Το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue στο $\mathbb{R}$

Μαρία Μαστροθεοδώρου και Αγγελική Χαντζηθάνου

Περίληψη

Το κεντρικό αποτέλεσμα της εργασίας είναι ότι μια συνάρτηση f είναι απόλυτα συνεχής στο $[a,b]$ αν και μόνο αν η f' υπάρχει σχεδόν παντού στο $[a,b]$, η f' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, και

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\, d\lambda(t) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

1 Εισαγωγή

Το ερώτημα που θα μελετήσουμε σε αυτήν την εργασία είναι να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη που να εξασφαλίζει ότι κάποια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\, d\lambda(t), \quad \text{για κάθε } x \in [a,b]. \tag{1.1}$$

Από τον Απειροστικό Λογισμό γνωρίζουμε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann τότε η (1.1) ισχύει. Για να επεκτείνουμε αυτό το αποτέλεσμα, απαραίτητη προϋπόθεση είναι η f να είναι (τουλάχιστον) σχεδόν παντού παραγωγίσιμη. Κατόπιν, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος ως ολοκλήρωμα Lebesgue και να προσπαθήσουμε να δούμε ποιές είναι οι συνθήκες που εξασφαλίζουν (και είναι απαραίτητες για) την ισότητα.

Ο Lebesgue απέδειξε το 1904 ότι κάθε συνεχής και μονότονη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού. Το 1911 ο W. H. Young έδωσε μια απόδειξη αυτού του αποτελέσματος χωρίς την υπόθεση της συνέχειας. Ωστόσο, το 1932 ο Riesz έδωσε μια εντελώς στοιχειώδη απόδειξη αυτού του αποτελέσματος, χρησιμοποιώντας το λήμμα του Ανατέλλοντος Ηλίου που διατύπωσε ο ίδιος. Παρ¨ όλο που η απόδειξη του Riesz είναι απλή και κομψή στην περίπτωση των συνεχών συναρτήσεων, ο Rudel και άλλοι συγγραφείς βρήκαν την απόδειξη για τις μη συνεχείς συναρτήσεις «προβληματική και κουραστική» και έγραψαν εργασίες με μοναδικό σκοπό να την απλουστεύσουν. Παρουσιάζουμε την απόδειξη του Riesz στην Παράγραφο 3.

Θεώρημα 1.1. *Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και συνεχής, τότε η f' υπάρχει σχεδόν παντού. Επιπλέον, η f' είναι μετρήσιμη, μη αρνητική και*

$$\int_a^b f'(x)\, dx \leqslant f(b) - f(a). \tag{1.2}$$

Ειδικότερα, η f' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Στην Παράγραφο 4 επεκτείνουμε το Θεώρημα 1.1 στην κλάση των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσησ: λέμε ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ έχει φραγμένη κύμανση αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \leqslant M \tag{1.3}$$

για κάθε διαμέριση $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ του $[a,b]$. Θα δούμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση φργαμένης κύμανσης γράφεται ως διαφορά δύο συνεχών αυξουσών συναρτήσεων. Από το Θεώρημα 1.1 έπεται ότι οι συναρτησεις φραγμένης κύμασης είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμες.

Θεώρημα 1.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση φραγμένης κύμανσης. Τότε, η f είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού.*

Το παράδειγμα της συνάρτησης Cantor-Lebesgue δείχνει ότι (ακόμα και) οι συνεχείς αύξουσες συναρτήσεις δεν ικανοποιούν γενικά την (1.1). Στην Παράγραφο 5 εισάγουμε την κλάση των απολύτως συνεχών συναρτήσεων, οι οποίες είναι εκείνες ακριβώς οι συναρτήσεις για τις οποίες έχουμε καταφατική απάντηση στο πρόβλημα: λέμε ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι απολύτως συνεχής αν αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν (a_k, b_k), $1 \leqslant k \leqslant N$ είναι ξένα ανά δύο υποδιαστήματα του $[a,b]$ με $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ τότε $\sum_{k=1}^{N} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$. Όπως θα δούμε, ισχύει το εξής:

Θεώρημα 1.3. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ απολύτως συνεχής συνάρτηση. Τότε, η $f'(x)$ ορίζεται σχεδόν παντού, και η f' είναι ολοκληρώσιμη. Επιπλέον, για κάθε $x \in [a,b]$,*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,d\lambda(t). \tag{1.4}$$

Ειδικότερα,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,d\lambda(t). \tag{1.5}$$

Αντίστροφα, αν η $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει απολύτως συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(x) = g(x)$ σχεδόν παντού. Μπορούμε μάλιστα να πάρουμε την $f(x) = \int_a^x g(x)d\lambda(x)$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.3 θα χρειαστούμε διάφορα εργαλεία: μεταξύ αυτών είναι το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue, το οποίο περιγράφουμε στην Παράγραφο 2.

2 Θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα της f:

$$F(x)=\int_a^x f(y)dy, \qquad a\leqslant x\leqslant b. \tag{2.1}$$

Γνωρίζουμε ότι αν $x\in[a,b]$ και η f είναι συνεχής στο x τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x και $F'(x)=f(x)$. Γνωρίζουμε επίσης ότι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue.

Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου, η F είναι παραγωγίσιμη στο x αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}, \tag{2.2}$$

το οποίο, στην περίπτωσή μας, παίρνει την μορφή

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(y)dy=\lim_{I_{x,h}\to x}\frac{1}{\ell(I_{x,h})}\int_{I_{x,h}}f(y)dy \tag{2.3}$$

αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $I_{x,h}=(x,x+h)$ και γράψουμε $\ell(I)$ για το μήκος ενός διαστήματος I. Γενικότερα, μπορούμε να θεωρήσουμε το

$$\lim_{I\downarrow x}\frac{1}{\ell(I)}\int_I f(y)dy, \tag{2.4}$$

όπου, πλέον, θεωρούμε όλα τα ανοικτά διαστήματα I τα οποία περιέχουν το x και αφήνουμε το μήκος τους να πάει στο μηδέν. Παρατηρήστε ότι η ποσότητα $\frac{1}{\ell(I)}\int_I f(y)dy$ είναι η μέση τιμή της f στο διάστημα I. Πάλι, είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι, αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε

$$\lim_{I\downarrow x}\frac{1}{\ell(I)}\int_I f(y)dy=f(x) \tag{2.5}$$

σε κάθε σημείο συνέχειας της f (άρα, σχεδόν παντού στο $[a,b]$).

Το *θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue* επεκτείνει αυτό το αποτέλεσμα για Lebesgue ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Έστω $E\subseteq\mathbb{R}$ μετρήσιμο. Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{L}_1(E)$ όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f:E\to[-\infty,\infty]$ για τις οποίες

$$\int_E |f(x)|\,d\lambda(x)<\infty. \tag{2.6}$$

Αν ορίσουμε ως σχέση ισοδυναμίας σ¨ αυτό το γραμμικό χώρο την «$f\sim g$ αν $f=g$ σχεδόν παντού στο E», ο χώρος $L_1(E)$ είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $\{[f]:f\in\mathcal{L}_1(E)\}$.

Ορισμός 2.1. (α) Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται τοπικά ολοκληρώσιμη αν είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε (φραγμένο) διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$.

(β) Έστω f τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Το $x \in \mathbb{R}$ λέγεται σημείο Lebesgue της f αν $|f(x)| < \infty$ και

$$\frac{1}{\ell(I)} \int_I |f(y) - f(x)| \, d\lambda(y) \to 0 \tag{2.7}$$

καθώς $I \downarrow x$. Αυτό σημαίνει ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν I είναι ανοικτό διάστημα με $\ell(I) < \delta$ και $x \in I$, τότε

$$\frac{1}{\ell(I)} \int_I |f(y) - f(x)| \, d\lambda(y) < \varepsilon. \tag{2.8}$$

Το σύνολο των σημείων Lebesgue της f συμβολίζεται με $\mathrm{Leb}(f)$.

Το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue δείχνει ότι σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι σημείο Lebesgue της f.

Θεώρημα 2.2 (Lebesgue). *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε,*

$$\lim_{I \downarrow x} \frac{1}{\ell(I)} \int_I |f(y) - f(x)| \, d\lambda(y) = 0 \tag{2.9}$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, $\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathrm{Leb}(f)) = 0$. Ειδικότερα,

$$\lim_{I \downarrow x} \frac{1}{\ell(I)} \int_I f(y) \, d\lambda(y) = f(x) \tag{2.10}$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η (2.10) προκύπτει από την (2.9): αν $x \in \mathrm{Leb}(f)$ τότε

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\ell(I)} \int_I f(y) \, d\lambda(y) - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{\ell(I)} \int_I f(y) \, d\lambda(y) - \frac{1}{\ell(I)} \int_I f(x) \, d\lambda(y) \right| \\ &\leqslant \frac{1}{\ell(I)} \int_I |f(y) - f(x)| \, d\lambda(y) \to 0. \end{aligned}$$

Παρατήρηση 2.3. Σημειώνουμε ότι το σύνολο των σημείων x για τα οποία οι μέσοι όροι στην (2.10) συγκλίνουν σε κάποιο όριο, είναι ανεξάρτητο από τον αντιπρόσωπο f της κλάσης $[f]$, αφού

$$\int_I f(y) \, d\lambda(y) = \int_I g(y) \, d\lambda(y) \tag{2.11}$$

όταν $f = g$ σχεδόν παντού. Όμως, το σύνολο Lebesgue της f εξαρτάται από τον συγκεκριμένο αντιπρόσωπο της $[f]$ που θεωρούμε κάθε φορά.

Θεώρημα 2.4 (Lebesgue). *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε,*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\,d\lambda(y) = f(x) \tag{2.12}$$

σχεδόν για κάθε x.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η (2.12) ισχύει για κάθε $x\in \mathrm{Leb}(f)$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\,d\lambda(y) - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\,d\lambda(y) - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,d\lambda(y)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(y)-f(x)|\,d\lambda(y) \\ &\leqslant 2\left(\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} |f(y)-f(x)|\,d\lambda(y)\right)\to 0\end{aligned}$$

καθώς $h\to 0^+$ για κάθε $x\in\mathrm{Leb}(f)$, χρησιμοποιώντας την

$$\int_x^{x+h} |f(y)-f(x)|\,d\lambda(y) \leqslant \int_{x-h}^{x+h} |f(y)-f(x)|\,d\lambda(y) \tag{2.13}$$

και το γεγονός ότι, αφού $x\in(x-h,x+h)$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.2. Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε την (2.12) καθώς $h\to 0^-$. □

Ως πόρισμα του Θεωρήματος 2.4 παίρνουμε το εξής:

Θεώρημα 2.5. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ με*

$$F(x) = \int_a^x f(y)\,d\lambda(y) \tag{2.14}$$

είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη, και πιο συγκεκριμένα, $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathrm{Leb}(f)$.

3 Παραγωγισιμότητα μονότονων και συνεχών συναρτήσεων

Σε αυτήν την Παράγραφο δείχνουμε ότι οι μονότονες και συνεχείς συναρτήσεις είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμες.

Θεώρημα 3.1. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ αύξουσα και συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού.*

Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα του F. Riesz.

Λήμμα 3.2 (του ανατέλλοντος ηλίου). *Έστω f μια πραγματική και συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και έστω E το σύνολο των σημείων x για τα οποία ισχύει*

$$f(x+h) > f(x) \text{ για κάποιο } h = h_x > 0. \tag{3.1}$$

Αν το E είναι διάφορο του κενού, τότε είναι ανοιχτό και έτσι το E γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση, ξένων ανά δύο, ανοιχτών διαστημάτων. Δηλαδή, $E = \bigcup_k (a_k, b_k)$. Αν (a_k, b_k) είναι ένα πεπερασμένο διάστημα που ανήκει σ¨ αυτή την ένωση, τότε

$$f(b_k) - f(a_k) = 0. \tag{3.2}$$

Απόδειξη. Αφού η f είναι συνεχής, τότε το E είναι ανοιχτό, άρα γράφεται ως ένωση αριθμήσιμων ανοιχτών διαστημάτων, ξένων ανά δύο. Αν (a_k, b_k) είναι ένα πεπερασμένο διάστημα της ανάλυσης του E σε ανοιχτά διαστήματα, τότε το $a_k \notin E$, άρα δεν μπορούμε να πούμε ότι ισχύει η σχέση $f(b_k) > f(a_k)$. Ας υποθέσουμε ότι $f(b_k) < f(a_k)$. Από τη συνέχεια της f, υπάρχει $a_k < c < b_k$ ώστε

$$f(c) = \frac{f(a_k) + f(b_k)}{2}, \tag{3.3}$$

και μπορούμε να επιλέξουμε το c να είναι το μεγαλύτερο σημείο του (a_k, b_k) με αυτήν την ιδιότητα. Εφόσον $c \in E$, υπάρχει $d > c$ ώστε $f(d) > f(c)$. Αφού $b_k \notin E$, έχουμε $f(x) \leqslant f(b_k)$ για κάθε $x \geqslant b_k$, άρα $d < b_k$. Αφού $f(d) > f(c)$, θα υπάρχει (από συνέχεια) $c' > d$ με $c' < b_k$ και $f(c') = f(c)$, άτοπο, αφού έχουμε επιλέξει το c να είναι να είναι το δεξιότερο τέτοιο σημείο στο (a_k, b_k). Άρα έχουμε $f(a_k) = f(b_k)$. □

Με παρόμοιο επιχείρημα αποδεικνύουμε το εξής:

Πόρισμα 3.3. *Έστω f μια πραγματική και συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a, b]$. Αν $E = \{x \in (a, b) \text{ ώστε } f(x+h) > f(x) \text{ για κάποιο } h > 0\}$, τότε το E είναι είτε κενό ή ανοιχτό. Αν είναι ανοιχτό τότε είναι ξένη ένωση αριθμήσιμων το πλήθος διαστημάτων (a_k, b_k) και $f(a_k) = f(b_k)$, εκτός αν $a = a_k$, οπότε έχουμε ότι $f(a_k) \leqslant f(b_k)$.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1 θα χρειαστούμε την ποσότητα

$$\Delta_h(f)(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{3.4}$$

Ορίζουμε επίσης και τους τέσσερις *αριθμούς Dini* στο x ως εξής:

$$D^+(f)(x) = \limsup_{h \to 0^+} \Delta_h f(x)$$
$$D_+(f)(x) = \liminf_{h \to 0^+} \Delta_h f(x)$$
$$D^-(f)(x) = \limsup_{h \to 0^-} \Delta_h f(x)$$
$$D_-(f)(x) = \liminf_{h \to 0^-} \Delta_h f(x)$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής αύξουσα συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι $D_+(f)(x) \leqslant D^+(f)(x)$ και $D_-(f)(x) \leqslant D^-(f)(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε τα εξής:

(α) $D^+(f)(x) < \infty$ σχεδόν για κάθε x, και

(β) $D^+(f)(x) \leqslant D_-(f)(x)$ σχεδόν για κάθε x.

Έχοντας αποδείξει τα παραπάνω, εφαρμόζοντας το (β) για την αύξουσα συνάρτηση $h(x) = -f(-x)$ βλέπουμε ότι $D^-(f)(x) \leqslant D_+(f)(x)$ σχεδόν παντού. Άρα, σχεδόν παντού στο $[a, b]$ έχουμε

$$D^+(f)(x) \leqslant D_-(f)(x) \leqslant D^-(f)(x) \leqslant D_+(f)(x) \leqslant D^+(f)(x) < \infty \tag{3.5}$$

και έπεται ότι η $f'(x)$ υπάρχει σχεδόν παντού.

Σταθεροποιούμε $s > 0$ και ορίζουμε

$$E_s := \{x \in [a, b] : D^+(f)(x) > s\}. \tag{3.6}$$

Παρατηρούμε αρχικά ότι το E_s είναι μετρήσιμο σύνολο. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 3.3 για την συνάρτηση $w(x) = f(x) - sx$ βλέπουμε ότι $E_s \subseteq \bigcup_k (a_k, b_k)$, όπου $f(b_k) - f(a_k) \geqslant s(b_k - a_k)$. Άρα,

$$\lambda(E_s) \leqslant \sum_k (b_k - a_k) \leqslant \frac{1}{s} \sum_k (f(b_k) - f(a_k)) \leqslant \frac{1}{s}(f(b) - f(a)). \tag{3.7}$$

Έπεται ότι $\lim_{s\to\infty} \lambda(E_s) = 0$. Αφού $\{x : D^+(f)(x) = \infty\} \subseteq E_s$ για κάθε $s > 0$, συμπεραίνουμε ότι $D^+(f)(x) < \infty$ σχεδόν παντού.

Στη συνέχεια σταθεροποιούμε $R > r$ και ορίζουμε

$$E_{r,R} = \{x \in [a, b] : D^+(f)(x) > R \ \text{ και } \ D_-(f)(x) < r\}. \tag{3.8}$$

Θα δείξουμε ότι $\lambda(E_{r,R}) = 0$. Παρατηρώντας ότι

$$\{x : D_-(f)(x) < D^+(f)(x)\} = \bigcup_{r,R\in\mathbb{Q}, r<R} E_{r,R} \tag{3.9}$$

βλέπουμε μετά ότι $\lambda(\{x : D_-(f)(x) < D^+(f)(x)\}) = 0$, δηλαδή $D^+(f)(x) \leqslant D_-(f)(x)$ σχεδόν παντού, και αυτό αποδεικνύει το (β).

Υποθέτουμε ότι $\lambda(E_{r,R}) > 0$. Αφού $R > r$, μπορούμε να βρούμε ανοικτό σύνολο U ώστε $E_{r,R} \subset U \subset (a, b)$ και $\lambda(U) < (R/r)\lambda(E_{r,R})$. Γράφουμε το U σαν ένωση ξένων ανοικτών διαστημάτων, $U = \bigcup_n I_n$. Σταθεροποιούμε κάποιο n και εφαρμόζουμε το Πόρισμα 3.3 για την συνάρτηση $\ell(x) = -f(-x) + rx$ στο διάστημα $-I_n$. Γυρίζοντας πίσω στο (a, b) παίρνουμε μια ξένη ένωση διαστημάτων $\bigcup_k (a_k, b_k)$, η οποία περιέχεται στο I_n, τέτοια ώστε

$$f(b_k) - f(a_k) \leqslant r(b_k - a_k). \tag{3.10}$$

Εφαρμόζοντας όμως το Πόρισμα 3.3 για την $m(x) = f(x) - Rx$ στο (a_k, b_k), βρίσκουμε μια νέα ξένη ένωση διαστημάτων $U_n = \bigcup_{k,j}(a_{k,j}, b_{k,j})$ με $(a_{k,j}, b_{k,j}) \subset (a_k, b_k)$ για κάθε k και j, ώστε

$$f(b_{k,j}) - f(a_{k,j}) \geqslant R(b_{k,j} - a_{k,j}). \tag{3.11}$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\begin{aligned}\lambda(U_n) &= \sum_{k,j}(b_{k,j} - a_{k,j}) \leqslant \frac{1}{R}\sum_k \left(\sum_j (f(b_{k,j}) - f(a_{k,j}))\right) \\ &\leqslant \frac{1}{R}\sum_k (f(b_k) - f(a_k)) \leqslant \frac{r}{R}\sum_k (b_k - a_k) \\ &\leqslant \frac{r}{R}\lambda(I_n).\end{aligned}$$

Αφού $D^+(f)(x) > R$ και $D_-(f)(x) < r$ για κάθε $x \in E_{r,R}$, έχουμε $E_{r,R} \cap I_n \subseteq U_n \subseteq I_n$. Άρα,

$$\begin{aligned}\lambda(E_{r,R}) &= \sum_n \lambda(E_{r,R} \cap I_n) \leqslant \sum_n \lambda(U_n) \\ &\leqslant \frac{r}{R}\sum_n \lambda(I_n) = \frac{r}{R}\lambda(U) < \lambda(E_{r,R}).\end{aligned}$$

Αυτό είναι άτοπο, άρα $\lambda(E_{r,R}) = 0$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Πόρισμα 3.4. *Αν η f είναι αύξουσα και συνεχής, τότε η f' υπάρχει σχεδόν παντού. Επιπλέον, η f' είναι μετρήσιμη, μη αρνητική και*

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant f(b) - f(a). \tag{3.12}$$

Ειδικότερα, η f' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Απόδειξη. Για $n \geqslant 1$, θεωρούμε το πηλίκο $G_n(x) = \frac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}$. Από τα προηγούμενα έπεται ότι $G_n(x) \to f'(x)$ σχεδόν για κάθε x, από το οποίο έπεται ότι η f' είναι μετρήσιμη και μη αρνητική.

Επεκτείνουμε τώρα την f ως μία συνεχή συνάρτηση πάνω σε όλο το $\mathbb{R}$. Από το Λήμμα του Fatou, ξέρουμε ότι

$$\int_a^b f'(x)dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_a^b G_n(x)dx. \tag{3.13}$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκούν τα επόμενα:

$$\begin{aligned}\int_a^b G_n(x)dx &= \frac{1}{1/n}\int_a^b f(x+1/n)dx - \frac{1}{1/n}\int_a^b f(x)dx \\ &= \frac{1}{1/n}\int_{a+1/n}^{b+1/n} f(y)dy - \frac{1}{1/n}\int_a^b f(x)dx \\ &= \frac{1}{1/n}\int_b^{n+1/n} f(x)dx - \frac{1}{1/n}\int_a^{a+1/n} f(x)dx.\end{aligned}$$

Αφού f συνεχής, ο πρώτος κι ο δεύτερος όρος συγκλίνουν αντίστοιχα στα $f(b)$, $f(a)$ κι αφήνοντας το n να πάει στο άπειρο, έχουμε το ζητούμενο. □

Δεν μπορούμε να πάρουμε κάτι ισχυρότερο από την ανισότητα στο πόρισμα, αν επιτρέψουμε όλες τις συνεχείς και αύξουσες συναρτήσεις, όπως φαίνεται από το ακόλουθο σημαντικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.5 (η συνάρτηση Cantor-Lebesgue)**.** Η κατασκευή που ακολουθεί θα μας δώσει μια συνεχή συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$ που είναι και αύξουσα με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$, αλλά $f'(x) = 0$ σχεδόν παντού. Όθεν η f είναι φραγμένης κύμανσης, αλλά

$$\int_a^b f'(x)dx \neq f(b) - f(a). \tag{3.14}$$

Θεωρούμε το σύνολο Cantor $C \subset [0,1]$,

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k, \tag{3.15}$$

όπου κάθε C_k είναι ξένη ένωση 2^k κλειστών διαστημάτων.

Ορίζουμε f_1 συνεχή συνάρτηση στο $[0,1]$ που ικανοποιεί τα εξής

- η f_1 είναι αύξουσα
- $$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{αν } \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3} \\ 1 & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$
- η f_1 είναι γραμμική στο $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$.

Όμοια, ορίζουμε f_2 συνεχή συνάρτηση στο $[0,1]$ τέτοια ώστε

- η f_2 είναι αύξουσα

-

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x = 0 \\ \frac{1}{4} & \text{αν } \frac{1}{9} \leqslant x \leqslant \frac{2}{9} \\ \frac{1}{2} & \text{αν } \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \text{αν } \frac{7}{9} \leqslant x \leqslant \frac{8}{9} \\ 1 & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

- η f_1 είναι γραμμική στο $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$.

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Έτσι προκύπτει μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ώστε

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant 2^{-n-1}. \tag{3.16}$$

Ως εκ τούτου οι $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση f η οποία καλείται συνάρτηση Cantor-Lebesgue. Από την κατασκευή, η f είναι αύξουσα, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ και η f είναι σταθερή σε κάθε διάστημα του συμπληρώματος του συνόλου Cantor. Αφού $\lambda(C) = 0$, τότε $f'(x) = 0$ σχεδόν παντού.

4 Συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης

Ορισμός 4.1. Μια συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ λέγεται φραγμένης κύμανσης αν τα αθροίσματα

$$\sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \tag{4.1}$$

είναι φραγμένα. Δηλαδή, αν υπάρχει $M < \infty$ ώστε

$$\sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \tag{4.2}$$

για κάθε διαμέριση $\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b\}$.

Ορισμός 4.2. Η *ολική κύμανση* της f στο $[a, x]$ (όπου $a < x < b$) ορίζεται ως εξής:

$$T_f(a, x) = \sup \sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \tag{4.3}$$

όπου το supremum παίρνεται σε όλες τις διαμερίσεις του $[a, x]$. Ο προηγούμενος ορισμός έχει νόημα και αν η f παίρνει μιγαδικές τιμές.

Η *θετική κύμανση* της f στο $[a, x]$ είναι

$$P_f(a, x) = \sup \sum_{(+)} (f(t_j) - f(t_{j-1})) \tag{4.4}$$

όπου το άθροισμα είναι πάνω σε όλα τα j για τα οποία $f(t_j) \geqslant f(t_{j-1})$, και το supremum παίρνεται πάνω σε όλες τις διαμερίσεις του $[a, x]$.

Τέλος, η *αρνητική κύμανση* της f στο $[a, x]$ είναι

$$N_f(a,x) = \sup \sum_{(-)} -(f(t_j) - f(t_{j-1})) \tag{4.5}$$

όπου το άθροισμα είναι πάνω σε όλα τα j για τα οποία $f(t_j) \leqslant f(t_{j-1})$, και το supremum παίρνεται πάνω σε όλες τις διαμερίσεις του $[a, x]$.

Λήμμα 4.3. *Υποθέτουμε ότι η f είναι μία συνάρτηση με πραγματικές τιμές και φραγμένη κύμανση στο $[a, b]$. Τότε, για όλα τα $a < x < b$ ισχύει ότι*

$$f(x) - f(a) = P_f(a,x) - N_f(a,x) \tag{4.6}$$

και

$$T_f(a,x) = P_f(a,x) + N_f(a,x). \tag{4.7}$$

Επίσης, αν η f είναι συνεχής τότε οι P_f και N_f είναι συνεχείς.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει διαμέριση $\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = x\}$ του $[a, x]$, τέτοια ώστε

$$|P_f(a,x) - \sum_{(+)} (f(t_j) - f(t_{j-1}))| < \varepsilon \quad \text{και} \quad |N_f(a,x) - \sum_{(-)} -(f(t_j) - f(t_{j-1}))| < \varepsilon \tag{4.8}$$

(για το αποτέλεσμα αυτό, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό για να πάρουμε παρόμοια αποτελέσματα για τις $P_f(a, x)$ και $N_f(a, x)$ με (πιθανώς) διαφορετικές διαμερίσεις και μετά να θεωρήσουμε μια κοινή εκλέπτυνση αυτών των δύο διαμερίσεων). Επίσης, σημειώνουμε ότι

$$f(x) - f(a) = \sum_{(+)} (f(t_j) - f(t_{j-1})) - \sum_{(-)} -(f(t_j) - f(t_{j-1})) \tag{4.9}$$

και βρίσκουμε ότι

$$|f(x) - f(a) - [P_f(a,x) - N_f(a,x)]| < 2\varepsilon, \tag{4.10}$$

το οποίο αποδεικνύει την πρώτη ταυτότητα. Για την δεύτερη ταυτότητα, παρατηρούμε ότι για κάθε διαμέριση $\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = x\}$ του $[a, x]$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| &= \sum_{(+)} (f(t_j) - f(t_{j-1})) + \sum_{(-)} -(f(t_j) - f(t_{j-1})) \\ &\leqslant P_f(a,x) + N_f(a,x), \end{aligned}$$

έτσι, έχουμε $T_f(a,x) \leqslant P_f(a,x) + N_f(a,x)$. Επίσης, από το παραπάνω έπεται ότι

$$\sum_{(+)} (f(t_j) - f(t_{j-1})) + \sum_{(-)} -(f(t_j) - f(t_{j-1})) \leqslant T_f(a,x). \tag{4.11}$$

Όπως πριν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κοινή εκλέπτυνση διαμερίσεων στους ορισμούς των P_f και N_f για να καταλήξουμε στην ανισότητα $P_f(a,x) + N_f(a,x) \leqslant T_f(a,x)$, και έτσι το λήμμα αποδείχθηκε. □

Θεώρημα 4.4. *Μία πραγματική συνάρτηση f στο $[a,b]$ είναι συνεχής και φραγμένης κύμανσης αν και μόνο αν μπορεί να γραφεί ως η διαφορά δύο αυξουσών συνεχών συναρτήσεων.*

Απόδειξη. Προφανώς, αν $f = f_1 - f_2$, όπου f_1, f_2 είναι και οι δύο αύξουσες και συνεχείς, τότε η f είναι φραγμένης κύμανσης.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής και φραγμένης κύμανσης. Τότε, θεωρούμε τις

$$f_1(x) = P_f(a,x) + f(a) \quad \text{και} \quad f_2(x) = N_f(a,x). \tag{4.12}$$

Προφανώς, οι f_1, f_2 είναι αύξουσες και συνεχείς, και από το προηγούμενο Λήμμα έπεται ότι $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. □

Θεώρημα 4.5. *Αν η f είναι συνεχής και φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$, τότε η f είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού. Δηλαδή, το*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{4.13}$$

υπάρχει σχεδόν παντού στο $[a,b]$.

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η υπόθεση της φραγμένης κύμανσης για μια συνάρτηση μπορεί να εγγυηθεί την ύπαρξη παραγώγου σχεδόν παντού αλλά όχι το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a). \tag{4.14}$$

Γι¨ αυτό χρειάζεται να περιορίσουμε την κλάση των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης.

5 Απολύτως συνεχείς συναρτήσεις

Ορισμός 5.1 (ε-δ)**.** Μία συνάρτηση f ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[a,b]$ λέγεται *απολύτως συνεχής* αν για δοθέν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k + h_k) - f(x_k)| < \varepsilon \tag{5.1}$$

για κάθε πεπερσμένο σύνολο διαστημάτων $(x_k, x_k + h_k)$: $\sum_{k=1}^{n} -|h_k| < \delta$.

Παρατηρήσεις 5.2. (α) Από τον ορισμό, είναι φανερό ότι οι απολύτως συνεχείς συναρτήσεις είναι συνεχείς, και ειδικότερα ομοιόμορφα συνεχείς.

(β) Αν η f είναι απολύτως συνεχής σε φραγμένο διάστημα, τότε είναι και φραγμένης κύμανσης σε αυτό. Επίσης, η ολική της κύμανση είναι (απολύτως) συνεχής.

(γ) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία υπάρχει g ολοκληρώσιμη επί του $[a,b]$ και τέτοια ώστε

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(y)dy \tag{5.2}$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε, η f είναι απολύτως συνεχής.

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση $g_n(x) = \min\{|g(x)|, n\}$. Παρατηρήστε ότι $g_n \leqslant n$. Η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα και $g_n \to |g|$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\lambda = \int |g| \, d\lambda. \tag{5.3}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\int (|g| - g_n) \, d\lambda = \int |g| \, d\lambda - \int g_n \, d\lambda < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.4}$$

Επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \delta$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_E |g| \, d\lambda &= \int_E g_n \, d\lambda + \int_E (|g| - g_n) \, d\lambda \leqslant \int_E g_n \, d\lambda + \int (|g| - g_n) \, d\lambda \\ &\leqslant n\lambda(E) + \frac{\varepsilon}{2} < n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Έστω τώρα (a_k, b_k), $1 \leqslant k \leqslant N$ ξένα ανά δύο υποδιαστήματα του $[a,b]$ με $\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} |f(b_k) - f(a_k)| &= \sum_{k=1}^{N} \left| \int_{a_k}^{b_k} g \, d\lambda \right| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \int_{a_k}^{b_k} |g| \, d\lambda \\ &= \int_{\bigcup_{k=1}^{N}(a_k,b_k)} |g| \, d\lambda < \varepsilon,\end{aligned}$$

διότι

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{N} (a_k, b_k)\right) = \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k) < \delta. \tag{5.5}$$

Έπεται ότι η f είναι απολύτως συνεχής. $\square$

Σημειώνουμε ότι η τελευταία παρατήρηση είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την f για να αποδειχθεί ότι $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$.

Θεώρημα 5.3. *Μία απολύτως συνεχής συνάρτηση f είναι φραγμένης κυμάνσης.*

Απόδειξη. Αφού η f είναι απολύτως συνεχής, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k + h_k) - f(x_k)| < \varepsilon \quad \text{αν} \quad \sum_{k=1}^{n} |h_k| < \delta \tag{5.6}$$

και τα $(x_k, x_k + h_k)$ είναι ξένα. Η προηγούμενη σχέση δείχνει ότι η ολική μεταβολή επί ενός διαστήματος μήκους δ δεν είναι μεγάλυτερη του ε, και έπεται ότι όλα τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \tag{5.7}$$

είναι φραγμένα για όλες τις διαμερίσεις του $[a, b]$, άρα η f είναι φραγμένης κυμάνσης. □

Πόρισμα 5.4. *Μία απολύτως συνεχής συνάρτηση έχει παράγωγο (δηλαδή, η παράγωγος υπάρχει και είναι πεπερασμένη) σχεδόν παντού.*

Απόδειξη. Μία απολύτως συνεχής συνάρτηση είναι φραγμένης κυμάνσης και μια συνάρτηση φραγμένης κυμάνσης έχει παράγωγο σχεδόν παντού. □

Θα δείξουμε ότι οι απολύτως συνεχείς συναρτήσεις είναι ακριβώς αυτές που ικανοποιούν την (1.1). Το τελευταίο εργαλείο που χρειαζόμαστε είναι το εξής.

Θεώρημα 5.5. *Μία απολύτως συνεχής συνάρτηση f έχει πεπερασμένη παράγωγο σχεδόν παντού. Επιπλέον, αν $f'(x) = 0$ σχεδόν για κάθε x, τότε η f είναι σταθερή.*

Για να δείξουμε ότι η υπόθεση «$f'(x) = 0$ σχεδόν παντού» συνεπάγεται ότι η f είναι σταθερή, θα χρειαστούμε κάποια λήμματα κάλυψης του Vitali. Το πρώτο παίζει βασικό ρόλο στην απόδειξη του θεωρήματος παραγώγισης του Lebesgue (βλέπε [2]).

Λήμμα 5.6. *Έστω $\mathcal{A} = \{I_1, I_2, \dots, I_N\}$ μια πεπερασμένη οικογένεια από ανοικτά διαστήματα στο $\mathbb{R}$. Μπορούμε να βρούμε $1 \leqslant i_1, \dots, i_k \leqslant N$ ώστε τα διαστήματα $I_{i_1}, \dots, I_{i_k}$ να είναι ξένα ανά δύο και να ισχύει*

$$\lambda\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} I_\ell\right) \leqslant 3 \sum_{j=1}^{k} \ell(I_{i_j}). \tag{5.8}$$

Ορισμός 5.7. Λέμε ότι μια οικογένεια $\mathcal{A} = \{I_j : j \in J\}$ από ανοικτά διαστήματα είναι *κάλυψη Vitali* ενός συνόλου $E \subset \mathbb{R}$ αν για κάθε $x \in E$ και για κάθε $\eta > 0$ υπάρχει ένα διάστημα $I_j \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $x \in I_j$ και $\ell(I_j) < \eta$. Δηλαδή, αν κάθε $x \in E$ καλύπτεται από διαστήματα της οικογένειας $\mathcal{A}$ με οσοδήποτε μικρό μέτρο.

Λήμμα 5.8. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Αν $\mathcal{A}$ είναι μια Vitali κάλυψη του E τότε, για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος ανοικτά διαστήματα $I_1, \ldots, I_N$ στην $\mathcal{A}$ τα οποία είναι ξένα ανά δύο και ικανοποιούν την*

$$\sum_{i=1}^{N} \ell(I_i) \geqslant \lambda(E) - \delta. \tag{5.9}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγικά το Λήμμα 5.6. Θέτουμε $\gamma = 1/3$. Για δοθέν $0 < \delta < \lambda(E)$, μπορούμε να βρούμε συμπαγές $E' \subseteq E$ με $\lambda(E') \geqslant \delta$. Τότε, το E' καλύπτεται από μια πεπερασμένη υποοικογένεια της $\mathcal{A}$, και το Λήμμα 5.6 μας εξασφαλίζει ότι υπάρχουν ξένα ανά δύο διαστήματα $I_1, \ldots, I_{N_1} \in \mathcal{A}$ ώστε

$$\sum_{i=1}^{N_1} \ell(I_i) \geqslant \gamma\lambda(E') \geqslant \gamma\delta. \tag{5.10}$$

Κρατάμε τα $I_1, \ldots, I_{N_1}$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεισ:

1. Αν $\sum_{i=1}^{N_1} \ell(I_i) \geqslant \lambda(E) - \delta$ τότε έχουμε ήδη αποδείξει το ζητούμενο.
2. Αν $\sum_{i=1}^{N_1} \ell(I_i) < \lambda(E) - \delta$, ορίζουμε $E_2 = E \setminus \bigcup_{i=1}^{N_1} \overline{I_i}$ και, αφού $\lambda(E_2) \geqslant \lambda(E) - \sum_{i=1}^{N_1} \ell(B_i) > \delta$, βρίσκουμε συμπαγές $E_2' \subseteq E_2$ με $\lambda(E_2') \geqslant \delta$. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι Vitali κάλυψη του E, εύκολα ελέγχουμε ότι τα διαστήματα της $\mathcal{A}$ που είναι ξένα προς την $\bigcup_{i=1}^{N_1} \overline{I_i}$ εξακολουθούν να καλύπτουν το E_2'. Άρα, το E_2' καλύπτεται από μια πεπερασμένη υποοικογένεια της $\mathcal{A}$, και το Λήμμα 5.6 μας εξασφαλίζει ότι υπάρχουν ξένα ανά δύο διαστήματα $I_{N_1+1}, \ldots, I_{N_2} \in \mathcal{A}$ ώστε

   $$\sum_{i=N_1+1}^{N_2} \ell(I_i) \geqslant \gamma\lambda(E_2') \geqslant \gamma\delta. \tag{5.11}$$

   Δηλαδή,

   $$\sum_{i=1}^{N_2} \ell(I_i) \geqslant 2\gamma\delta. \tag{5.12}$$

Κρατάμε τα $I_1, \ldots, I_{N_2}$ και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Αν $\sum_{i=1}^{N_2} \ell(I_i) \geqslant \lambda(E) - \delta$ τότε έχουμε ήδη αποδείξει το ζητούμενο. Αν $\sum_{i=1}^{N_2} \ell(I_i) < \lambda(E) - \delta$, βρίσκουμε ξένα διαστήματα $I_{N_2+1}, \ldots, I_{N_3} \in \mathcal{A}$ ώστε

$$\sum_{i=1}^{N_3} \ell(I_i) \geqslant 3\gamma\delta. \tag{5.13}$$

Αν συνεχίσουμε έτσι, και αν έχουμε κάνει k βήματα, έχουμε επιλέξει ξένα διαστήματα από την $\mathcal{A}$ ώστε το άθροισμα των μέτρων τους να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από $k\gamma\delta$. Έτσι, είτε θα πετύχουμε το ζητούμενο διότι $\sum_{i=1}^{N_s} \ell(I_i) \geqslant \lambda(E) - \delta$ στο s-βήμα της διαδικασίας, ή κάποια στιγμή θα φτάσουμε στο k-βήμα για τον μικρότερο k που ικανοποιεί την $k\gamma\delta \geqslant \lambda(E) - \delta$, οπότε θα έχουμε πάλι το ζητούμενο, διότι

$$\sum_{i=1}^{N_k} \ell(I_i) \geqslant k\gamma\delta \geqslant \lambda(E) - \delta. \tag{5.14}$$

□

Πόρισμα του Λήμματος 5.8 είναι το εξής.

Λήμμα 5.9. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Αν $\mathcal{A}$ είναι μια Vitali κάλυψη του E τότε, για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος ανοικτά διαστήματα $I_1, \ldots, I_N$ στην $\mathcal{A}$ τα οποία είναι ξένα ανά δύο και ικανοποιούν την*

$$\lambda\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_i\right) < 2\delta. \tag{5.15}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ανοικτό σύνολο $G \supseteq E$ με $\lambda(G \setminus E) < \delta$. Τα διαστήματα της $\mathcal{A}$ που, επιπλέον, περιέχονται στο G εξακολουθούν να σχηματίζουν Vitali κάλυψη $\mathcal{A}'$ του E. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.8 βρίσκουμε πεπερασμένα το πλήθος διαστήματα $I_1, \ldots, I_N$ στην $\mathcal{A}'$ τα οποία είναι ξένα ανά δύο και ικανοποιούν την

$$\sum_{i=1}^{N} \ell(I_i) \geqslant \lambda(E) - \delta. \tag{5.16}$$

Τότε,

$$\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{N} I_i\right) \subseteq G, \tag{5.17}$$

και τα δύο σύνολα στο αριστερό μέλος είναι ξένα. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \lambda\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_i\right) &\leqslant \lambda(G) - \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{N} I_i\right) \\ &< \lambda(E) + \delta - (\lambda(E) - \delta) = 2\delta. \end{aligned}$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.5. Μία απολύτως συνεχής συνάρτηση είναι φραγμένης κύμανσης και μια συνάρτηση φραγμένης κύμανσης έχει παράγωγο σχεδόν παντού. Για την απόδειξη του δεύτερου μέρους του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε ότι $f(a) = f(b)$. Έστω E το σύνολο των $x \in (a,b)$ για τα οποία η $f'(x)$ υπάρχει και είναι μηδέν. Από την υπόθεση $\lambda(E) = b - a$. Έπειτα, σταθεροποιούμε $\varepsilon > 0$. Αφού για κάθε $x \in E$ έχουμε

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = 0, \tag{5.18}$$

τότε για κάθε $\eta > 0$ έχουμε ανοιχτό διάστημα $I_x = (a_x, b_x) \subset [a,b]$ που περιέχει το x, με

$$|f(b_x) - f(a_x)| \leqslant (b_x - a_x) \quad \text{και} \quad b_x - a_x < \eta. \tag{5.19}$$

Το σύνολο των διαστημάτων I_x σχηματίζει μια κάλυψη Vitali του E και έτσι, για τυχόν $\delta > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε πεπερασμένα το πλήθος I_{x_i}, $1 \leqslant i \leqslant N$, $I_{x_i} = (a_i, b_i)$, τα οποία είναι ξένα και για τα οποία ισχύει

$$\sum_{i=1}^{N} \ell(I_{x_i}) \geqslant \lambda(E) - \delta = b - a - \delta. \tag{5.20}$$

Όμως $|f(b_i) - f(a_i)| \leqslant \varepsilon(b_i - a_i)$ και προσθέτοντας αυτές τις ανισότητες παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{N} |f(b_i) - f(a_i)| \leqslant \varepsilon(b - a). \tag{5.21}$$

Έπειτα θεωρούμε το συμπλήρωμα του $\bigcup_{i=1}^{N} I_{x_i}$ στο $[a,b]$. Αποτελείται από πεπερασμένα και κλειστά διαστήματα $[\alpha_k, \beta_k]$ συνολικού μήκους $\leqslant \delta$. Έτσι, από την απόλυτη συνέχεια της f, επιλέγοντας κατάλληλο δ συναρτήσει του ε, παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{N} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| \leqslant \varepsilon. \tag{5.22}$$

Συνοψίζοντας, έχουμε

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |f(b_i) - f(a_i)| + \sum_{k=1}^{N} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| \leqslant \varepsilon(b - a) + \varepsilon. \tag{5.23}$$

Αφού το ε ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f(b) - f(a) = 0$, από όπου παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το θεώρημα του Lebesgue:

Θεώρημα 5.10. *Μια συνάρτηση f είναι απόλυτα συνεχής στο $[a, b]$ αν και μόνο αν η f' υπάρχει σχεδόν παντού στο $[a, b]$, η f' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, και*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\, d\lambda(t) \qquad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{5.24}$$

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Γνωρίζουμε ότι αν η f είναι απόλυτα συνεχής συνάρτηση με πραγματικές τιμές τότε είναι διαφορά δύο αυξουσών και συνεχών συναρτήσεων, επομένως η f' είναι ολοκληρώσιμη σχεόν παντού στο $[a, b]$. Έστω τώρα $G(x) = \int_a^x f'(y) d\lambda(y)$. Τότε η G είναι απόλυτα συνεχής, και επομένως και η διαφορά $G(x) - f(x)$. Από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue, ξέρουμε ότι $G'(x) = f'(x)$ σχεδόν για κάθε x, επομένως η $f - G$ έχει παράγωγο 0 σχεδόν παντού. Έπεται (από το προηγούμενο θεώρημα) ότι η $f - G$ είναι σταθερή, και θέτοντας όπου $x = a$, παίρνουμε το ζητούμενο.

($\Longleftarrow$) Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = \int_a^x g$, όπου g ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, είναι απόλυτα συνεχής στο $[a, b]$. $\square$

Αναφορές

[1] Elias M. Stein, Rami Shakarchi, *Real analysis, measure theory, integration and Hilbert spaces*, Vol.3 (2005).

[2] Σημειώσεις από το μάθημα Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue, ακ. έτος 2014-2015.

[3] Εισαγωγή στο ολοκλήρωμα Lebesgue (Σημειώσεις Παραδόσεων), Γ. Α. Σταύρακας, Αθήνα 1999.

[4] Michael W. Botsko, *An elementary proof of Lebesgue's differentiation theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 110, no. 9 (Nov. 2003), pp. 834-838.