Το πρόβλημα του Kakeya

Σωτήρης Σκαπέρας

1 Εισαγωγή

Το 1917, ο Ιάπωνας μαθηματικός S. Kakeya έθεσε ένα πρόβλημα το οποίο είναι γνωστό ως «το πρόβλημα του Kakeya» (Kakeya needle problem). Το πρόβλημα έχει ως εξής: «Στην κλάση των σχημάτων, για τα οποία ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1 (needle) μπορεί να περιστραφεί κατά $360°$, με συνεχή τρόπο, μένοντας πάντα μέσα στο σχήμα, ποιό έχει το μικρότερο εμβαδόν;» Ο Kakeya υπέθεσε ότι ένα ισόπλευρο τρίγωνο με ύψος 1 είναι το μικρότερο σύνολο με αυτήν την ιδιότητα. Επίσης, παρατήρησε ότι αν αφαιρέσουμε τη συνθήκη της κυρτότητας τότε μπορούμε να πετύχουμε μικρότερο σύνολο που να ικανοποιεί την απαίτηση του προβλήματος.

Έτσι, ήρθε στην επιφάνεια η πιο ενδιαφέρουσα ερώτηση: Ζητείται το μικρότερο *όχι αναγκαστικά κυρτό* σύνολο που ικανοποιεί την απαίτηση του προβλήματος του Kakeya:

Ερώτηση: Υπάρχει μη-κυρτό σύνολο, με εμβαδόν μικρότερο από αυτό του ισοπλεύρου τριγώνου ύψους 1, μέσα στο οποίο μπορούμε να περιστρέψουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1, με συνεχή τρόπο, κατά $360°$;

Απάντηση: Ναι, για παράδειγμα αν θεωρήσουμε το *τριγωνικό υποκυκλοειδές* (δελτοειδές) που είναι εγγεγραμμένο σε έναν κύκλο με διάμετρο $3/2$.

Εξαιτίας της απομόνωσης της Ρωσίας, λόγω του εμφυλίου πολέμου, το πρόβλημα του Kakeya δεν ήταν γνωστό στους Ρώσους μαθηματικούς. Παρ¨ όλα αυτά, ο Ρώσος μαθηματικός Abram Samoilovitch Besicovitch έλυσε ένα ισοδύναμο πρόβλημα, το οποίοι είχε τεθεί σε ένα Ρώσικο περιοδικό το 1920. Το πρόβλημα είχε ως εξής: «Δοθείσης μιας Riemann ολοκληρώσιμης συνάρτησης στο επίπεδο, υπάρχει πάντα ένα ζεύγος αμοιβαία κάθετων αξόνων, ως προς τους οποίους το ολοκλήρωμα $\int f(x, y)\, dx$ υπάρχει για κάθε y και η συνάρτηση $y \mapsto \int f(x, y)\, dx$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη;»

Ο Besicovitch παρατήρησε ότι αν μπορούσε να κατασκευάσει ένα συμπαγές σύνολο F, με $\lambda(F) = 0$, το οποίο να περιέχει ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1 σε κάθε κατεύθυνση, τότε θα μπορούσε να απαντήσει αρνητικά σε αυτήν την ερώτηση, δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

Καθορίζουμε ένα ζευγάρι αξόνων, τέτοιο ώστε, κάθε ευθύγραμμο τμήμα στο F, το οποίο είναι παράλληλο σε έναν από τους δύο άξονες, δεν έχει ρητή απόσταση μέσα στο F. Καλούμε F_0 το σύνολο όλων των σημείων στο F που έχουν τουλάχιστον μία ρητή συντεταγμένη. Καθώς το F περιέχει ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1 σε κάθε κατεύθυνση, στην οποία τα σύνολα F_0 και F_0^c είναι πυκνά, υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα σε κάθε κατεύθυνση τέτοιο ώστε η $f = \chi_{F_0}$ *δεν* είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Ωστόσο, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε όλο το επίπεδο.

Ο Besicovitch στην πραγματικότητα πέτυχε την κατασκευή ενός τέτοιου συνόλου, το οποίο είναι γνωστό ως «σύνολο του Besicovitch». Η πρωτότυπη αυτή κατασκευή του, απλοποιήθηκε αργότερα από τους Perron (1928), Rademacher (1962), Schoenberg (1962), Besicovitch (1963) και Fischer (1971).

Θα περιγράψουμε μια τέτοια απλοποιημένη κατασκευή. Η βασική ιδέα της κατασκευής είναι να σχηματίσουμε ένα «δέντρο του Perron». Ένα τέτοιο σχήμα περιέχει ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους

1 σε κάθε κατεύθυνση, μεταξύ των διευθύνσεων της αριστερής και της δεξιάς πλευράς του αρχικού (ισοπλεύρου τριγώνου).

2 Το πρόβλημα του Kakeya

Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε βασίζεται κατά κύριο λόγο σε γεωμετρικά επιχειρήματα. Διατυπώνουμε ξανά το πρόβλημα του Kakeya:

> *Στην κλάση των σχημάτων, για τα οποία ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1 (needle) μπορεί να περιστραφεί κατά $360°$, με συνεχή τρόπο, μένοντας πάντα μέσα στο σχήμα, ποιό έχει το μικρότερο εμβαδόν;*

Ας κοιτάξουμε αρχικά κάποια γεωμετρικά σχήματα που ικανοποιούν το πρόβλημα.

(α) Προφανώς ο κύκλος με διάμετρο 1 είναι ένα στοιχείο της παραπάνω κλάσης. Και αυτό, γιατί, αν πάρω $|AB| = 1$ και τοποθετήσω το μέσο O στο κέντρο του κύκλου και περιστρέψω το AB κατά $360°$, το ευθύγραμμο τμήμα AB θα παραμένει πάντα εντός του κύκλου. Σημειώνουμε ότι η κίνηση αυτή είναι συνεχής και ότι το χωρίο έχει εμβαδόν

$$E = \pi \cdot \rho^2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} = 0.78\dots$$

(β) Ένα άλλο γεωμετρικό σχήμα που ανήκει στην κλάση αυτή και ικανοποιεί το πρόβλημα, είναι το ισόπλευρο τρίγωνο ABC με ύψος 1. Υπολογίζουμε αρχικά τα μήκη $|AB|$, $|AC|$, $|BC|$. Το ABC είναι ισόπλευρο τρίγωνο, άρα από την Ευκλείδεια Γεωμετρία, το ύψος AK είναι και διάμεσος και διχοτόμος. Ονομάζω $|KC| = |KB| = x$. Τότε, $|AC| = 2x$ και από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε ότι $(2x)^2 = 1 + x^2$ ή $4x^2 = 1 + x^2$ ή $3x^2 = 1$ ή $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Άρα

$$|AB| = |AC| = |BC| = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Έστω Λ, M τα μέσα των πλευρών AB, AC. Αν τοποθετήσουμε τώρα το μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα στην πλευρά AC, με τρόπο τέτοιο ώστε το ένα του άκρο να συμπίπτει με την κορυφή A, τότε το άλλο του άκρο O, θα είναι στο κομμάτι MC. Μπορούμε τώρα να περιστρέψουμε το AO γύρω από το A κατά $60°$, έτσι ώστε το ευθύγραμμο τμήμα AO, το οποίο έχει μήκος 1, να πέφτει πάνω στην πλευρά AB. Έπειτα αφήνουμε το AO να γλιστρήσει προς το B, ώστε το $B \equiv O$. Η παραπάνω διαδικασία γίνεται με συνεχή τρόπο.

Έπειτα κάνουμε το ίδιο με το ευθύγραμμο τμήμα BO', όπου το O' επιλέγεται στο AB έτσι ώστε $|BO'| = 1$. Περιστρέφουμε αυτό το ευθύγραμμο τμήμα κατά $60°$ γύρω από το B, και το ευθύγραμμο τμήμα BO' πέφτει πάνω στην πλευρά BC. Αφήνουμε έπειτα το BO' να γλιστρήσει προς το C, ώστε $C \equiv O'$. Τώρα το ευθύγραμμο τμήμα CO'' έχει μήκος 1, και το περιστρέφουμε κατά $60°$ γύρω από το C, και το ευθύγραμμο τμήμα CO'' πέφτει πάνω στην πλευρά AC. Μπορούμε τώρα να αφήσουμε το ευθύγραμμο τμήμα να γλιστρήσει προς το A και τώρα $O''C$ έχει μήκος 1 όπως και το αρχικό AO (και βρίσκεται πάνω στην AC, δηλαδή έχουμε κάνει πλήρη περιστροφή).

Έτσι, το ισόπλευρο τρίγωνο ικανοποιεί τελικά την απαίτηση του προβλήματος και έχει εμβαδόν

$$|ABC| = \frac{|BC| \cdot |AK|}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.58\dots$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι έχουμε μικρότερο εμβαδόν από τον κύκλο. (Σημειώνουμε ότι οι μοναδιαίες βελόνες περιστρέφονται πάντα εντός του ισοπλεύρου τριγώνου ABC).

(γ) Ένα *τριγωνικό υποκυκλοειδές* το οποίο έχει τις τρεις κορυφές του στην περιφέρεια ενός κύκλου με διάμετρο $\frac{3}{2}$ ανήκει επίσης σε αυτήν την κλάση των σχημάτων που ικανοποιούν το πρόβλημα του Kakeya.

Ορισμός. Με τον όρο υποκυκλοειδές, εννοούμε γενικά την καμπύλη που διαγράφει ένα σημείο επί της περιφέρειας ενός κύκλου, καθώς ο κύκλος ρολάρει στο εσωτερικό της περιφέρειας ενός δεύτερου κύκλου. Είναι γνωστό ότι η εφαπτόμενη σε ένα σημείο M του (τριγωνικού) υποκυκλοειδούς τέμνει τουποκυκλοειδές σε δύο σημεία K και L με $|KL| = 1$. Αν το άκρο του ευθυγράμμου τμήματος παραμένει σε επαφή με το δελτοειδές καθώς το άλλο άκρο το διατρέχει, τότε και τα δύο άκρα της μοναδιαίας βελόνας παραμένουν πάντα μέσα στο σχήμα. Η κίνηση και εδώ γίνεται με συνεχή τρόπο, άρα το τριγωνικό υποκυκλοειδές ανήκει στην «κλάση του Kakeya». Ο τύπος που δίνει το εμβαδόν είναι

$$E = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\pi a^2,$$

όπου a είναι η ακτίνα του κύκλου και n είναι το πλήθος των γωνιών του σχήματος. Αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$E = \frac{(3-1)\cdot(3-2)}{3^2}\cdot\pi\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{2\cdot 1}{9}\cdot\pi\cdot\frac{9}{16} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}.$$

Συνοψίζοντας, για το δελτοειδές (που γενικότερα είναι το κλειστό γεωμετρικό σχήμα που παράγεται από τρεις κορυφές οι οποίες συνδέονται με καμπύλες που χωρίζουν το σχήμα στο εσωτερικό *μη κυρτό* σύνολο και το εξωτερικό κυρτό) παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του είναι *ακριβώς το μισό* του εμβαδού του κύκλου με διάμετρο 1.

Εικαζόταν ότι το *υποκυκλοειδές* ήταν το γεωμετρικό σχήμα το οποίο *έδινε το ελάχιστο εμβαδόν.*

Το πρόβλημα προκάλεσε πολύ μεγάλο ενδιαφέρον. Το 1925 ο G. D. Birkhoff, ένας από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς εκείνης της εποχής, γράφοντας για κάποια ανοικτά προβλήματα στο βιβλιό του «The origin, nature and influence of relativity», πρώτα αναφέρει το λεγόμενο «Πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων» και έπειτα προσθέτει:

> *Μια ενδιαφέρουσα ερώτηση ήταν το πρόβλημα που τέθηκε από τον Ιάπωνα μαθηματικό Kakeya.*

Η λύση στο πρόβλημα του Kakeya δημοσιεύθηκε στο περιοδικό «Mathematische Zeitschrift» το 1928, και ανακοινώθηκε στην Αμερικανική Μαθηματική Εταιρεία από τον J. D. Tamarkin.

Η λύση δείχνει ότι η εικασία πως το υποκυκλοειδές είναι το μικρότερο δυνατό σύνολο που ικανοποιεί το πρόβλημα είναι λανθασμένη, και ότι στην πραγματικότητα *υπάρχουν σχήματα με οσοδήποτε μικρό εμβαδόν θέλουμε*, τα οποία επιτρέπουν σε ένα μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα να αλλάζει την κατεύθυνσή του κατά $360°$, κινούμενο με συνεχή τρόπο μέσα στο σύνολο.

3 Πρώτη απόδειξη: η δυϊκή προσέγγιση

3.1 Το σχέδιο

Παίρνουμε ένα τετράγωνο πλευράς 2 και το χωρίζουμε σε 4 ισοδύναμα ορθογώνια τρίγωνα, ενώνοντάς το με τις 4 κορυφές (ή φέρνοντας τις δύο διαγωνίους). Είναι γνωστό ότι οι διαγώνιοι ενός τετραγώνου τέμνονται κάθετα. Διαμερίζουμε στη συνέχεια κάθε υποτείνουσα σε n ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Έτσι έχουμε τώρα εκ κατασκευής $4n$ στοιχειώδη τρίγωνα, όλα ύψους 1. Είναι επίσης γνωστό ότι το κέντρο του τετραγώνου ισαπέχει από τις πλευρές του και ότι η απόσταση αυτή είναι το μισό της πλευράς του τετραγώνου. Απαριθμούμε τώρα τα στοιχειώδη αυτά τρίγωνα με τη σειρά με την οποία έρχονται, καθώς κινούμαστε πάνω στο σύνορο του τετραγώνου αντιωρολογιακά ($A \to B \to C \to D$). Οι διευθύνσεις των διαφόρων ευθυγράμμων τμημάτων που ενώνονται με την κορυφή καθενός από τα στοιχειώδη τρίγωνα σε κάθε σημείο της βάσης, έχουν εύρος $360°$. Το ίδιο θα εξακολουθήσει να ισχύει εάν δώσουμε παράλληλες μετατοπίσεις στα στοιχειώδη τρίγωνα.

Όπως θα δούμε, παράλληλες μετατοπίσεις μπορούν να γίνουν σε αυτά τα τρίγωνα που επιτυγχάνουν τέτοιο βαθμό επικάλυψης ώστε η συνολική περιοχή που καλύπτεται από τα τρίγωνα στην καινούρια τους θέση να είναι *όσο μικρή θέλουμε*.

Τώρα, αν τοποθετήσουμε το ένα άκρο του (μοναδιαίου) ευθύγραμμου τμήματος διαδοχικά στις κορυφές $O_1, O_2, \dots$ του πρώτου τριγώνου, του δεύτερου και ούτω καθεξής, στη θέση τους μετά τη μεταφορά και σε κάθε περίπτωση να περιστρέφεται στις θετικές κατευθύνσεις από τη μία πλευρά του τριγώνου προς την άλλη, το τμήμα θα περιστραφεί κατά $360°$. Όμως αυτή η κίνηση δεν θα είναι συνεχής, καθώς γίνεται η μετάβαση από το ένα τρίγωνο στο επόμενο, το τμήμα δεν θα παραμένει εντός της περιοχής του σχήματος.

Εξαλείφουμε αυτή τη δυσκολία με τις λεγόμενες *συνδέσεις του Pal*.

Έστω DEF, GHI ένα ζευγάρι διαδοχικών στοιχειωδών τριγώνων, μετά από μια παράλληλη μετατόπιση, και έστω $\varepsilon > 0$, αυθαίρετα μικρό. Οι DF και GH είναι παράλληλες. Θεωρούμε σημείο K της HI, τέτοιο ώστε $HK/HI < \varepsilon/8$. Έστω ότι οι DF, GK τέμνονται στο L, και τα τρίγωνα LMN, GHK είναι ισοδύναμα. Έχουμε

$$|LMN| = |GHK| < \frac{\varepsilon}{8}|GHI|.$$

Το σχήμα που αποτελείται από τις γραμμές GL, DL και το τρίγωνο LMN θα καλείται η *σύνδεση*.

Παρατηρούμε ότι το εμβαδόν της σύνδεσης είναι μικρότερο από $\varepsilon/8$ επί το εμβαδόν ενός στοιχειώδους τριγώνου. Συνδέοντας όλα τα ζεύγη των διαδοχικών στοιχειωδών τριγώνων παίρνουμε $4n$ συνδέσεις με συνολικό εμβαδόν μικρότερο από

$$\frac{\varepsilon}{8}|ABCD| = \frac{varepsilon}{2}.$$

Η σύνδεση, προστιθέμενη στα τρίγωνα DEF και GHI, επιτρέπει στο μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα να περάσει από το DEF στο GHI, παραμένοντας πάντα στην περιοχή του τριγώνου ή της σύνδεσης. Έτσι, από τη θέση του ευθύγραμμου τμήματος στην DF, αφήνουμε το ευθύγραμμο τμήμα να «γλιστρήσει» κατά μήκος της DL, μέχρι το αριστερό του άκρο να ταυτιστεί με το L, έπειτα το περιστρέφουμε (αντιωρολογιακά) γύρω από το L, μέχρις ότου πέσει πάνω στην LN, και έπειτα το μετατοπίζουμε κατά μήκος της LG, μεχρι το άλλο του άκρο (το δεξί) να ταυτιστεί με το G. Έτσι, περνάει στο δεύτερο τρίγωνο.

Επομένως, το πρόβλημα ανάγεται σε ένα πρόβλημα «εύρεσης παράλληλων μετατοπίσεων» των στοιχειωδών τριγώνων, ώστε το συνολικό εμβαδόν να είναι μικρό.

Ο Perron το 1929 δημοσίευσε μια νέα απόδειξη, με την οποία η παραπάνω διαδικασία απλοποιείται. Αργότερα, ο I. J. Schoenberg πραγματοποίησε την κατασκευή του Perron αντίστροφα. Αυτή η εκδοχή έχει το πλεονέκτημα να απλουστεύει τις λεπτομέρειες και να είναι πιο εύκολη στην απεικόνιση. Αυτήν την ιδέα θα υιοθετήσουμε εδώ.

3.2 Η δυϊκή προσέγγιση

Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων του επιπέδου και έναν ακέραιο $p \geqslant 2$. Κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο OAB από το αρχικό τετράγωνο $ABCD$ (πλευράς 2), τοποθετώντας την υποτείνουσα μήκους 2 στον x-άξονα (υπενθύμιση: οι διαγώνιοι κάθε τετραγώνου είναι ίσες και διχοτομούνται). Η βάση AB του τριγώνου χωρίζεται σε $n = 2^{p-2}$ ίσα τμήματα και έτσι προκύπτουν n στοιχειώδη τρίγωνα με κορυφή το κέντρο O.

Η παρακάτω εικόνα δείχνει την περίπτωση $p = 5$, $n = 2^{5-2} = 8$.

Στη συνέχεια φέρνουμε ευθείες $y = \frac{k}{p}$, για $k = 1, 2, \ldots, p$, και καλούμε την $y = \frac{k}{p}$ την *ευθεία του k-οστού επιπέδου.*

Έπειτα κατασκευάζουμε p ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$, καθένα με υποτείνουσα στον x-άξονα, και με κορυφές (ορθές γωνίες) στα επίπεδα $1, 2, \ldots, p$ αντιστοίχως. Παρατηρούμε ότι $\Delta_p = OAB$.

Για κάθε $k = 3, 4, \ldots, p$, η βάση του τριγώνου Δ_k χωρίζεται σε 2^{k-2} ίσα τμήματα και τα στοιχειώδη τρίγωνα κατασκευάζονται στα υποδιαστήματα κάθε βάσης. Βλέπουμε ότι το Δ_{k+1} χωρίζεται σε *διπλάσια* στοιχειώδη τρίγωνα από το Δ_k. Το Δ_2 δεν χωρίζεται σε στοιχειώδη τρίγωνα, το Δ_3 χωρίζεται σε δύο, το Δ_4 σε τέσσερα, το Δ_5 σε οχτώ, το Δ_6 σε δεκαέξι, κ.ο.κ.

Εκχωρούμε τώρα «ετικέτες» στα στοιχειώδη τρίγωνα Δ_k ως εξής: θα προσδιορίζονται από αριστερά προς τα δεξιά ως $r_1^k, r_2^k, r_3^k, \ldots, r_j^k, \ldots, r_{2^{k-2}}^k$. Ο εκθέτης k δείχνει ότι το r_j^k είναι κομμάτι του τριγώνου Δ_k, ενώ ο δείκτης j δείχνει ότι το r_j^k είναι το j-οστό στοιχειώδες τρίγωνο στο Δ_k (πάντα από τα αριστερά προς τα δεξιά). Το Δ_2 δεν χωρίζεται σε στοιχειώδη τρίγωνα και θα λέμε ότι συμπίπτει με το στοιχειώδες τρίγωνο r_1^2. Το Δ_3 έχει τα r_1^3, r_2^3 ως στοιχειώδη, το Δ_4 τα $r_1^4, r_2^4, r_3^4, r_4^4$, κ.ο.κ.

Ξεκινάμε με το τρίγωνο $r_1^2 = LON$. Χωρίζουμε το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα OLM, ONM, φέρνοντας τη διάμεσο OM, και τα επεκτείνουμε σε δύο όμοια τρίγωνα PLR και QNS, στο επίπεδο 3. Καλούμε αυτή τη διαδικασία *διχοτόμηση και επέκταση.* Το αποτέλεσμα είναι να έχουμε δύο ισοδύναμα τρίγωνα στα r_1^3, r_2^3 του τριγώνου Δ_3.

Όμοια ορίζεται η διαδικασία της διχοτόμησης και επέκτασης των τριγώνων r_j^k, για κάθε $k > 2$: Το r_j^k διχοτομείται σε δύο τρίγωνα από την διάμεσο που φέρνουμε από την κορυφή και καθένα από τα τρίγωνα αυτά επεκτείνεται στο επόμενο επίπεδο. Η διαδικασία μετασχηματίζει το r_j^k, με παράλληλες μετατοπίσεις στα $r_{2j-1}^{k+1}, r_{2j}^{k+1}$ και εφαρμόζεται στο σύνολο όλων των τριγώνων r_j^k. Έτσι μετασχηματίζει το σύνολο σε ένα σύνολο στοιχειωδών τριγώνων του επόμενου επιπέδου $(k + 1)$.

Παρακάτω είναι η περίπτωση $k = 3$:

Και εδώ, η γενική περίπτωση:

Το κομμάτι του Δ_k (ή οποιοδήποτε άλλο κομμάτι στοιχειώδους τριγώνου r_j^k του Δ_k) το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στα επίπεδα $k - 1$ και k, θα καλείται η *κορυφή* του Δ_k (ή του r_j^k αντιστοίχως).

Παρατηρούμε ότι η κορυφή του Δ_k είναι ισοδύναμη με το Δ_1, καθώς και ότι το άθροισμα των εμβαδών όλων των στοιχειωδών τριγώνων που βρίσκονται ανάμεσα στα επίπεδα $(k-1)$ και (k) (κορυφή) ισούται με το εμβαδόν της κορυφής του Δ_k, δηλαδή $= |\Delta_1|$. Σχηματικά, έχουμε το εξής:

Ας δούμε τώρα τι προκύπτει σχετικά με τη μεταβολή του εμβαδού (εάν υπάρχει) όταν εφαρμόζουμε τη διαδικασία διχοτόμησησκαι επέκτασης σε ένα τρίγωνο.

Θεωρούμε ένα στοιχειώδες τρίγωνο $r_j^k = LMN$ με την κορυφή του, N, στο k-επίπεδο. Έστω NP η διάμεσος, και LPN, MPN τα τρίγωνα που δημιουργούνται. Επεκτείνουμε το LPN στο $(k + 1)$-επίπεδο (προς τα δεξιά) και παίρνουμε ένα όμοιο τρίγωνο LRQ. Κάνοντας το ίδιο για το MPN (προς τα αριστερά) παίρνουμε ένα όμοιο τρίγωνο MTS.

Τα δύο τρίγωνα LRQ και MTS καλύπτουν μαζί το αρχικό τρίγωνο LMN, συν τα δύο «τελικά κομμάτια» SNV και QNU. Ισχύει

$$|SNV| = |QNU| = |NUV|.$$

Άρα, τα δύο επικαλυπτόμενα τρίγωνα καλύπτουν μια περιοχή ίση με αυτήν του αρχικού τριγώνου *συν δύο φορές* την περιοχή του άνω άκρου του LMN.

Παρατηρούμε ότι για την κατασκευή των ακραίων κομματιών του LMN, πρέπει απλώς να γνωρίζουμε την κορυφή του τριγώνου LMN. Ο κανόνας μετά έρχεται φυσιολογικά:

> *Επεκτείνουμε τις πλευρές LN και MN στο $(k+1)$-επίπεδο και ενώνουμε τα άκρα με τα σημεία των πλευρών στο $(k-1)$-επίπεδο.*

Αν αρχίσουμε με ένα πλήρες σύνολο στοιχειωδών τριγώνων του Δ_k και εφαρμόσουμε διχοτόμηση και επέκταση σε καθένα από αυτά τα τρίγωνα, θα καταλήξουμε σε ένα σύνολο παράλληλων μετατοπίσεων όλων των στοιχειωδών τριγώνων του Δ_{k+1} και θα υπάρχει μια αύξηση του εμβαδού *το πολύ* ίση με το διπλάσιο του αθροίσματος των εμβαδών των άνω τμημάτων των τριγώνων (η έκφραση «το πολύ» είναι απαραίτητη γιατί μπορεί να υπάρχουν επικαλύψεις).

Καθώς το άθροισμα των εμβαδών των άνω άκρων ενός πλήρους συνόλου στοιχειωδών τριγώνων είναι ίσο με το εμβαδόν του Δ_1, έχουμε έτσι ότι η συνολική αύξηση του εμβαδού είναι το πολύ $2|\Delta_1|$.

Αυτό το συμπέρασμα οδηγεί αυτομάτως στη λύση του προβλήματος. Ξεκινάμε με το τρίγωνο $\Delta_2 = r_1^2$ και εφαρμόζουμε διχοτόμηση και επέκταση, και μετασχηματίζοντας περνάμε στο Δ_3. Κάνοντας την *ίδια διαδικασία σε καθένα από τα καινούρια τρίγωνα που δημιουργούνται*, παίρνουμε ένα σύνολο παράλληλων μετατοπίσεων στοιχειωδών τριγώνων του Δ_4, κ.ο.κ.

Μετά από $p-2$ εφαρμογές της διαδικασίας, θα καταλήξουμε σε μια σειρά παράλληλων μετατοπίσεων των στοιχειωδών τριγώνων του $\Delta_p = \Delta$. Καθώς η αύξηση του εμβαδού σε κάθε βήμα της διαδικασίας είναι $\leqslant 2|\Delta_1|$, το εμβαδόν του τελικού σχήματος θα είναι

$$\begin{aligned} E \leqslant |\Delta_2| + 2(p-2)|\Delta_1 &= \frac{4}{p^2} + 2(p-2)|\delta_1| \\ -\frac{4}{p^2} + 2(p-2)\frac{1}{p^2} &= \frac{2}{p}. \end{aligned}$$

Παίρνοντας $p > \frac{16}{\varepsilon}$ επιτυγχάνουμε εμβαδόν $E < \frac{\varepsilon}{8}$. Με τους ίδιους μετασχηματισμούς στα υπόλοιπα $3n$ στοιχειώδη τρίγωνα, παίρνουμε συνολικό εμβαδόν $< \frac{\varepsilon}{2}$. Προσθέτοντας τώρα $4n-1$ συνδέσεις συνολικού εμβαδού μικρότερου από $\varepsilon/2$, παίρνουμε ένα σύνολο E_0 με εμβαδόν $|E_0| < \varepsilon$, μέσα στο οποίο το μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να περιστραφεί κατά 360° με συνεχή τρόπο, και αυτό ολοκληρώνει την απάντηση στο πρόβλημα του Kakeya.

Για να οπτικοποιήσουμε λίγο καλύτερα τη διαδικασία των μετασχηματισμών, κάνουμε ένα σχήμα για τα σύνολα $\Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5$.

Το πρώτο σχήμα δείχνει το τρίγωνο $\Delta_2 \equiv \Sigma_2$. Στο (β), με διχοτόμηση και επέκταση παίρνουμε το σύνολο Σ_3 που είναι το σύνολο των παράλληλων μετατοπίσεων του τριγώνου Δ_3. Το δεύτερο σχήμα δείχνει την δεύτερη διαδικασία: στο (α) βλέπουμε το Σ_3, στο (β) το σύνολο Σ_4, και στο (γ) το τρίγωνο Δ_4. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο φτάνουμε τελικώς στο Σ_p.

Το σχήμα Σ_p ονομάστηκε από τον Schoenberg «δέντρο του Perron-(Schoenberg)».

4 Σύνολα Kakeya: δεύτερη προσέγγιση

Ένα σύνολο Kakeya είναι ένα συμπαγές σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^n$ το οποίο περιέχει ένα μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα σε κάθε κατεύθυνση. Συμβολικά: για κάθε $\xi \in S^{n-1}$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $x + t\xi \in E$ για κάθε $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Για παράδειγμα, έχουμε δει ότι ένας δίσκος διαμέτρου 1 είναι ένα τέτοιο σύνολο, με εμβαδόν $\frac{\pi}{4}$ (για $n = 2$). Το ζήτημα είναι να βρούμε σύνολα Kakeya με πολύ μικρό μέτρο Lebesgue. Όπως απέδειξε ο Besicovitch, υπάρχουν σύνολα Kakeya με μηδενικό μέτρο Lebesgue. Δίνουμε εδώ μια εναλλακτική απόδειξη (παρόμοια με την αρχική) γραμμένη σε διαφορετικό ύφος.

Λήμμα 4.1. *Θεωρούμε ένα τρίγωνο T με βάση σε μια ευθεία L. Χωρίζουμε τη βάση του T σε δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Έτσι δημιουργούνται δύο γειτονικά τρίγωνα T_1, T_2, ισεμβαδικά, με βάσεις b και ύψος h. Έστω $1/2 < \alpha < 1$. Αν το T_2 ολισθαίνει προς τα αριστερά (παράλληλη μετατόπιση) κατά μήκος της ευθείας L, η απόσταση $2(1-a)b$ «παίζει» κατά μήκος της L, και το σχήμα S που προκύπτει αποτελείται από ένα τρίγωνο T' όμοιο με το αρχικό T, με $|T'| = \alpha^2|T|$ και δύο βοηθητικά τρίγωνα A_1, A_2. Με αυτήν την κατασκευή, το εμβαδόν του S δίνεται από τον τύπο*

$$|S| = (\alpha^2 + 2(1-\alpha)^2) \cdot |T|.$$

Απόδειξη. Θα υπολογίσουμε τα εμβαδά των τριγώνων A_1, A_2 και T', όπου

$$|S| = |A_1| + |A_2| + |T'|.$$

Το τρίγωνο T' είναι όμοιο με το T και η βάση του T' έχει μήκος $2b - 2(1-a)b = 2ab$. Προκύπτει λοιπόν ότι

$$|T'| = a^2|T|.$$

Για να υπολογίσουμε τώρα το εμβαδόν των τριγώνων A_1 και A_2, φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς τη βάση L, η οποία περνάει από την κοινή κορυφή των A_1 και A_2. Έτσι παίρνουμε τέσσερα τρίγωνα $A_{1u}, A_{1\ell}$, $A_{2u}, A_{2\ell}$. Προφανώς το A_{1u} είναι όμοιο με το T_1, με λόγο ομοιότητας $1-a$, και ομοίως το A_{2u} είναι όμοιο με το T_2, με λόγο ομοιότητας $1-a$. Επιπλέον, το $A_{2\ell}$ είναι ίσο με το A_{1u} και το $A_{1\ell}$ είναι ίσο με το A_{2u}. Συνεπώς, όλα τα τρίγωνα έχουν βάση $\frac{1}{2}(2(1-a)b) = (1-a)b$ και ύψος $(1-ah$, άρα

$$|A_{1u}| = |A_{1\ell}| = |A_{2u}| = |A_{2\ell}| = \frac{1}{2}(1-a)^2bh = \frac{1}{2}(1-a)^2|T|.$$

Έπεται ότι

$$|S| = |T'| + |A_1 + |A_2| = (a^2 + 2(1-a)^2)|T|.$$

□

Αυτή η βασική διαδικασία είναι το καθοριστικό βήμα για την κατασκευή ενός συνόλου Besicovitch. Θα καλούμε τρίγωνα όπως το T' «κεντρικά» και τρίγωνα όπως τα A_1, A_2 «άκρα». Η κατασκευή θα έχει ένα πολύ μικρό «κεντρικό» τρίγωνο και πολλά «άκρα».

Θεώρημα 4.2. *Θεωρούμε ένα τρίγωνο T με τη βάση του σε μια ευθεία L. Χωρίζουμε τη βάση σε 2^k ίσα ευθύγραμμα τμήματα και ενώνουμε τα σημεία με την κορυφή ώστε να δημιουργηθούν 2^k στοιχειώδη τρίγωνα $T_1, T_2, \ldots, T_{2^k}$. Αν το k είναι αρκετά μεγάλο, τότε υπάρχει μετατόπιση κατά μήκος της L, για κάθε T_i ($1 \leqslant i \leqslant 2^k$), τέτοια ώστε το εμβαδόν του σχήματος S που προκύπτει, το οποίο είναι η ένωση των μετατοπισμένων T_i, να είναι όσο μικρό θέλουμε. Επιπλέον, για δοθέν ανοιχτό σύνολο V που περιέχει το T, αυτή η μετατόπιση μπορεί να γίνει έτσι ώστε $S \subset V$, παίρνοντας εφόσον χρειάζεται το k μεγαλύτερο.*

Απόδειξη. Στο πρώτο βήμα, θεωρούμε διαδοχικά ζευγάρια στοιχειωδών τριγώνων T_{2i-1}, T_{2i}, $(1 \leqslant i \leqslant 2^{k-1})$. «Μετακινούμε» το T_{2i} κατά μήκος της L, όπως περιγράψαμε στο Λήμμα 4.1, για να πάρουμε ένα σχήμα S_i^1 το οποίο αποτελείται από ένα «κεντρικό» τρίγωνο T_i^1 (όμοιο με το $T_{2i} \cup T_{2i-1}$) και δύο «άκρα», τα A_{2i}^1 και A_{2i-1}^1. Ο συντελεστής a καθορίζεται κατά την διάρκεια της κατασκευής και θα προσδιοριστεί αργότερα.

Σύμφωνα με το Λήμμα 4.1 έχουμε

$$|S_i^1| = (a^2 + 2(1-a)^2)|T_{2i-1} \cup T_{2i}|.$$

Τονίζουμε ότι για κάθε i, η μία πλευρά του τριγώνου T_{2i-1}^1 είναι παράλληλη και ίση με την απέναντι πλευρά του T_{2i}^1. Έτσι μπορούμε να μετατοπίσουμε το S_i^1 με τέτοιο τρόπο ώστε τα 2^{k-1} κεντρικά τρίγωνα του T_i^1 να σχηματίζουν ένα «κεντρικό» σύνολο το οποίο είναι όμοιο με το αρχικό τρίγωνο T.

Κατά τη διάρκεια της κατασκευής μπορεί να υπάρξουν επικαλύψεις μεταξύ των «άκρων» του S_i^1, αν και δεν θα το λάβουμε υπόψιν μας.

Στο δεύτερο βήμα δουλεύουμε με διαδοχικά S_i^1. Για $1 \leqslant i \leqslant 2^{k-2}$, μετατοπίζουμε το S_{2i} σχετικά με το S_{2i-1} και παίρνουμε 2^{k-2} αντίτυπα του S_i^2. Το συνολικό εμβαδόν του «κεντρικού» είναι $a^2 \cdot a^2|T|$, και το εμβαδόν τον «άκρων» δεν ξεπερνά το $2(a-)a^2|T|$. Έτσι,

$$\sum_{i=1}^{2^{k-2}} |S_i^2| \leqslant (a^4 + 2(1-a)^2 + 2(a-1)^2a^2)|T|.$$

Στο r-βήμα $(2 \leqslant r \leqslant k)$ μετατοπίζουμε τα S_i^{r-1} $(1 \leqslant i \leqslant 2^{k-r+1})$ όπως περιγράψαμε στο δεύτερο βήμα, και παίρνουμε 2^{k-r} σχήματα $S_1^{r+1}, S_2^{r+1}, \ldots, S_{2^{k-r}}^{r+1}$.

Σε κάθε βήμα, το εμβαδόν των «κεντρικών» θα πολλαπλασιάζεται επί a^2 και το εμβαδόν τών «άκρων» θα είναι το πολύ $2(1-a)^2a^{2r-2}|T|$. Τελικά καταλήγουμε σε ένα απλό σχήμα $S_1^k := S$ για το οποίο ισχύει

$$|S| \leqslant \left(a^{2k} + 2(1-a)^2 \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2\right)|T|,$$

όπου

$$\begin{aligned} 2(1-a)^2 \sum_{i=0}^{n-1} a^{2i} &\leqslant 2(1-a)^2 \sum_{i=0}^{\infty} a^{2i} \\ &= \frac{2(1-a)^2}{1-a^2} = 2\frac{1-a}{1+a} < 2(1-a), \end{aligned}$$

άρα

$$|S| \leqslant (a^{2k} + 2(1-a))|T|.$$

Παίρνοντας τώρα το a πολύ κοντά στο 1 $(a \simeq 1)$ και επιλέγοντας το k πολύ μεγάλο, βλέπουμε ότι η ποσότητα $a^{2k} + 2(1-a)$ γίνεται αρκούντως μικρή.

Έστω τώρα V ένα ανοικτό σύνολο με $T \subset V$. Παρατηρούμε ότι, σταθεροποιώντας τη θέση ενός στοιχειώδους τριγώνου T_1 κατά τη διάρκεια της κατασκευής, κανένα στοιχειώδες τρίγωνο δεν θα μετακινηθεί περισσότερο από το μήκος της βάσης του T, σχετικά με το T_1.

Διαιρούμε το T σε υποτρίγωνα με βάση μήκους το πολύ ε, και εφαρμόζουμε την κατασκευή σε καθένα από αυτά, δηλαδή κατασκευάζουμε $\frac{1}{\varepsilon}$ δέντρα, τα οποία μαζί αποτελούν ένα σύνολο S' με όσο μικρό εμβαδόν θέλουμε, όπου για κάθε σημείο του S', η απόστασή του από το T θα είναι το πολύ ε. Αν το ε είναι αρκετά μικρό, τότε $S' \subset V$. $\square$

Θεώρημα 4.3. *Για κάθε $n \geqslant 2$ υπάρχει σύνολο $F \subset \mathbb{R}^n$ με μηδενικό n-διάστατο μέτρο Lebesgue, το οποίο περιέχει ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1 σε κάθε κατεύθυνση.*

Απόδειξη. Για $n = 2$ κατασκευάζουμε ένα σύνολο F_1, με $|F_1| = 0$, το οποίο περιέχει ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1 σε κάθε κατεύθυνση, μέσα σε έναν τομέα $60°$. Περιστρέφοντας τα «αντίγραφα» του F_1 και παίρνοντας την ένωσή τους, έχουμε το επιθυμητό σύνολο,

Έστω S_0 ένα ισόπλευρο τρίγωνο με ύψος 1. Έστω ακόμη V_0 ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει το S_0, τέτοιο ώστε η κλειστή θήκη $\overline{V_0}$ του V_0 να μην είναι«πολύ μεγάλη», για παράδειγμα $|\overline{V_0}| \leqslant 2|S_0|$. Εφαρμόζουμε την κατασκευή του Θεωρήματος 4.2 στο S_0 και παίρνουμε ένα σύνολο $S_1 \subset V_0$ με $|S_1| \leqslant 2^{-2}$. Καθώς το S_1 είναι πεπερασμένη ένωση από τρίγωνα, υπάρχει *ανοιχτό* σύνολο V_1 τέτοιο ώστε $S_1 \subset V_1 \subset V_0$ και $|\overline{V_1}| \leqslant 2|S_1|$.

Ανάλογα, εφαρμόζουμε ξανά το Θεώρημα 4.2 στο S_{i-1} και παίρνουμε ένα σύνολο S_i, το οποίο ικανοποιεί τα εξής:

(i) $|S_i| \leqslant 2^{-i-1}$.

(ii) Υπάρχει ανοιχτό σύνολο V_i τέτοιο ώστε

$$S_i \subset V_i \subset V_{i-1} \quad \text{και} \quad |\overline{V_i}| \leqslant 2|S_i|.$$

Ορίζουμε

$$F_1 := \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{V_i}.$$

Θα δείξουμε ότι το F_1 έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες. Προφανώς,

$$|F_1| = 0.$$

Από την άλλη πλευρά, γνωρίζουμε ότι κάθε S_i, άρα και κάθε $\overline{V_i}$, περιέχει ένα μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα σε κάθε κατεύθνση θ, το οποίο σχηματίζει γωνία τουλάχιστον $60°$ με τη βάση. Έστω M_i ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1, με μια τέτοια κατεύθυνση θ και $M_i \subset \overline{V_i}$. Για σταθερό j, βλέπουμε ότι $M_i \subset \overline{V_j}$ για κάθε $i \geqslant j$ και ότι το $\overline{V_j}$ είναι *συμπαγές* σύνολο. Έτσι, η ακολουθία $\{M_i\}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε ένα μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα M με διεύθυνση θ. Άρα, για κάθε j έχουμε $M_i \subset \overline{V_j}$ αν $i \geqslant j$, και επίσης $M \subset \overline{V_j}$ για κάθε j. Επομένως,

$$M \subset \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{V_i} = F_1.$$

Για $n > 2$ παίρνουμε ένα διδιάστατο σύνολο Besicovitch F_2. Τότε το σύνολο

$$F := F_2 \times \mathbb{R}^{n-2}$$

έχει μέτρο Lebesgue $|F| = 0$ και περιέχει ένα μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα σε κάθε κατεύθυνση. $\square$

5 Fractal σύνολα και fractal διάσταση

5.1 Fractals

Είδαμε ότι υπάρχουν σύνολα Kakeya με μηδενικό μέτρο Lebesgue. Ωστόσο αποδεικνύεται ότι πολλά προβλήματα στην Ανάλυση απαιτούν περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το μέγεθος αυτών των συνόλων, συγκεκριμένα την «fractal διάστασή» τους. Υπάρχουν αρκετές έννοιες fractal διάστασης. Στη μελέτη των συνόλων Kakeya, σημαντικό ενδιαφέρον παρουσιάζουν η διάσταση Minkowski και η διάσταση Hausdorff. Για σύνολα όπως ευθείες, τετράγωνα ή κύβοι, οι διαστάσεις Hausdorff και Minkowski συμπίπτουν (και ταυτίζονται με την συνήθη έννοια διάστασης). Ωστόσο, η fractal διάσταση δεν είναι κατ¨ ανάγκη φυσικός αριθμός.

Ορισμός 5.1. Ένα fractal σύνολο είναι ένα μαθηματικό σύνολο το οποίο έχει fractal διάσταση η οποία συνήθως υπερβαίνει την τοπολογική του διάσταση και μπορεί να μην είναι ακέραιος αριθμός. Τα fractals είναι συνήθως *αυτο-όμοια σύνολα*, όπου ο όρος «αυτο-όμοια» σημαίνει ότι είναι *ίδια από κοντά και από μακρυά.* Τα fractals μπορεί να είναι ακριβώς τα ίδια σε κάθε κλίμακα ή μπορεί να είναι σχεδόν ίδια σε διαφορετικές κλίμακες. Συνήθως, τα Fractals είναι *πουθενά διαφορίσιμα* (βλέπε παρακάτω).

Ο όρος «fractal» αναφέρθηκε για πρώτη φορά από τον Benoit Mandelbrot το 1975, και προέρχεται από την λατινική λέξη «fractus» που σημαίνει «σπασμένος». Τον χρησιμοποίησε έχοντας ως σκοπό να επεκτείνει την έννοια της θεωρητικής κλασματικής διάστασης σε γεωμετρικά μοτίβα στη φύση. Υπάρχει κάποια διαφωνία ανάμεσα στους μαθηματικούς σχετικά με το πώς θα πρέπει να οριστεί η έννοια του fractal. Η γενική συναίνεση είναι ότι τα fractals είναι (απείρως) αυτο-όμοιες επαναλαμβανόμενα μαθηματικά σύνολα με κλασματική διάσταση. Η έννοια του fractal δεν περιορίζεται όμως σε γεωμετρικά σχήματα, αλλά περιγράφει επίσης διαδικασίες στο χρόνο.

Λέγοντας ότι τα fractals είναι «πουθενά διαφορίσιμα» εννοούμε, με λίγα λόγια, ότι δεν μπορούν να μετρηθούν με παραδοσιακούς τρόπους. Αν έχουμε, για παράδειγμα, μια κυματική (μη-fractal) καμπύλη και προσπαθούμε να βρούμε το μήκος της, ένας τρόπος είναι να θεωρήσουμε ευθύγραμμα τμήματα (τα οποία μπορούν να μετρηθούν) αρκούντως μικρά, να τα τοποθετήσουμε πάνω στα κύματα (από το ένα άκρο στο άλλο) και να κάνουμε τη μέτρηση με μια μεζούρα. Αλλά σε μια κυματική fractal καμύλη, δεν μπορεί κάποιος να βει τέτοια μικρά ευθύγραμμα τμήματα και να τα προσαρμόσει πάνω στην καμπύλη, καθώς η κυματομορφή πάντα θα επανεμφανίζεται, έστω και σε μικρότερη κλίμακα, τραβώντας λίγο περισσότερο από το μέτρο της μεζούρας κάθε φορά.

5.2 Fractal διάσταση

Ορισμός 5.2. Με τον όρο *fractal διάσταση* εννοούμε έναν δείκτη για τον χαρακτηρισμό των fractal μοτίβων (ή fractal συνόλων). Συγκεκριμένα, ποσοτικοποιούμε την πολυπλοκότητά τους, ως *αναλογία* της μεταβολής στη λεπτομέρεια, με την αλλαγή της κλίμακας.

Διάφοροι τύποι κλασματικών διαστάσεων μπορούν να μετρηθούν θεωρητικά και εμπειρικά. Οι fractal διαστάσεις χρησιμοποιούνται για να χαρακτηρίσουν ένα ευρύ φάσμα αντικειμένων, που εμφανίζονται σε αφηρημένα ή πρακτικά πλαίσια, όπως: στροβιλισμός, υδρογραφικά δίκτυα, αστική ανάπτυξη, ιατρική και τάσεις της αγοράς.

Η βασική ιδέα των κλασματικών διαστάσεων έχει μακρά ιστορία στα Μαθηματικά. Εφαρμόστηκαν για πρώτη φορά ως ένας δείκτης που χαρακτηρίζει πολύπλοκα γεωμετρικά σχήματα, για τα οποία οι λεπτομέρειες ενδιαφέρουν περισσότερο από την γενική εικόνα. Για σύνολα που περιγράφουν *απλά γεωμετρικά σχήματα*, η θεωρητική κλασματική διάσταση ισούται με την γνωστή μας Ευκλείδεια ή τοπολογική διάσταση. Συγκεκριμένα, είναι 0 για σύνολα που περιγράφουν *σημεία.* 1 για σύνολα που περιγράφουν *ευθείες*, 2 για σύνολα που περιγράφουν επιφάνειες (διδιάστατα σύνολα με μήκος και πλάτος), 3 για σύνολα που περιγράφουν όγκους (τριδιάστατα σύνολα με μήκος, πλάτος και ύψος. Αλλά αυτό *αλλάζει* για τα λεγόμενα «fractal σύνολα». Αν η (θεωρητική) κλασματική διάσταση ενός συνόλου υπερβαίνει την τοπολογική του διάσταση, τότε λέμε ότι το σύνολο έχει «fractal γεωμετρία».

Σε αντίθεση με τις τοπολογικές διαστασεις, ο fractal δείκτης μπορεί να παίρνει *μη-ακέραιες τιμές*, υποδεικνύοντας ότι ένα σύνολο «γεμίζει το χώρο του» ποιοτικά και ποσοτικά με διαφορετικό τρόπο από ότι ένα συνηθισμένο γεωμετρικό σχήμα. Για παράδειγμα, μια καμπύλη με κλασματική διάσταση πολύ κοντά στο 1, έστω 1.1, συμπεριφέρεται σχεδόν όπως μια κανονική ευθεία, αλλά μια καμπύλη με κλασματική διάσταση 1.9 σχεδόν συμπεριφέρεται όπως μια επιφάνεια. Με τον ίδιο τρόπο, μια επιφάνεια με fractal διάσταση 2.1 γεμίζει το χώρο σχεδόν όπως μια συνηθισμένη επφάνεια, ενώ αυτή που έχει διάσταση 2.9 σαν ένα στερεό.

5.3 Hausdorff διάσταση

Για κάθε $d \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ και για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$H_d^{\varepsilon}(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} r_j^d : E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, r_j), r_j < \varepsilon \right\},$$

όπου $B(x_j, r_j)$ είναι η μπάλα με κέντρο το $x_j \in \mathbb{R}^n$ και ακτίνα r_j, και το infimum παίρνεται πάνω από όλες τις αριθμήσιμες καλύψεις του E από τέτοιες μπάλες. Το όριο

$$\lim_{\varepsilon \to 0} H_d^{\varepsilon}(E)$$

υπάρχει και ονομάζεται *d-διάστατο μέτρο Hausdorff* του συνόλου E, συμβολίζεται δε με $H_d(E)$.

Για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}^n$ υπάρχει μοναδικός $d_0 \leqslant n$ τέτοιος ώστε:

$$H_d(E) = \infty \text{ για κάθε } d < d_0$$

και

$$H_d(E) = 0 \text{ για κάθε } d > d_0.$$

Ορισμός 5.3. Ο d_0 ονομάζεται Hausdorff διάσταση του συνόλου E και συμβολίζεται με $\dim_H(E)$.

Ένα παράδειγμα fractal συνόλου με fractal διάσταση. Το γνωστό τριαδικό σύνολο του Cantor S μπορεί να καλυφθεί με 2^k διαστήματα μήκους 3^{-k}, άρα το μέτρο Hausdorff του S είναι:

$$H_\alpha(S) = \lim_{k \to \infty} H_\alpha^{3^{-k}}(S) = \lim)k \to \infty \left(\frac{2}{3^\alpha} \right)^k.$$

Έτσι, $H_\alpha(S) = 0$ αν $\alpha < \frac{\log 2}{\log 3}$ και $H_\alpha(S) = +\infty$ αν $\alpha > \frac{\log 2}{\log 3}$.

Συνεπώς, η διάσταση Hausdorff του συνόλου του Cantor είναι

$$\dim_H(S) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$