Το θεώρημα του Rademacher

Νικόλαος Μουρδουκούτας

Περίληψη

Σε αυτήν την εργασία θα αποδείξουμε το θεώρημα του Rademacher, σύμφωνα με το οποίο κάθε Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού.

1 Το θεώρημα του Rademacher

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ καλείται *Lipschitz συνεχής* αν υπάρχει σταθερά $M \geqslant 0$, $M \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant M\|x - y\| \tag{1.1}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$, όπου $\|z\|$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα του z. Τότε, η μικρότερη σταθερά $M \geqslant 0$ για την οποία ισχύει η (1.1) καλείται *Lipschitz νόρμα* της f και συμβολίζεται με $\|f\|_{\mathrm{Lip}}$.

Ένα κλασσικό αποτέλεσμα της θεωρία μέτρου είναι ότι οι Lipschitz συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμες. Πράγματι, κάθε Lipschitz συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ έχει *φραγμένη κύμανση*, άρα γράφεται ως διαφορά δύο συνεχών αυξουσών συναρτήσεων, και είναι γνωστό ότι οι μονότονες συναρτήσεις είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμες. Επιπλέον, κάθε Lipschitz συνάρτηση είναι *απολύτως συνεχής*. Συνεπώς, ισχύει το εξής:

Θεώρημα 1.1. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνάρτηση. Τότε, η f είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη. Επιπλέον, αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$ τότε $f \in L_1([a, b])$ και*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt. \tag{1.2}$$

Ο Rademacher (1842-1964) γενίκευσε αυτό το αποτέλεσμα στο πλαίσιο των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών: αν μια συνάρτηση ορισμένη στον $\mathbb{R}^d$ είναι Lipschitz συνεχής, τότε είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμη.

Θεώρημα 1.2 (Rademacher, 1919)**.** *Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz συνάρτηση. Τότε, η f είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού.*

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να παρουσιάσει μια απόδειξη του θεωρήματος του Rademacher και κάποιες παραλλαγές του.

2 Απόδειξη του θεωρήματος

Δίνουμε πρώτα κάποιους ορισμούς και αποτελέσματα που θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη.

Ορισμός 2.1. Η *κατευθυνόμενη παράγωγος* μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ στην κατεύθυνση ενός μοναδιαίου διανύσματος $u \in \mathbb{R}^d$ ορίζεται ως εξής:

$$D_u f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}, \tag{2.1}$$

όταν αυτό το όριο υπάρχει.

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης το γεγονός ότι, αφού κάθε Lipschitz συνάρτηση (μιας μεταβλητής) είναι απολύτως συνεχής, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση κατά μέρη. Συγκεκριμένα, θα χρειαστούμε το εξής.

Λήμμα 2.2. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνάρτηση και έστω $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ συνάρτηση με συμπαγή φορέα. Τότε ισχύει ότι:*

$$\int_{\mathbb{R}} f'\phi = -\int_{\mathbb{R}} f\phi'. \tag{2.2}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.2. Κατ¨ αρχάς, γνωρίζουμε ότι μια διανυσματική συνάρτηση $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της εάν και μόνο εάν είναι διαφορίσιμη κατά συντεταγένη, δηλαδή εάν οι πραγματικές συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_m$ είναι διαφορίσιμες σε αυτό το σημείο. Επίσης, αν η f είναι Lipschitz με σταθερά M τότε

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leqslant \|f(x) - f(y)\| \leqslant M\|x - y\| \tag{2.3}$$

για κάθε x, y και για κάθε $j = 1, \ldots, m$. Δηλαδή, οι $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συναρτήσεις με την ίδια σταθερά M. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα για $m = 1$.

Έστω, λοιπόν, συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με την ιδιότητα Lipschitz. Τότε, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M\|x - y\| \tag{2.4}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$. Θα συμβολίζουμε την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^d$ με $\mathbb{B}$, και το σύνορό της (την Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα) με $\partial(\mathbb{B})$.

Η απόδειξη θα γίνει σε τρία βήματα.

Βήμα 1

Στο πρώτο βήμα δείχνουμε ότι, για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $u \in \partial(\mathbb{B})$, η κατευθυνόμενη παράγωγος $D_u f(x)$ της $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ υπάρχει σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$.

Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε τυχόν $u \in \partial(\mathbb{B})$, ορίζουμε το σύνολο

$$M_u := \{x \in \mathbb{R}^d : \text{ δεν υπάρχει η } D_u f(x)\} \tag{2.5}$$

και σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι το M_u έχει μηδενικό μέτρο στον $\mathbb{R}^d$, δηλαδή $\lambda_d(M_u) = 0$.

Από τον τρόπο ορισμού του ολοκληρώματος γνωρίζουμε ότι

$$\lambda_d(M_u) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{M_u}(x)\, d\lambda(x), \tag{2.6}$$

άρα αρκεί να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα της χαρακτηριστικής συνάρτησης χ_{M_u} του M_u στον $\mathbb{R}^d$ είναι ίσο με μηδέν. Πρώτα δείχνουμε ότι η χ_{M_u} είναι μετρήσιμη.

Για κάθε $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ορίζουμε $g_t : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$g_t(x) = \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}. \tag{2.7}$$

Η g_t είναι μετρήσιμη για κάθε $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, αφού η f είναι συνεχής όντας Lipschitz. Έπεται ότι και οι συναρτήσεις

$$\underline{g} := \liminf_{t \to 0} g_t \quad \text{και} \quad \overline{g} := \limsup_{t \to 0} g_t \tag{2.8}$$

είναι μετρήσιμες.

Παρατηρούμε ότι το όριο $D_u f(x) = \lim\limits_{t \to 0} g_t(x)$ δεν υπάρχει αν και μόνο αν ισχύει η ανισότητα

$$\underline{g}(x) < \overline{g}(x), \tag{2.9}$$

άρα μπορούμε να γράψουμε το M_u ως εξής:

$$M_u = \{x \in \mathbb{R}^d : \underline{g}(x) < \overline{g}(x)\}. \tag{2.10}$$

Όμως, η συνάρτηση $x \mapsto \overline{g}(x) - \underline{g}(x)$ είναι μετρήσιμη ως διαφορά μετρήσιμων συναρτήσεων και κατά συνέπεια το M_u είναι μετρήσιμο σύνολο ως αντίστροφη εικόνα του $(0, \infty)$ μέσω μετρήσιμης συνάρτησης.

Έστω τώρα $x \in \mathbb{R}^d$. Θεωρούμε την συνάρτηση $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\mu(t) = f(x+tu)$. Εύκολα βλέπουμε ότι και η μ είναι M-Lipschitz, αφού για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} |\mu(t) - \mu(s)| &= |f(x+tu) - f(x+su)| \leqslant M\, \|(x+tu) - (x+su)\| \\ &= M\, \|(t-s)u\| = M\, \|u\|\, |t-s| \\ &= M\, |t-s|. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 1.1 η μ είναι παραγωγίσιμη σχεδόν για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Επομένως, υπάρχει η

$$\begin{aligned}\mu'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{\mu(t+h)-\mu(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+(t+h)u)-f(x+tu)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f((x+tu)+hu)-f(x+tu)}{h} = D_u f(x+tu)\end{aligned}$$

σχεδόν για κάθε $t \in \mathbb{R}$, δηλαδή η κατευθυνόμενη παράγωγος $D_u f(y)$ υπάρχει σχεδόν για κάθε y στην ευθεία $\ell_{x,u} = \{x+tu : t \in \mathbb{R}\}$, και αφού το x ήταν τυχόν, το συμπέρασμα ισχύει για κάθε ευθεία ℓ παράλληλη στο u. Δηλαδή, για κάθε ευθεία ℓ παράλληλη στο u έχουμε $\lambda_1(M_u \cap \ell) = 0$.

Τώρα, εφαρμόζουμε το θεώρημα Tonelli στην μετρήσιμη συνάρτηση χ_{M_u}. Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $u = e_1$, όπου $e_1 = (1, \dots, 0)$. Γράφουμε το τυχόν $x \in \mathbb{R}^d$ στη μορφή $x = (x_1, x')$, όπου $x_1 \in \mathbb{R}$ και $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, και θεωρούμε το σύνολο L όλων των ευθειών ℓ_{x',e_1}, $x_1 \in \mathbb{R}^{d-1}$, που είναι παράλληλες στο e_1. Έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda_d(M_{e_1}) &= \int_{\mathbb{R}^d}\chi_{M_{e_1}}(x)\,d\lambda(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\int_{\mathbb{R}}\chi_{M_{e_1}}(x_1,x')\,d\lambda_1(x_1)\right)d\lambda_{d-1}(x')\\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}}\lambda_1(M_{e_1}\cap \ell_{x',e_1})\,d\lambda_{d-1}(x') = 0,\end{aligned}$$

αφού $\lambda_1(M_{e_1} \cap \ell_{x',e_1}) = 0$ σχεδόν για κάθε $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$. Αυτό ολοκληρώνει το πρώτο βήμα.

Βέβαια, γνωρίζουμε ότι η ύπαρξη των κατευθυνόμενων παραγώγων δεν εγγυάται ότι η f είναι διαφορίσιμη. Όμως, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι (όλες) οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, \dots, d$ υπάρχουν σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$, άρα και το ανάδελτα $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$ της f ορίζεται σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$. Στο δεύτερο βήμα βρίσκουμε έναν καλό «υποψήφιο» για το διαφορικό της f.

Βήμα 2

Δείχνουμε ότι για κάθε $u \in \partial(\mathbb{B})$ ισχύει

(2.11) $$D_u f(x) = \langle \nabla f(x), u\rangle$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$.

Έστω $u \in \partial(\mathbb{B})$. Θεωρούμε τυχούσα $C^\infty(\mathbb{R}^d)$-συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα. Έχουμε ότι

(2.12) $$\int_{\mathbb{R}^d} D_u f(x)\phi(x)\,d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tu)-f(x)}{t}\,\phi(x)\,d\lambda(x).$$

Θεωρούμε την οικογένεια συναρτήσεων $m_t : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $t \neq 0$, που ορίζονται ως εξής:

$$m_t(x) = \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}\, \phi(x). \tag{2.13}$$

Για τον πρώτο όρο του γινομένου που ορίζει την $m_t(x)$ παρατηρούμε ότι

$$\frac{|f(x+tu) - f(x)|}{|t|} \leqslant \frac{M\, \|(x+tu) - x\|}{|t|} = \frac{M\, \|tu\|}{|t|} = \frac{M|t|\, \|u\|}{|t|} = M. \tag{2.14}$$

Η ϕ είναι φραγμένη όντας C^∞-συνάρτηση με συμπαγή φορέα. Θέτουμε

$$N := \sup\{|\phi(x)| : x \in \mathbb{R}^d\}. \tag{2.15}$$

Τότε, έχουμε $|m_t(x)| \leqslant M \cdot N$ σχεδόν παντού, και η σταθερή συνάρτηση $M \cdot N$ είναι ολοκληρώσιμη στον συμπαγή φορέα της ϕ. Τέλος, ισχύει ότι

$$\lim_{t\to 0} m_t(x) = D_u f(x) \phi(x) \tag{2.16}$$

σχεδόν παντού, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης για την (m_t):

$$\int_{\mathbb{R}^d} \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t} \phi(x)\, d\lambda(x) = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t} \phi(x)\, d\lambda(x). \tag{2.17}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t} \phi(x)\, d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(x+tu)}{t} \phi(x)\, d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(x)}{t} \phi(x)\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(x)}{t} \phi(x - tu)\, d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(x)}{t} \phi(x)\, d\lambda(x) \\ &\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \frac{\phi(x-tu) - \phi(x)}{t}\, d\lambda(x), \end{aligned}$$

όπου στην δεύτερη ισότητα έγινε αλλαγή μεταβλητής. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης ξανά, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \frac{\phi(x-tu) - \phi(x)}{t}\, d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \lim_{t\to 0} \frac{\phi(x-tu) - \phi(x)}{t}\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(-D_u \phi(x))\, d\lambda(x). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Δηλαδή,

$$\int_{\mathbb{R}^d} D_u f(x) \phi(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(-D_u \phi(x))\, d\lambda(x). \tag{2.19}$$

Όμως, αφού $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, έχουμε

$$D_u\phi(x) = \langle \nabla\phi(x), u\rangle = \sum_{i=1}^d u_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x). \tag{2.20}$$

Άρα,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) D_u\phi(x)\, d\lambda(x) = \sum_{i=1}^d u_i \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)\, d\lambda(x). \tag{2.21}$$

Για $i = 1$ γράφουμε $x = (t, y)$, όπου $t \in \mathbb{R}$ και $y \in \mathbb{R}^{d-1}$, και εφαρμόζουμε το θεώρημα Fubini:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x)\, d\lambda_d(x) &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t,y)\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,y)\, d\lambda_1(t)\right) d\lambda_{d-1}(y)\\ &= -\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(t,y)\phi(t,y)\, d\lambda_1(t)\right) d\lambda_{d-1}(y)\\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\phi(x)\, d\lambda_d(x),\end{aligned}$$

με την δεύτερη ισότητα να έπεται από το Λήμμα 2.2.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Fubini για $i = 2, \ldots, d$, τελικά έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)\, d\lambda(x) = -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\phi(x)\, d\lambda(x) \tag{2.22}$$

για κάθε i, επομένως

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^d u_i \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)\, d\lambda(x) &= -\sum_{i=1}^d u_i \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\phi(x)\, d\lambda(x)\\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f(x), u\rangle \phi(x)\, d\lambda(x).\end{aligned} \tag{2.23}$$

Τέλος, συνδυάζοντας τις (2.19), (2.21) και (2.23) παίρνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^d} D_u f(x)\phi(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f(x), u\rangle \phi(x)\, d\lambda(x), \tag{2.24}$$

και αφού η ϕ ήταν τυχούσα έπεται το ζητούμενο, δηλαδή

$$D_u f(x) = \langle \nabla f(x), u\rangle \tag{2.25}$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$.

Βήμα 3

Στο τρίτο βήμα θα δείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^d$. Πρώτα, παρατηρούμε ότι το σύνολο $\partial(\mathbb{B})$ είναι συμπαγές, και κατά συνέπεια διαχωρίσιμο. Συνεπώς, υπάρχει $D \subseteq \partial(\mathbb{B})$ το οποίο είναι αριθμήσιμο και πυκνό στο $\partial(\mathbb{B})$. Γράφουμε $D = \{u_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Ορίζουμε επίσης για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το σύνολο

(2.26) $$B_k := \{x \in \mathbb{R}^d : \text{ υπάρχουν τα } D_{u_k} f(x), \nabla f(x) \text{ και ισχύει } D_{u_k} f(x) = \langle \nabla f(x), u \rangle\},$$

και τέλος θεωρούμε την τομή

(2.27) $$B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k.$$

Όπως είδαμε στο πρώτο βήμα, το συμπλήρωμα του B_k, $k \in \mathbb{N}$, είναι σύνολο μηδενικού μέτρου. Αφού $\lambda(B_k^c) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, έχουμε $\lambda(B^c) = 0$. Άρα, για το «σχεδόν παντού» στον $\mathbb{R}^d$ αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε $x \in B$.

Ορίζουμε την συνάρτηση $P : \mathbb{R}^d \times \partial(\mathbb{B}) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ως εξής:

(2.28) $$P(x, u, t) = \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} - \langle \nabla f(x), u \rangle.$$

Για να δείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $x \in B$, αρκεί να δείξουμε ότι

(2.29) $$\lim_{t \to 0} P(x, u, t) = 0$$

ομοιόμορφα ως προς $u \in \partial(\mathbb{B})$.

Έστω λοιπόν $x \in B$. Για κάθε $u, v \in \partial(\mathbb{B})$ έχουμε

(2.30) $$\begin{aligned} |P(x, u, t) - P(x, v, t)| &= \left| \frac{f(x + tu) - f(x + tv)}{t} - \langle \nabla f(x), u - v \rangle \right| \\ &\leqslant \frac{|f(x + tu) - f(x + tv)|}{|t|} + \|\nabla f(x)\| \, \|u - v\|. \end{aligned}$$

Κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

1. Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, d$ έχουμε

   (2.31) $$\frac{|f(x + te_i) - f(x)|}{|t|} \leqslant \frac{M\|te_i\|}{|t|} = M.$$

   Άρα, ισχύει ότι

   (2.32) $$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| = \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} \right| \leqslant M.$$

   Έπεται ότι

   (2.33) $$\|\nabla f(x)\| \leqslant M\sqrt{d}.$$

2. $|f(x+tu)-f(x+tv)| \leqslant M\|tu-tv\| = M|t|\,\|u-v\|$.

Επιστρέφοντας στην (2.30) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} |P(x,u,t)-P(x,v,t)| &\leqslant \frac{M|t|\,\|u-v\|}{|t|} + \|\nabla f(x)\|\,\|u-v\| \\ &\leqslant M\|u-v\| + M\sqrt{d}\,\|u-v\| \\ &\leqslant (1+\sqrt{d})M\,\|u-v\|. \end{aligned}$$

Θα χρειαστούμε ένα λήμμα.

Λήμμα 2.3. *Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω D πυκνό υποσύνολο του X. Τότε, για κάθε $\eta>0$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένο $D_\eta \subseteq D$ το οποίο είναι η-πυκνό στον X.*

Απόδειξη. Έστω $\eta>0$. Ο (X,d) είναι συμπαγής, άρα ολικά φραγμένος. Άρα, υπάρχουν $x_1,\dots,x_m \in X$ ώστε

$$X = B(x_1,\eta/2)\cup\cdots\cup B(x_m,\eta/2). \tag{2.34}$$

Αφού το D είναι πυκνό, για κάθε $j=1,\dots,m$ μπορούμε να βρούμε $z_j\in D$ ώστε $d(x_j,z_j)<\eta/2$. Ορίζουμε

$$D_\eta = \{z_1,\dots,z_m\}. \tag{2.35}$$

Το D_η είναι πεπερασμένο σύνολο του D. Για κάθε $x\in X$ υπάρχει $j\leqslant m$ τέτοιο ώστε $x\in B(x_j,\eta/2)$, και τότε

$$d(x,z_j)\leqslant d(x,x_j)+d(x_j,z_j) < \frac{\eta}{2}+\frac{\eta}{2} = \eta. \tag{2.36}$$

Άρα, το D_η είναι η-πυκνό στον (X,d). □

Έστω $\varepsilon>0$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.3 για το $\partial(\mathbb{B})$, βλέπουμε ότι για κάθε $\eta>0$ υπάρχει πεπερασμένο $D_\eta\subseteq D$ το οποίο είναι η-πυκνό στο $\partial(\mathbb{B})$. Δηλαδή, για κάθε $u\in\partial(\mathbb{B})$ υπάρχει $u_k\in D_\eta$ τέτοιο ώστε $\|u-u_k\|<\eta$. Θέτουμε

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{(1+\sqrt{d})M} \tag{2.37}$$

και παρατηρούμε ότι για κάθε $u\in\partial(\mathbb{B})$ μπορούμε να βρούμε $u_k\in D_\eta$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} |P(x,u,t)-P(x,u_k,t)| &\leqslant (1+\sqrt{d})M\,\|u-u_k\| \\ &< (1+\sqrt{d})M\cdot\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{(1+\sqrt{d})M} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Όμως, αφού $x \in B$, εξ¨ ορισμού έχουμε ότι

$$\lim_{t \to 0} P(x, u_k, t) = 0 \tag{2.38}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι για κάθε $u_k \in D_\eta$ υπάρχει $\delta_k > 0$ τέτοιο ώστε: αν $0 < t < \delta_k$ τότε $|P(x, u_k, t)| < \varepsilon/2$. Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_k : u_k \in D_\eta\}$. Τότε, για κάθε $0 < t < \delta$ έχουμε

$$|P(x, u, t)| \leqslant |P(x, u, t) - P(x, u_k, t)| + |P(x, u_k, t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{2.39}$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{t \to 0} P(x, u, t) = 0 \tag{2.40}$$

ομοιόμορφα στο $\partial(\mathbb{B})$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

3 Παραλλαγές του θεωρήματος

Θα κλείσουμε παρουσιάζοντας μία ενδφέρουσα γενίκευση του θεωρήματος του Rademacher, η οποία διατυπώθηκε από τον Stepanov.

Θεώρημα 3.1 (Stepanov). *Έστω Ω ανοιχτό υποσύνολο του υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Τότε η f είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμη στο σύνολο:*

$$L(f) = \left\{ x \in \Omega : \limsup_{y \to x, y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < \infty \right\} \tag{3.1}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε δύο λήμματα.

Λήμμα 3.2. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $\{f_i : i \in I\}$ οικογένεια από M-Lipschitz συναρτήσεις $f_i : X \to \mathbb{R}$. Τότε, οι συναρτήσεις*

$$x \mapsto \sup_{i \in I} f_i(x) \tag{3.2}$$

και

$$x \mapsto \inf_{i \in I} f_i(x) \tag{3.3}$$

είναι M-Lipscitz στον X, αν είναι πεπερασμένες σε ένα σημείο.

Απόδειξη. Θα δείξουμε την (3.2). Θέτουμε $v(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$. Για κάθε $x, y \in X$ έχουμε ότι

$$f_i(y) \leqslant f_i(x) + M d(x, y), \tag{3.4}$$

αφού η f_i είναι M-Lipschitz για κάθε i. Παίρνοντας supremum ως προς i και στις δύο πλευρές της ανισότητας προκύπτει:

$$v(y) \leqslant v(x) + Md(x, y). \tag{3.5}$$

Αν $v(x) < \infty$, τότε θα ισχύει ότι το $v(y)$ είναι επίσης πεπερσμένο για κάθε $y \in X$ και επομένως έχουμε ότι:

$$v(y) - v(x) \leqslant Md(x, y), \tag{3.6}$$

για καθε $x, y \in X$. Τότε, με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε και την άλλη ανισότηταX

$$v(x) - v(y) \leqslant Md(x, y) \tag{3.7}$$

και τελικά συμπεραίνουμε ότι

$$|v(x) - v(y)| \leqslant Md(x, y). \tag{3.8}$$

□

Λήμμα 3.3. *Έστω $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, όπου A ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, και έστω $a \in A$. Υποθέτουμε ότι: $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ για κάθε $x \in A$, $h(a) = g(a)$ και οι h, g είναι διαφορίσιμες στο a. Τότε, η f είναι διαφορίσιμη στο a και έχει το ίδιο διαφορικό με τις h, g.*

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι $g - h \geqslant 0$ και $(g - h)(a) = 0$. Άρα, έχουμε ότι $\nabla(g - h)(a) = 0$, και τελικά $z_a := \nabla g(a) = \nabla h(a)$.

Για να δείξουμε το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{t \to 0} \left[\frac{f(x + tu) - f(x)}{t} - \langle z_a, u \rangle \right] = 0 \tag{3.9}$$

ομοιόμορφα ως προς $u \in \partial(\mathbb{B})$. Έχουμε ότι $h(a) = g(a) = f(a)$. Θα εφαρμόσουμε κριτήριο παρεμβολής: αφού $h \leqslant f \leqslant g$ στο A,

$$\frac{h(a + tu) - h(a)}{t} - \langle z_a, u \rangle \leqslant \frac{f(a + tu) - f(a)}{t} - \langle z_a, u \rangle \leqslant \frac{g(a + tu) - g(a)}{t} - \langle z_a, u \rangle \tag{3.10}$$

Το δεξί και το αριστερό μέλος της ανισότητας συγκλίνουν στο 0, ομοιόμορφα ως προς u, καθώς το $t \to 0$, αφού οι h, g είναι διαφορίσιμες στο a. Έπεται ότι το ίδιο ισχύει για τον μεσαίο όρο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1. Μπορούμε να υποθέσουμε οτι $m = 1$. Θεωρούμε μια αριθμήσιμη οικογένεια απο μπάλες $\mathcal{A} = \{B_i : i \in I\}$, όπου κάθε B_i έχει ρητό κέντρο και ακτίνα και η f είναι φραγμένη σε κάθε B_i. Παρατηρούμε ότι η $\mathcal{A}$ καλύπτει το $L(f)$. Τώρα, ορίζουμε τις συναρτήσεισ:

$$p_i(x) = \sup\{p(x) : \text{ η } p \text{ είναι } i - \text{Lipschitz και } p \leqslant f \text{ στην } B_i\} \tag{3.11}$$

και

$$q_i(x) = \inf\{q(x) : \text{ η } q \text{ είναι } i - \text{Lipschitz και } q \geqslant f \text{ στην } B_i\}. \tag{3.12}$$

Οι συναρτήσεις $p_i, q_i : B_i \to \mathbb{R}$ είναι i-Lipschitz για κάθε i, από το Λήμμα 3.2. Επίσης, ισχύει η ανισότητα $p_i \leqslant f_{|B_i} \leqslant q_i$. Από το Λήμμα 3.3, η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο x στο οποίο οι p_i, q_i είναι διαφορίσιμες και επιπλέον ισχύει ότι $p_i(x) = q_i(x)$ για κάποιο $i \in I$. Θα δείξουμε ότι κάθε σημείο στο $L(f)$ ικανοποιεί τα παραπάνω. Πρώτα, ορίζουμε το σύνολο

$$Z := \bigcup_{i=1}^{\infty}\{x \in B_i : \text{ είτε η } p_i \text{ είτε η } q_i \text{ δεν είναι διαφορίσιμη στο } x\}. \tag{3.13}$$

Όμως, οι p_i, q_i είναι Lipschitz συναρτήσεις. Επομένως, από το θεώρημα του Rademacher έπεται ότι $\lambda(Z) = 0$. Έστω, τώρα, $x \in L(f) \setminus Z$. Μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ και $M > 0$ τέτοια ώστε:

$$|f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x| \tag{3.14}$$

για κάθε $y \in B(x, \delta)$. Υπάρχουν άπειρες το πλήθος μπάλες B_i που περιέχουν το x, οπότε μπορούμε να βρούμε $i > M$ τέτοιο ώστε: $x \in B_i \subseteq B(x, \delta)$. Έτσι, για κάθε $y \in B_i \subseteq B(x, \delta)$ έχουμε:

$$f(y) \leqslant f(x) + M|y - x| \leqslant f(x) + i|y - x|. \tag{3.15}$$

Η συνάρτηση $y \mapsto f(x) + i|y - x|$ είναι i-Lipschitz και μεγαλύτερη από την f στην B_i οπότε από τον ορισμό της q_i παίρνουμε ότι:

$$f(y) \leq q_i(y) \leqslant f(x) + i|y - x|. \tag{3.16}$$

Ομοίως παίρνουμε και την αντίστοιχη ανισότητα για την p_i:

$$f(y) \geq p_i(y) \geqslant f(x) - i|y - x|. \tag{3.17}$$

Συνδυάζοντας τις (3.16), (3.17) και θέτοντας $y = x$ έχουμε ότι $q_i(x) = p_i(x) = f(x)$. Το θεώρημα έπεται. □

Αναφορές

[1] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1992.

[2] J. Heinonen, *Lectures on Lipschitz analysis*, 2005.

[3] M. Munoz, *Rademacher's theorem.*