x^2) (\hat{\Phi}(a x) + \hat{\Psi}(a x)) \end{aligned}$$

en posant  $\Psi(x) = (\exp(\pi i a x^2) - 1) \Phi(x)$ .

Soit maintenant  $a$  un entier positif pair. Voici quelques calculs formels, faciles à justifier sous les hypothèses qui suivront. La convolution

$$q = Q * \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta_m$$

est 1-périodique, donc développable en série de Fourier

$$q = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{q}_n \exp(2\pi i n x), \quad \hat{q}_n = \hat{Q}(n).$$

En utilisant les formules ci-dessus concernant  $Q$ , on a

$$\begin{aligned} q(x) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i a(x-m)^2) \hat{\Phi}(a(x-m)) + r(x), \\ r(x) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i a(x-m)^2) \hat{\Psi}(a(x-m)) \\ &= \exp(\pi i a x^2) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int \exp(-2\pi i a m x) \exp(-2\pi i a(x-m)y) \Psi(y) dy \end{aligned}$$

compte tenu de l'hypothèse que  $a$  est un entier pair, soit

$$r(x) = \exp(\pi i a x^2) \int \Psi(y) \exp(-2\pi i a x y) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(-2\pi i m a(x-y)) dy$$

et, en utilisant la formule de Poisson,

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{1}{a} \exp(\pi i a x^2) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Psi\left(x + \frac{n}{a}\right) \exp\left(-2\pi i a x\left(x + \frac{n}{a}\right)\right) \\ &= \frac{1}{a} \exp(-\pi i a x^2) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Psi\left(x + \frac{n}{a}\right) \exp(-2\pi i n x). \end{aligned}$$

Ajoutons l'hypothèse

$$\hat{\Phi}(x) = 0 \quad \text{pour } |x| \geq \frac{a}{2}.$$

Alors la somme qui définit  $q(x)$  se réduit à un terme, et on a

$$q(x) = \exp(\pi i a x^2) \hat{\Phi}(ax) + r(x) \quad \text{pour } |x| \leq \frac{1}{2}$$

$$|r(x)| \leq \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \Psi\left(x + \frac{n}{a}\right) \right|.$$

La condition sur  $\hat{\Phi}$  est satisfaite si l'on choisit

$$\Phi(x) = \frac{\sin \pi m x}{\pi x} \left( \frac{\sin \pi l x}{\pi l x} \right)^3, \quad m + 3l \leq a,$$

ou plus généralement

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) \left( \frac{\sin \pi l x}{\pi l x} \right)^3,$$

où  $\hat{\Phi}_0$  s'annule hors de l'intervalle  $[-m, m]$ , avec  $m + 3l \leq a$ . Si l'on suppose  $\hat{\Phi}_0$  à variation bornée  $V$  (c'est le cas avec  $V = 2$  quand  $\Phi_0(x) = \frac{\sin \pi m x}{\pi x}$ ), on a

$$|2\pi x \Phi_0(x)| \leq V$$

$$|2\pi x^2 \Phi(x)| \leq \frac{V}{\pi l} \left( \frac{\sin \pi l x}{\pi l x} \right)^2 = \frac{V}{\pi l} K(x)$$

la dernière égalité servant de définition à la fonction  $K(x)$ . En revenant à la définition de  $\Psi(x)$  et à la dernière inégalité sur  $r(x)$ , on a

$$|\Psi(x)| \leq \pi a x^2 |\Phi(x)| \leq \frac{V a}{2\pi l} K(x)$$

$$|r(x)| \leq \frac{V}{2\pi l} \sum_{n \in \mathbb{Z}} K\left(x + \frac{n}{a}\right).$$

D'après la formule de Poisson

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} K\left(x + \frac{n}{a}\right) = a \sum_{m \in \mathbf{Z}} \hat{K}(am) \exp(2\pi iamx)$$

On a  $\hat{K}(0) = 1/l$ ,  $\hat{K}(u) = 0$  pour  $|u| \geq l$ , et  $l < a$ . Donc

$$|r(x)| \leq \frac{Va}{2\pi l^2}.$$

Le résultat s'énonce commodément en posant  $\Phi(ax) = \phi(x)$ ,  $\Phi_0(ax) = \phi_0(x)$ ,  $l = ad$ . On désigne par  $\chi_d$  la fonction indicatrice de l'intervalle  $[-d/2, d/2]$ .

LEMME 3. Soit  $a$  un entier positif pair,  $0 < d < \frac{1}{3}$ , et  $\phi_0$  une fonction à variation bornée  $V$  portée par l'intervalle  $[\frac{1}{2}(-1+3d), \frac{1}{2}(1-3d)]$ . On pose

$$\phi = d^{-3} \phi_0 * \chi_d * \chi_d * \chi_d.$$

Le polynôme trigonométrique

$$q(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{q}_n \exp(2\pi inx),$$

$$\hat{q}_n = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp(\pi i/4) \exp(-\pi in^2/a) \phi(n/a)$$

vérifie pour  $|x| \leq \frac{1}{2}$

$$q(x) = \exp(\pi i ax^2) \phi(x) + r(x)$$

$$|r(x)| \leq \frac{V}{2\pi ad^2}.$$

Première application (figure 1)

On suppose  $0 < d < 1/6$  et on prend pour  $\phi_0$  la fonction indicatrice de  $[\frac{1}{2}(-1+3d), \frac{1}{2}(1-3d)]$ . Alors  $\phi = 1$  sur l'intervalle  $[-\frac{1}{2}+3d, \frac{1}{2}-3d]$ ,  $\phi = 0$  hors de  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , et  $0 \leq \phi \leq 1$  sur les deux intervalles restants.

Observons que l'intégrale de  $\phi$  est  $1-3d$ . En choisissant  $d = a^{-1/3}$  ( $a > 6^3$ ), on a

$$\sum |\hat{q}_n| = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum \phi(n/a) = \sqrt{a}(1-3d + O(1/a)) \quad (a \rightarrow \infty)$$

$$\|q\|_\infty \leq 1 + \frac{1}{\pi ad^2} = 1 + \pi^{-1} a^{-1/3}.$$

PROPOSITION 1. Pour  $a$  assez grand, il existe un polynôme trigonométrique

$$q(x) = \sum_{|n| \leq a/2} \hat{q}_n \exp(2\pi i n x)$$

donné par le lemme 1 qui satisfait

$$\sum |\hat{q}_n| \geq (a^{1/2} - 4a^{1/6}) \|q\|_\infty.$$

Cela améliore l'inégalité de Beller et Newman citée en introduction.

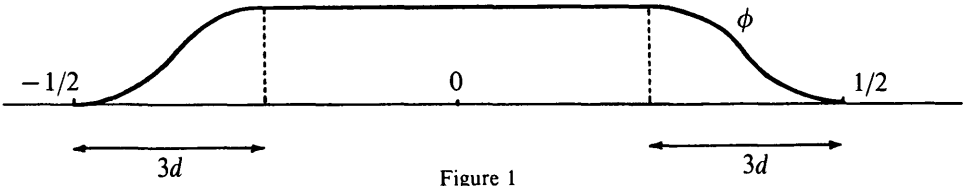


Figure 1

Deuxième application (figure 1).

On fait le même choix de  $\phi_0$ .

Appliquons le lemme 2 avec  $\alpha = 0$ ,  $\beta = a^{-1/2}$ ,  $\sigma = \sigma_1$  puis  $\sigma_2$ , où

$$\sigma_1(x) = \sum_{(1/2 - 3d)a \leq n \leq a/2} \hat{q}_n \exp(2\pi i n x)$$

$$\sigma_2(x) = \sum_{-a/2 \leq n \leq (-1/2 + 3d)a} \hat{q}_n \exp(2\pi i n x).$$

On obtient deux polynômes trigonométriques  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , tels que

$$\|\rho_1\|_\infty + \|\rho_2\|_\infty \leq 20a^{-1/2} \sqrt{3da \log(3da)}$$

et que le polynôme trigonométrique  $p = q + \rho_1 + \rho_2$  ait tous ses coefficients de module  $a^{-1/2}$ :

$$p(x) = \sum_{|n| \leq a/2} \hat{p}_n \exp(2\pi i n x), \quad |\hat{p}_n| = a^{-1/2}.$$

Les estimations du lemme 3 donnent

$$p(x) = \exp(\pi i a x^2) \phi(x) + r(x) + \rho_1(x) + \rho_2(x)$$

$$\|r + \rho_1 + \rho_2\|_\infty \leq \frac{1}{\pi a d^2} + 20 \sqrt{3d \log(3da)}.$$

En choisissant  $d = (a \sqrt{\log a})^{-2/5}$  (on suppose  $a > 6^{5/2}$  de façon que  $d < 1/6$ ), on a

$$\|r + \rho_1 + \rho_2\|_\infty \leq 40a^{-1/5} (\log a)^{2/5}.$$

PROPOSITION 2. *Pour tout entier pair  $a$  assez grand, il existe un polynôme trigonométrique*

$$p(x) = \sum_{|n| \leq a/2} \hat{p}_n \exp(2\pi i n x)$$

tel que  $|\hat{p}_n| = a^{-1/2}$  pour tout  $n$  ( $-a/2 \leq n \leq a/2$ ), et

$$\|p\|_{\infty} \leq 1 + 40a^{-1/5}(\log a)^{2/5}.$$

Cette proposition répond négativement au problème 22 de Erdős dans [4].

### Troisième application (figure 2)

A partir de maintenant  $a$  et  $a_1$  sont deux entiers positifs pairs,  $a_1 > a$ ; on pose

$$N = \text{partie entière de } \frac{1}{2} \frac{aa_1}{a+a_1}$$

et  $\theta(x)$  est la fonction continue 1-périodique et impaire, dont la dérivée est

$$\begin{aligned} \theta'(x) &= ax && \text{pour } 0 \leq x < \frac{N}{a} \\ \theta'(x) &= N && \text{pour } \frac{N}{a} < x < \frac{1}{2} - \frac{N}{a_1} \\ \theta'(x) &= -a_1(x - \frac{1}{2}) && \text{pour } \frac{1}{2} - \frac{N}{a_1} < x \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dans cette section et dans la suivante, nous allons construire un polynôme trigonométrique dont le degré est  $\frac{1}{2}a + o(a)$ , dont les coefficients ont tous même module  $a^{-1/2}(1 + o(1))$ , et qui est, dans un certain sens, proche de  $\exp(2\pi i \theta(x))$ .

Commençons par deux lemmes classiques dont nous laissons la vérification au lecteur.

LEMME 4. Soit  $c = \sup_{\alpha, \beta} \left| \int_{\alpha}^{\beta} \exp(\pi i x^2) dx \right|$ . Pour toute fonction  $\psi$  positive décroissante sur  $(0, \infty)$ , pour tout  $a > 0$  et pour tout  $u$  réel, on a

$$\left| \int_0^{\infty} \psi(x) \exp(\pi i a x^2) \exp(-2\pi i u x) dx \right| \leq ca^{-1/2} \psi(0).$$

On vérifie que  $c \leq 3$ .



LEMME 5. *Posons*

$$K = 6^3 \chi_{3/2} * \chi_{1/6} * \chi_{1/6} * \chi_{1/6}.$$

Soit  $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n \exp(2\pi i n x)$  une fonction dérivable, vérifiant  $|f'(x)| \leq D$ . Soit  $\nu$  un entier positif. On pose

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n K(n/\nu) \exp(2\pi i n x) = \sum_{|n| \leq 2\nu} \hat{g}_n \exp(2\pi i n x)$$

(somme de La Vallée Poussin–Jackson de degré  $2\nu$ ). On a

$$\hat{g}_n = \hat{f}_n \quad \text{pour } |n| \leq \nu$$

$$|\hat{g}_n| \leq |\hat{f}_n| \quad \text{pour tout } n$$

et 
$$\|g - f\|_\infty \leq \frac{6D}{\nu}.$$

Nous aurons besoin de la version suivante du lemme 3, obtenue en changeant  $i$  en  $-i$ .

LEMME 6. Soit  $a_1, d_1, \phi_1$  comme  $a, d, \phi$  dans le lemme 3. La fonction

$$q_1(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-\pi i/4) \exp(\pi i n^2/a_1) \phi_1(n/a_1)$$

vérifie pour  $|x| \leq \frac{1}{2}$

$$q_1(x) = \exp(-\pi i a_1 x^2) \phi_1(x) + r_1(x)$$

$$|r_1(x)| \leq \frac{V}{2\pi a_1 d_1^2}.$$

Nous supposons  $a$  assez grand pour que les notations suivantes aient un sens (on désigne par  $c$  la constante du lemme 4):

$$a = \varepsilon^{-11}, \varepsilon > 0$$

$$a_1 : \text{entier pair le plus voisin de } \varepsilon^{-15}$$

$$\nu : \text{entier le plus voisin de } \varepsilon^{-9}$$

$$d = \varepsilon^3 \text{ (ou aussi bien } \varepsilon^5 \leq d \leq \varepsilon^3)$$

$$d_1 = \varepsilon^7$$

$$\phi = d^{-3} \chi_d * \chi_d * \chi_d * \left( \frac{1}{c+1} \chi_{N/a-3d/2} + \frac{c}{c+1} \chi_{N/a-2\nu/a-3d/2} \right)$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= d_1^{-3} \chi_{d_1} * \chi_{d_1} * \chi_{d_1} * \chi_{N/a_1 - 3d_1/2} \\ \psi_2(x) &= \frac{1}{c+1} - \phi(x) \quad \text{pour } \frac{N}{a} - 3d \leq x \leq \frac{N}{a} \\ &= \frac{1}{c+1} \quad \text{pour } \frac{N}{a} \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{N}{a_1} \\ &= \frac{1}{c+1} (1 - \phi_1(x)) \quad \text{pour } \frac{1}{2} - \frac{N}{a_1} \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{N}{a_1} + 3d_1 \\ &= 0 \quad \text{ailleurs} \end{aligned}$$

$$\psi_3(x) = -\psi_2(x).$$

La fonction  $\phi$  satisfait l'hypothèse du lemme 3, avec  $V = 2$ , et de même la fonction  $\phi_1$  celle du lemme 6. Soit  $q$  et  $r$ ,  $q_1$  et  $r_1$ , les fonctions qui leur sont respectivement associées. On a

$$q(x) = \exp(2\pi i \theta(x)) \phi(x) + r(x) \quad \text{pour } |x| \leq \frac{1}{2}$$

$$\|r\|_\infty \leq \frac{1}{\pi a d^2} = O(\varepsilon^{11-6}) = o(\varepsilon)$$

$$|\hat{q}_n| = a^{-1/2} \phi(n/a)$$

$$q_1(x) = \exp(2\pi i (\theta(\frac{1}{2} + x) - \theta(\frac{1}{2}))) \phi_1(x) + r_1(x) \quad \text{pour } |x| \leq \frac{1}{2}$$

$$\|r_1\|_\infty \leq \frac{1}{\pi a_1 d_1^2} = \frac{1}{\pi} \varepsilon^{15-14} = \frac{1}{\pi} \varepsilon$$

$$|\hat{q}_{1,n}| = a_1^{-1/2} \phi_1(n/a_1).$$

Posons

$$f_2(x) = \exp(-2\pi i N x) \exp(2\pi i \theta(x)) \psi_2(x)$$

$$f_3(x) = \exp(2\pi i N x) \exp(2\pi i \theta(x)) \psi_3(x).$$

A gauche du point  $\frac{N}{a}$  on a

$$\theta(x) = \theta(N/a) + N(x - N/a) + \frac{a}{2} (x - N/a)^2,$$

à droite du point  $\frac{1}{2} - \frac{N}{a_1}$

$$\theta(x) = \theta(\frac{1}{2} - N/a_1) + N(x - \frac{1}{2} + N/a_1) - \frac{a_1}{2} (x - \frac{1}{2} + N/a_1)^2$$

et entre ces deux points  $\theta(x) - Nx$  est constant; d'ailleurs

$$\frac{1}{2} - \frac{N}{a_1} - \frac{N}{a} < \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} < \frac{2}{a}.$$

D'après le lemme 4

$$|\hat{f}(u)| \leq \frac{c}{c+1} \left( \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a_1}} \right) + \frac{2}{a} = \frac{c}{c+1} a^{-\frac{1}{2}} (1 + O(\varepsilon^2)) \quad (f = f_1, f_2).$$

Chacune des fonctions  $\phi, \phi_1, \psi_2, \psi_3, f_2, f_3$  admet un prolongement 1-périodique naturel (sa convolution par  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$ ), que nous désignerons par la même lettre. Ainsi  $f_2$  et  $f_3$  peuvent jouer le rôle de  $f$  dans le lemme 5, avec

$$D = 10(ad + a_1 d_1) \geq \sup(1/d + 2\pi ad, 1/d_1 + 2\pi a_1 d_1) \geq \|f'\|_\infty$$

compte tenu du choix de  $a_1, d, d_1$ . Soit  $g_2$  et  $g_3$  les sommes de La Vallée Poussin-Jackson de degré  $2\nu$  qui leur sont associées. Posons

$$q_2(x) = \exp(2\pi i Nx) g_2(x)$$

$$q_3(x) = \exp(-2\pi i Nx) g_3(x).$$

On peut écrire

$$q_j(x) = \exp(2\pi i \theta(x)) \psi_j(x) + r_j(x)$$

$$\|r_j\| \leq \frac{6D}{\nu} = O(\varepsilon) \quad (j = 2, 3).$$

Les coefficients de Fourier de  $q_2$  respectivement  $q_3$  sont nuls hors de  $[N - 2\nu, N + 2\nu]$  respectivement  $[-N - 2\nu, -N + 2\nu]$ , et inférieurs en module à  $\|\hat{f}\|_\infty$ , soit

$$\begin{aligned} |\hat{q}_{2,n}| &\leq \frac{c}{c+1} a^{-\frac{1}{2}} (1 + O(\varepsilon^2)), n \in [N - 2\nu, N + 2\nu] \\ &= 0 \quad \text{ailleurs} \end{aligned}$$

et l'analogie pour  $\hat{q}_{3,n}$ .

Soit  $F$  la fonction 1-périodique égale à

$$F(x) = \exp(2\pi i \theta(x)) (\phi(x) + \phi_1(x - \frac{1}{2}) + \psi_2(x) + \psi_3(x)).$$

Observons que

$$\frac{1}{c+1} \leq |F(x)| \leq 1.$$

D'autre part  $F = q^* - r^*$ , avec

$$q^*(x) = q(x) + e^{i\gamma} q_1(x - \frac{1}{2}) + q_2(x) + q_3(x)$$

$$r^*(x) = r(x) + e^{i\gamma} r_1(x - \frac{1}{2}) + r_2(x) + r_3(x) \quad (\gamma = 2\pi\theta(\frac{1}{2}))$$

$$\|r^*\|_\infty = O(\varepsilon)$$

$$\|\hat{q}_n^* - a^{1/2}\| \leq a_1^{-1/2} \quad \text{pour } |n| \leq N - 2\nu$$

$$|\hat{q}_n^*| \leq a^{-1/2} \phi(n/a) + a_1^{-1/2} + \frac{c}{c+1} a^{-1/2} (1 + O(\varepsilon^2))$$

$$\leq a^{-1/2} (1 + O(\varepsilon^2)) \quad \text{pour } N - 2\nu < |n| \leq N + 2\nu$$

$$q_n^* = 0 \quad \text{pour } |n| > N + 2\nu.$$

Posons  $\beta = \sup_n |\hat{q}_n^*|$ .

Appliquons enfin le lemme 2, avec  $\sigma = \sigma_1$  respectivement  $\sigma_2$ , respectivement  $\sigma_3$

$$\sigma_1(x) = \sum_{|n| \leq N - 2\nu} \hat{q}_n^* \exp(2\pi i n x), \quad \alpha = a^{-\frac{1}{2}} - a_1^{-\frac{1}{2}} \leq |q_n^*| \leq \beta$$

$$\sigma_2(x) = \sum_{N - 2\nu \leq n \leq N + 2\nu} \hat{q}_n^* \exp(2\pi i n x), \quad \alpha = 0 \leq |q_n^*| \leq \beta$$

$$\sigma_3(x) = \sum_{-N - 2\nu \leq n \leq -N + 2\nu} \hat{q}_n^* \exp(2\pi i n x), \quad \alpha = 0 \leq |q_n^*| \leq \beta.$$

On obtient  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ , avec

$$\begin{aligned} \|\rho_1 + \rho_2 + \rho_3\|_\infty &\leq C_1 \varepsilon \sqrt{\log a} + C_2 a^{-\frac{1}{2}} \sqrt{4\nu \log \nu} \\ &= O(\varepsilon \sqrt{\log 1/\varepsilon}). \end{aligned}$$

Enonçons le résultat, après normalisation, en remarquant que  $N + 2\nu = \frac{a}{2}(1 + O(\varepsilon^2))$ .

PROPOSITION 3. *Il existe une suite de polynômes trigonométriques*

$$P_\mu(x) = \sum_{|n| \leq \mu} \hat{p}_{\mu, n} \exp(2\pi i n x) \quad (\mu = 1, 2, \dots)$$

tels que

$$|\hat{p}_{\mu,n}| = (2\mu + 1)^{-1/2} \text{ pour tout } n \ (|n| \leq \mu)$$

$$\sup_x |P_\mu(x)| = 1 + O(\mu^{-1/11} \sqrt{\log \mu})$$

$$\inf_x |P_\mu(x)| = \frac{1}{c+1} + O(\mu^{-1/11} \sqrt{\log \mu})$$

$c$  étant la constante du lemme 4.

La proposition 3 donne le théorème de Körner cité en introduction, avec  $B$  arbitrairement proche de 1.

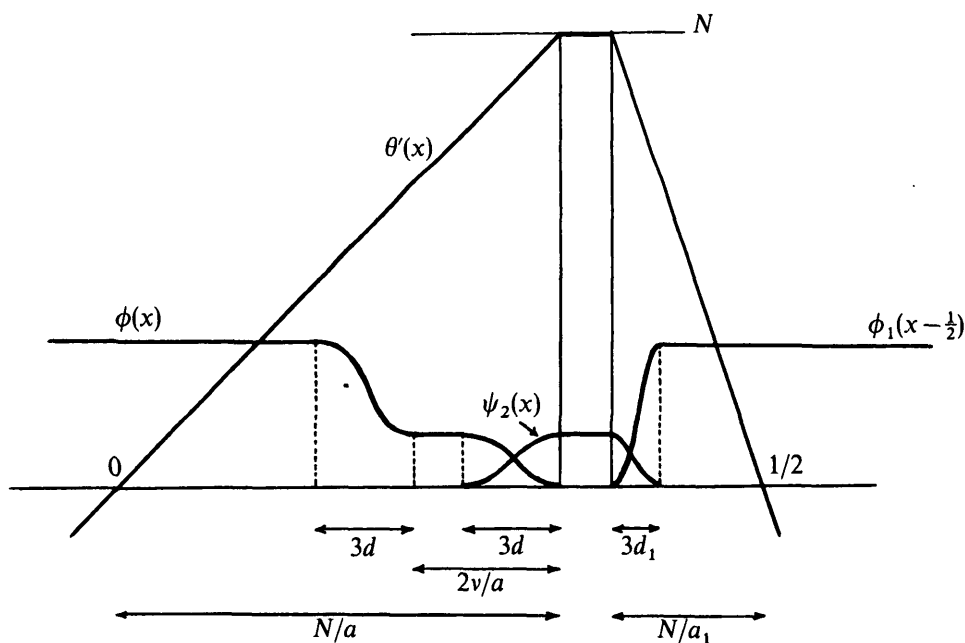


Figure 2

Quatrième application (figure 3)

Au lieu du lemme 4, nous utiliserons le lemme suivant.

LEMME 7. Soit  $I$  un intervalle de longueur  $l$ ,  $h(x)$  une fonction à valeurs complexes définie sur  $I$ , dérivable, vérifiant

$$|h(x)| \leq 1, |h'(x)| \leq \Delta \quad (x \in I),$$

$$|h(\alpha)| = |h(\beta)| = 1 \text{ si } I = [\alpha, \beta].$$

Soit  $0 < \varepsilon < 1/5$  et  $m$  entier, tels que  $m\varepsilon \geq 1$  et  $\Delta l \leq m\varepsilon^2$ . Alors il existe une fonction  $f$  à valeurs complexes, définie sur  $\mathbb{R}$ , continue et dérivable par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , nulle en dehors de  $I$ , telle que

$$\|f(x) + h(x) - 1\| \leq 8\varepsilon \quad (x \in I)$$

$$|\hat{f}(x)| \leq 7 \frac{m}{\varepsilon}$$

$$|\hat{f}(u)| \leq 200lm^{-1/2}(\log m)^{1/2}.$$

Pour la preuve du lemme 7, on aura besoin des fonctions de Möbius

$$M(z, h) = \frac{z+h}{1+\bar{h}z} \quad (|h| < 1, |z| = 1)$$

et des faits suivants.

1. L'image de la mesure de probabilité équilibrée sur le cercle  $|z| = 1$  (notée  $\mu_0$ ) par la fonction  $z \rightarrow M(z, h)$  est la mesure harmonique sur le cercle relative au point  $h$ , que nous noterons  $\mu_h$ . La densité de  $\mu_h$  par rapport à  $\mu_0$  est donnée par un noyau de Poisson; elle est comprise entre  $(1-|h|)/(1+|h|)$  et  $(1+|h|)/(1-|h|)$ . L'espérance d'une variable aléatoire répartie suivant  $\mu_h$  est  $h$ .

2. Soit  $|h| \leq 1-\varepsilon$ ,  $|h'| \leq 1-\varepsilon$ ,  $|h-h'| \leq \eta$ . Supposons d'abord  $\arg h = \arg h'$ . On a

$$|\arg M(z, h) - \arg M(z, h')| = \left| \arg \left( \frac{z+h}{z+h'} \right)^2 \right| \leq 2\eta/\varepsilon.$$

Supposons maintenant  $|h| = |h'|$ . On passe de  $\mu_h$  à  $\mu_{h'}$  par une rotation d'angle  $2 \operatorname{Arc} \sin(\eta/(2|h|))$ . Comme le noyau de Poisson n'a que deux *extrema*, on a

$$\|\mu_h - \mu_{h'}\| \leq 4 \left( \frac{1+|h|}{1-|h|} - \frac{1-|h|}{1+|h|} \right) \operatorname{Arc} \sin \frac{\eta}{2|h|} \leq 4\eta/\varepsilon.$$

Dans le cas général, on passe donc de  $\mu_h$  à  $\mu_{h'}$  par un homéomorphisme du cercle  $|z| = 1$  qui déplace chaque point d'au plus  $2\eta/\varepsilon$ , suivi de l'addition d'une mesure réelle de masse totale  $\leq 4\eta/\varepsilon$ .

*Preuve du lemme 7.* On peut supposer  $I = [0, l]$ . Posons

$$x_j = j \frac{l}{m}, \quad h_j = (1-\varepsilon)h(x_j) \quad (j = 1, 2, \dots, m-1).$$

Ainsi

$$|h_j| \leq 1-\varepsilon, \quad |h_{j+1} - h_j| \leq \Delta l/m \leq \varepsilon^2,$$

$$|h_1 - (1-\varepsilon)h(0)| < \varepsilon^2, \quad |h_{m-1} - (1-\varepsilon)h(l)| < \varepsilon^2.$$

Ecrivons pour simplifier  $\mu_j$  au lieu de  $\mu_{h_j}$ . Soit  $Z_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m-1$ ) une suite de

variables aléatoires indépendantes, prenant leurs valeurs sur le cercle  $|z| = 1$ , la distribution de  $Z_j$  étant  $\mu_j$ . Ainsi  $Z_j = M(z_j, h_j)$ ,  $z_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m-1$ ) étant une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées sur le cercle  $|z| = 1$ .

Soit  $G(x)$  ( $x \in I$ ) la fonction aléatoire définie comme suit:

$$G(0) = h(0), \quad G(x_j) = Z_j \quad (j = 1, 2, \dots, m-1), \quad G(l) = h(l);$$

$G(x)$  est continue et de module 1; sur chacun des deux intervalles  $[0, x_1]$  et  $[x_{m-1}, l]$ , l'argument de  $G(x)$  varie linéairement et de façon minimale; sur chaque intervalle  $[x_j, x_{j+1}]$ ,  $G(x)$  se trouve sur l'arc  $Z_j Z_{j+1}$  de  $\mu_j$ -mesure inférieure à  $1/2$ , et le partage de façon que les  $\mu_j$ -mesures des arcs  $\widehat{Z_j G(x)}$  et  $\widehat{G(x) Z_{j+1}}$  soient proportionnelles à  $x - x_j$  et  $x_{j+1} - x$ .

Sur les intervalles  $[0, x_1]$  et  $[x_{m-1}, l]$  la dérivée de  $G(x)$  ne dépasse pas  $\pi m/l$ . Sur les intervalles  $[x_j, x_{j+1}]$ , elle ne dépasse pas  $\pi m/l\varepsilon$ , parce que la densité de  $\mu_j$  est supérieure à  $1/\varepsilon$ .

Posons  $\gamma(x) = E(G(x))$ . Nous allons montrer qu'avec une probabilité strictement positive on peut choisir  $f(x) = G(x) - \gamma(x)$ .

La fonction  $\gamma(x)$  est dérivable par morceaux et sa dérivée ne dépasse pas  $\pi m/l\varepsilon$ : cela résulte de ce que nous venons de dire de  $G(x)$ .

Majorons  $|\gamma(x) - h(x)|$ .

Supposons d'abord  $0 \leq x \leq x_1$ . Si  $h(0)$  et  $h(x_1)$  ont le même argument, il est immédiat que  $\gamma(x)$  se trouve sur le segment joignant  $h(0)$  et  $h_1$ . Dans le cas général, les arguments de  $h(0)$  et  $h(x_1)$  diffèrent de moins de  $2\varepsilon^2$ , donc  $\gamma(x)$  se trouve à une distance inférieure à  $2\varepsilon^2$  du segment joignant  $h(0)$  et  $h_1$ . Comme  $\varepsilon < 1/5$ , il en résulte que  $|\gamma(x) - h(x)| \leq 2\varepsilon$  sur  $[0, x_1]$ . Il en est de même sur  $[x_{m-1}, l]$ .

Supposons maintenant  $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ . Si  $h_{j+1} = h_j$ , les variables aléatoires  $Z_j$  et  $Z_{j+1}$  ont même distribution  $\mu_j (= \mu_{j+1})$ . Posons

$$G(x) = M(U(x), h_j).$$

$U(x_j)$  et  $U(x_{j+1})$  sont des variables aléatoires indépendantes, équidistribuées sur le cercle  $|z| = 1$  et  $U(x)$  divise le plus petit arc  $U(x_j)U(x_{j+1})$  dans le rapport  $(x - x_j)/(x_{j+1} - x)$ .  $U(x)$  est donc une variable aléatoire équidistribuée sur le cercle. Donc  $G(x)$  a pour distribution  $\mu_j$ , et par conséquent  $\gamma(x) = h_j$ .

Si  $h_{j+1} \neq h_j$ , nous avons vu qu'on passe de  $\mu_j$  à  $\mu_{j+1}$  par un homéomorphisme du cercle qui déplace chaque point d'au plus  $2\varepsilon$ , suivi de l'addition d'une mesure réelle de masse totale  $\leq 4\varepsilon$  (ici  $\eta = \varepsilon^2$ ). Il en résulte que la distribution de  $G(x)$  est aussi obtenue par un tel procédé (l'homéomorphisme et la mesure additionnelle dépendant de  $x$ ). Par conséquent  $|\gamma(x) - h_j| \leq 6\varepsilon$ .

Comme  $|h(x) - h_j| \leq \varepsilon + \varepsilon^2 < 2\varepsilon$ , on a dans tous les cas

$$|\gamma(x) - h(x)| \leq 8\varepsilon.$$

(C'est en vue de cette inégalité qu'on a dû choisir soigneusement la fonction aléatoire  $G(x)$ ; le choix, a priori plus naturel, d'une fonction aléatoire dont l'argument varie

linéairement sur chaque  $[x_j, x_{j+1}]$  n'aurait pas conduit au résultat).

Evaluons enfin la transformée de Fourier de  $G(x) - \gamma(x)$ .

Choisissons  $p = m^2$ , et posons  $x_{j,k} = j \frac{l}{m} + k \frac{l}{mp}$  ( $j = 0, 1, \dots, m; k = 0, 1, \dots, p$ ).

Posons

$$X_{j,k} = G(x_{j,k}) - \gamma(x_{j,k}) \quad (x_{j,k} \in I)$$

$$X_{j,0} = X_{j-1,p} = X_j = Z_j - E(Z_j) \quad (j = 1, 2, \dots, m-1).$$

D'après le lemme 1, on a

$$\sup_u \left| \sum_{j=1}^{m-1} X_j \exp(2\pi i j u) \right| \leq 2\lambda \sqrt{m \log m}$$

avec une probabilité supérieure à  $1 - \eta$ , où

$$\eta = 4\pi m^{2-\lambda^2/32}.$$

Observons que les variables aléatoires  $X_{j,k}$  ( $k$  fixé,  $j$  pair) sont mutuellement indépendantes, et de même les  $X_{j,k}$  ( $k$  fixé,  $j$  impair). En vertu du lemme 1, on a donc pour chaque  $k$

$$\sup_u \left| \sum_{j=0}^{m-1} X_{j,k} \exp(2\pi i j u) \right| \leq 4\lambda \sqrt{m \log m}$$

avec une probabilité supérieure à  $2\eta$ . Avec une probabilité supérieure à  $1 - 2\eta p$ , ces inégalités ont lieu pour tout  $k$ , et alors

$$\sup_u \left| \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{p-1} X_{j,k} \exp(2\pi i x_{j,k} u) \right| \leq 4\lambda p \sqrt{m \log m}.$$

Choisissons  $\lambda = 16$ , de sorte que pour  $m \geq 3$  on ait  $2\eta p < 1$ , fixons les  $Z_j$  de façon que la dernière inégalité ait lieu, et posons

$$f(x) = G(x) - \gamma(x) \quad (x \in I)$$

$$f(x) = 0 \quad (x \notin I).$$

La fonction  $f(x)$  est continue, dérivable par morceaux, et

$$\|f'\|_\infty \leq 2\pi m/l\varepsilon;$$

cela résulte des propriétés déjà indiquées de  $G(x)$  et  $\gamma(x)$ . On a aussi

$$f(x) + h(x) = G(x) + h(x) - \gamma(x)$$

$$|f(x) + h(x) - G(x)| \leq 8\varepsilon.$$



Il ne reste plus, pour établir le lemme 7, qu'à démontrer l'inégalité sur  $\hat{f}(u)$ .  
Le choix des  $Z_j$  garantit que

$$\sup_u \left| \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{p-1} f(x_{j,k}) \exp(2\pi i x_{j,k} u) \right| \leq 4\lambda p \sqrt{m \log m} \quad (\lambda = 16).$$

Par un calcul évident

$$\left| \hat{f}(u) - \frac{l}{mp} \sum_{j,k} f(x_{j,k}) \exp(2\pi i x_{j,k} u) \right| \leq \frac{l^2}{mp} (||f'||_\infty + 4\pi|u|)$$

donc

$$|\hat{f}(u)| \leq A + B|u|$$

avec

$$A = \frac{2\pi l}{p\varepsilon} + 4\lambda \frac{l}{m} \sqrt{m \log m} \quad B = \frac{4\pi l^2}{mp}.$$

D'autre part la variation de  $f$  est majorée par  $l||f'||_\infty$ , donc

$$|\hat{f}(u)| \leq l||f'||_\infty/|u| \leq 2\pi m/\varepsilon|u| = C/|u|.$$

Finalement, compte tenu de l'hypothèse  $m\varepsilon \geq 1$ ,

$$|\hat{f}(u)| \leq A + \sqrt{BC} \leq 200lm^{-1/2}(\log m)^{1/2}.$$

C'est la majoration indiquée dans l'énoncé. Le lemme 7 est donc démontré.

Nous choisissons maintenant  $a$  très grand,  $a = \varepsilon^{-17}$ ,  $\varepsilon > 0$

$a_1$  : entier pair le plus voisin de  $\varepsilon^{-21}$

$v$  : entier le plus voisin de  $\varepsilon^{-15}$

$m$  : entier le plus voisin de  $37\pi\varepsilon^{-7}$

$d = \varepsilon^6$

$d_1 = \varepsilon^{10}$

$\delta = 1000\varepsilon\sqrt{\log a}$

$\phi = d^{-3}\chi_d * \chi_d * \chi_d * ((1-\delta)\chi_{N/a-3d/2} + \delta\chi_{N/a-2v/a-3d/2})$

$\psi = d^{-3}\chi_d * \chi_d * \chi_d * \chi_{N/a-3d/2}$

$\phi_1 = d_1^{-3}\chi_{d_1} * \chi_{d_1} * \chi_{d_1} * \chi_{N/a_1-3d_1/2}$ .

L'entier  $N$  et la fonction  $\theta$  sont les mêmes que précédemment. On définit de la même façon  $q, r, q_1, r_1$ . Posons

$$\begin{aligned} h_2(x) &= (\psi(x) + \phi_1(x - \pi/2)) \exp(2\pi i(\theta(x) - Nx)) \quad \text{sur } [0, 1/2] \\ &= 0 \quad \text{ailleurs} \\ h_3(x) &= \overline{h_2(-x)}. \end{aligned}$$

On peut appliquer le lemme 7 à  $h = h_2$  respectivement  $h_3$ , avec

$$\begin{aligned} I &= \left[ \frac{N}{a} - 3d, \frac{1}{2} - \frac{N}{a_1} + 3d_1 \right] = I_2 \quad \text{respectivement} \quad \left[ -\frac{1}{2} + \frac{N}{a_1} - 3d_1, -\frac{N}{a} + 3d \right] = I_3, \\ l &= 3d + 3d_1 + O(a^{-1}), \quad \Delta = 6\pi(ad + a_1d_1) + d^{-1} + d_1^{-1}. \end{aligned}$$

Selon les données on a  $\Delta \approx 12\pi\varepsilon^{-11}$ ,  $l \approx 3\varepsilon^6$  donc  $m\varepsilon^2 \geq \Delta l$ . On obtient deux fonctions  $f_2$  et  $f_3$ , que l'on confond avec leur prolongement 1-périodique (convolution par  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$ ). Le lemme 5 s'applique avec  $f = f_2$  respectivement  $f_3$ ,  $D = 7m(l\varepsilon)^{-1}$ , et  $v$  donné. On obtient  $g_2$  et  $g_3$ , polynômes trigonométriques de degré  $2v$ , tels que

$$\|g_j - f_j\|_\infty \leq 42ml^{-1}v^{-1}\varepsilon^{-1}$$

et dont les coefficients de Fourier satisfont

$$|\hat{g}_{j,n}| \leq 200lm^{-\frac{1}{2}}(\log m)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit  $F(x)$  la fonction 1-périodique égale à  $\exp(2\pi i\theta(x))$  sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  hors des intervalles  $I_2$  et  $I_3$ , égale à  $(h_2(x) + f_2(x)) \exp(2\pi iNx)$  sur  $I_2$  et à  $(h_3(x) + f_3(x)) \exp(-2\pi iNx)$  sur  $I_3$ . On a  $|F(x)| = 1$  pour tout  $x$ , et on peut écrire  $F = q^* - r^* + s^*$  avec

$$q^*(x) = q(x) + e^{i\gamma}q_1(x - \frac{1}{2}) + g_2(x) \exp(2\pi iNx) + g_3(x) \exp(-2\pi iNx)$$

$$\begin{aligned} r^*(x) &= r(x) + e^{i\gamma}r_1(x - \frac{1}{2}) + (g_2(x) - f_2(x)) \exp(2\pi iNx) + (g_3(x) - f_3(x)) \exp(-2\pi iNx) \\ &\quad (\gamma = 2\pi\theta(\frac{1}{2})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^*(x) &= h_2(x) \exp(2\pi iNx) - (\phi(x) + \phi_1(x - \frac{1}{2})) \exp(2\pi i\theta(x)) \quad (x \in [0, \frac{1}{2}]) \\ &= h_3(x) \exp(-2\pi iNx) - (\phi(x) + \phi_1(x - \frac{1}{2})) \exp(2\pi i\theta(x)) \quad (x \in [-\frac{1}{2}, 0]) \end{aligned}$$

$$\text{soit } s^*(x) = (\psi(x) - \phi(x)) \exp(2\pi i\theta(x)).$$

Ainsi

$$\|r^*\|_y + \|s^*\|_x \leq (\pi ad^2)^{-1} + (\pi a_1 d_1^{-2})^{-1} + 84ml^{-1}v^{-1}\varepsilon^{-1} + \delta$$

et les choix indiqués donnent  $\|r^*\|_\alpha + \|s^*\|_\alpha = O(\varepsilon\sqrt{\log a})$ .

Les coefficients de Fourier de  $q^*$  diffèrent de ceux de  $q$

1. pour  $n \in [-N + 2v, N - 2v]$ , par ceux de  $e^{iv}q_1(x - \frac{1}{2})$
2. pour  $n \in [N - 2v, N + 2v]$ , par ceux de  $e^{iv}q_1(x - \frac{1}{2})$  et par ceux de  $g_2(x) \exp(2\pi iNx)$
3. pour  $n \in [-N + 2v, N - 2v]$ , par ceux de  $e^{iv}q_1(x - \frac{1}{2})$  et par ceux de  $g_3(x) \exp(-2\pi iNx)$

et enfin sont nuls pour  $|n| \geq N + 2v$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} |\hat{q}_n^* - a^{-1/2}| &\leq a_1^{-1/2} && \text{pour } n \in [-N + 2v, N - 2v], \\ |\hat{q}_n^*| &\leq a^{-1/2}(1 - \delta) + a_1^{-1/2} + 200lm^{-1/2}(\log m)^{1/2} && \text{pour } |n| \in [N - 2v, N + 2v], \\ \hat{q}_n^* &= 0 && \text{pour } |n| > N + 2v. \end{aligned}$$

Le choix des données implique

$$a^{-1/2}\delta > 200lm^{-1/2}(\log m)^{1/2}.$$

En résumé donc,

$$\begin{aligned} a^{-1/2} - a_1^{-1/2} &\leq |\hat{q}_n^*| \leq a^{-1/2} && \text{pour } n \in [-N + 2v, N - 2v] \\ |\hat{q}_n^*| &\leq a^{-1/2} + a_1^{-1/2} && \text{pour } |n| \in [N - 2v, N + 2v] \\ \hat{q}_n^* &= 0 && \text{pour } |n| \geq N + 2v. \end{aligned}$$

Appliquons enfin le lemme 2 comme dans la section précédente. On obtient  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ , avec

$$\begin{aligned} \|\rho_1 + \rho_2 + \rho_3\|_\infty &\leq C_1(aa_1)^{-1/4} \sqrt{a \log a} + C_2 a^{-1/2} \sqrt{4v \log 4v} \\ &= O(\varepsilon\sqrt{\log a}) \end{aligned}$$

d'après le choix des données, donc en posant  $p = q^* + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$  on a

$$p = \sum_{-N-2v}^{N+2v} \hat{p}_n \exp(2\pi int) \quad |\hat{p}_n| = a^{-1/2} + a_1^{-1/2} \quad \|p - F\|_\infty = O(\varepsilon\sqrt{\log a}).$$

Enonçons le résultat après normalisation.

PROPOSITION 4. *Il existe une suite de polynômes trigonométriques*

$$P_\mu(x) = \sum_{|n| \leq \mu} \hat{p}_{\mu,n} \exp(2\pi i n x) \quad (\mu = 1, 2, \dots)$$

tels que

$$|\hat{p}_{\mu,n}| = (2\mu + 1)^{-1/2} \text{ pour tout } n \quad (|n| \leq \mu)$$

$$\sup_u ||P_\mu(x)| - 1| = O(\mu^{-1/17} \sqrt{\log \mu}).$$

La proposition 4 donne le théorème énoncé en introduction, avec  $\varepsilon_n = O(n^{-1/17} \sqrt{\log n})$ .

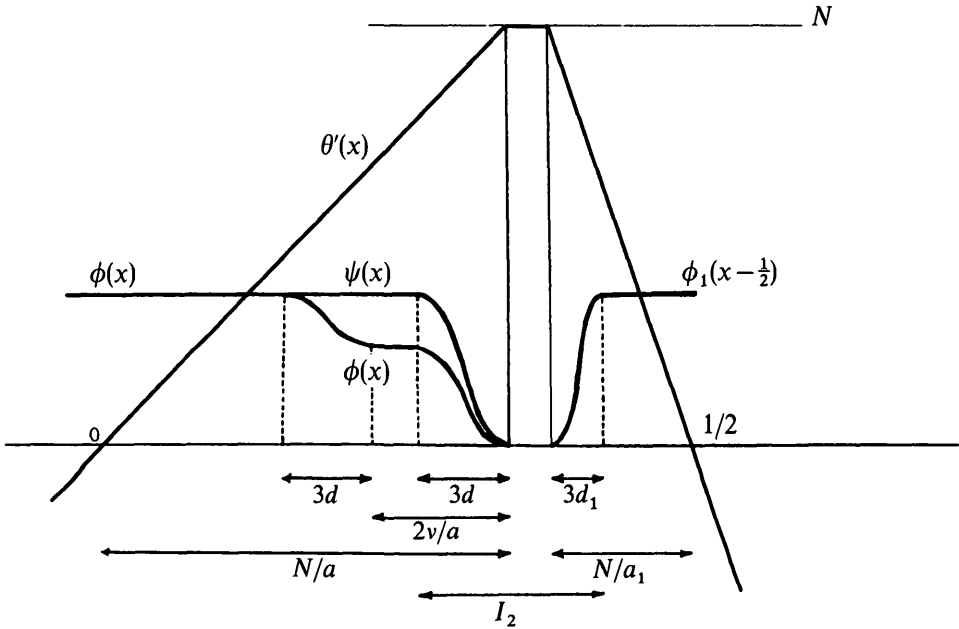


Figure 3

*Démonstration abrégée du théorème, et cinquième application (figure 4)*

Le choix des paramètres et des fonctions a été fait plus haut pour donner la meilleure estimation possible de  $\varepsilon_n$  compatible avec la méthode (à l'exposant près de  $\log n$ , qui peut être réduit).

On peut abrégé la démonstration du théorème en prenant  $d = d_1, \delta = 0$  donc  $\phi(x) = \psi(x)$ . On choisira  $v \ll a \ll a \log^2 a \ll a_1$  et  $d \ll 1$ .

La fonction  $(\phi(x) + \phi_1(x - \frac{1}{2})) \exp(2\pi i \theta(x))$  est de module 1, sauf sur les intervalles  $I_2$  et  $I_3$ , où son module est compris entre 0 et 1. Sur  $I_2$  respectivement  $I_3$ , on la multiplie par  $\exp(-2\pi i N x)$  respectivement  $(2\pi i N x)$ , et on applique le lemme 7. Cela donne deux fonctions  $f_2$  et  $f_3$ , portées par  $I_2$  et  $I_3$ , telles que la fonction

$$F(x) = (\phi(x) + \phi_1(x - \frac{1}{2})) \exp(2\pi i \theta(x)) + f_2(x) \exp(2\pi i N x) + f_3(x) \exp(-2\pi i N x)$$

soit de module 1; de plus

$$|f'_2| + |f'_3| \leq C_1 m d^{-1} \varepsilon^{-1}$$

sous les conditions

$$(*) \quad ad^2 \geq 1 \quad \text{et} \quad m \geq C_2 a_1 d^2 \varepsilon^{-2}$$

et enfin

$$\sup_n (|\hat{f}_{2,n}| + |\hat{f}_{3n}|) \leq C_3 d m^{-1/2} (\log m)^{1/2}.$$

En remplaçant  $f_2$  et  $f_3$  par leurs sommes de La Vallée Poussin–Jackson d'ordre  $2\nu$ , on commet une erreur qui tend vers 0 sous la condition

$$(**) \quad m \ll d\nu\varepsilon.$$

Sous la condition

$$(***) \quad ad^2 \rightarrow \infty$$

(qui renforce la première partie de (\*)), on commet une erreur qui tend vers 0 en remplaçant  $\phi \exp(2\pi i\theta)$  et  $\phi_1 \exp 2\pi i\theta_1$  par les polynômes trigonométriques  $g$  et  $g_1$  des lemmes 3 et 6 (on a écrit  $(\theta_1(x)$  pour  $\theta(x + \frac{1}{2}) - \theta(\frac{1}{2})$ ). Après ces substitutions,  $F$  est remplacé par un polynôme trigonométrique dont les coefficients sont voisins de  $a^{-1/2} \phi\left(\frac{n}{a}\right)$ , si l'on a

$$(**) \quad dm^{-1/2} (\log m)^{1/2} \ll a^{-1/2}.$$

On décompose ce polynôme trigonométrique en trois, de spectres  $[-N - 2\nu, -N + 2\nu]$ ,  $[-N + 2\nu, N - 2\nu]$ ,  $[N - 2\nu, N + 2\nu]$ , auxquels on applique le lemme 2, de façon à obtenir finalement

$$p(x) = \sum_{-N-2\nu}^{N+2\nu} \hat{p}_n \exp(2\pi i n x)$$

avec  $|\hat{p}_n|$  constant ( $= a^{-1/2} + o(a^{-1/2})$ ). L'erreur  $\|p - F\|_\infty$  est  $o(1)$  si l'on a, outre les conditions précédentes, une condition un peu plus forte que (\*\*), à savoir

$$(***) \quad dm^{-1/2} (\log m)^{1/2} \ll a^{-1/2} (\log a)^{-1}.$$

Alors on a la conclusion

$$|p(x)| = 1 + o(1) + O(\varepsilon) \quad (a \rightarrow \infty).$$

Pour terminer la démonstration, il suffit de vérifier qu'on peut choisir  $\varepsilon \ll 1$ ,

$v \ll a \ll a \log^2 a \ll a_1$  et  $d \ll 1$ , de sorte que les conditions (\*), (\*\*), (\*\*\*)<sub>1</sub>, (\*\*\*)<sub>2</sub> soient compatibles. C'est immédiat.

Dans cette démonstration abrégée, le lemme 3 n'est utilisé qu'avec une fonction  $\phi_0$  qui est une fonction indicatrice d'intervalle. Donnons une dernière application, où il faudra utiliser toute la force du lemme 3—et renforcer aussi de façon convenable le lemme 2. Nous laissons les détails au lecteur.

**PROPOSITION 5.** Soit  $w(x)$  une fonction 1-périodique strictement positive, continue et à variation bornée. Il existe une suite de polynômes trigonométriques

$$P_\mu(x) = \sum_{|n| \leq \mu} (2\mu + 1)^{-1/2} w(n/2\mu) \exp(2\pi i(nx - \theta_{\mu,n}))$$

tels que  $|P_\mu(x)| = w(x) + o(1)$  uniformément par rapport à  $x$ .

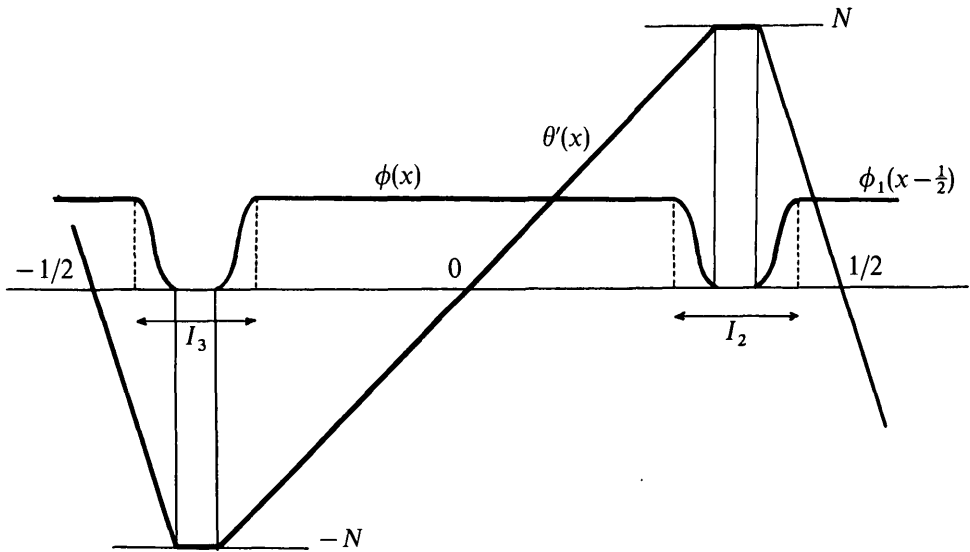


Figure 4

### Bibliographie

1. E. Beller, "Polynomial extremal problems in  $L^p$ ", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 30 (1971), 249–259.
2. E. Beller and D. J. Newman, "An  $L^1$  extremal problem for polynomials", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 29 (1971), 474–481.
3. J. S. Byrnes, "On polynomials with coefficients of modulus one", *Bull. London Math. Soc.*, 9 (1977), 171–176.
4. P. Erdős, "Some unsolved problems", *Michigan Math. J.*, 4 (1957), 291–300.
5. T. Körner, "On a polynomial of J. S. Byrnes", *This Bull. London Math. Soc.*, 219–224.
6. J. E. Littlewood, "On polynomials  $\sum_{n=0}^N \pm z^n$ ,  $\sum_{n=0}^N e^{a_n i} z^n$ ,  $z = e^{i\theta}$ ", *J. London Math. Soc.*, 41 (1966), 367–376.
7. J. E. Littlewood, *Some problems in real and complex analysis*. (Heath and Co., Lexington, Mass., 1968).
8. W. Rudin, "Some theorems on Fourier coefficients", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10 (1959), 855–859.
9. H. S. Shapiro, "Extremal problems for polynomials and power series", Thèse, M.I.T. 1951.

Mathématiques,  
 Université de Paris-Sud,  
 91 Orsay,  
 France.