Σύγκλιση σειρών Fourier σε χώρους L_p

Μιχάλης Σαράντης και Κωνσταντίνος Τσίνας

1 Βασικά αποτελέσματα από την ανάλυση Fourier

Ορισμός 1.1. Ο n-οστός πυρήνας του Dirichlet ορίζεται ως

$$D_n(y) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iky}. \tag{1.1}$$

Πρόταση 1.2. *Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και $y \in \mathbb{T}$ ισχύει*

$$D_n(y) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}. \tag{1.2}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
D_n(y) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{iky} = e^{-iny}\sum_{k=0}^{2n} e^{iky} \\
&= e^{-iny}\frac{e^{i(2n+1)y}-1}{e^{iy}-1} = \frac{e^{i(n+1)y}-e^{-iny}}{e^{iy}-1} \\
&= \frac{e^{\frac{iy}{2}}(e^{i(n+\frac{1}{2})y}-e^{-i(n+\frac{1}{2})y})}{e^{\frac{iy}{2}}(e^{\frac{iy}{2}}-e^{\frac{iy}{2}})} \\
&= \frac{2i\sin(n+\frac{1}{2})y}{2i\sin(\frac{y}{2})} \\
&= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Ορισμός 1.3. Ο n-οστός πυρήνας του Fejér ορίζεται ως

$$F_n(y) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(y). \tag{1.3}$$

Πρόταση 1.4. *Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και $y \in \mathbb{T}$ ισχύει*

$$F_n(y) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{ny}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\right)^2. \tag{1.4}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
F_n(y) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}} \\
&= \frac{1}{n\sin\frac{y}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{i(k+\frac{1}{2})y}-e^{-i(k+\frac{1}{2})y}}{2i} \\
&= \frac{1}{2in\sin\frac{y}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\frac{y}{2}}e^{iky}-e^{-i\frac{y}{2}}e^{iky} \\
&= \frac{1}{2in\sin\frac{y}{2}}\left(e^{i\frac{y}{2}}\frac{e^{iny}-1}{e^{iy}-1}+e^{-i\frac{y}{2}}\frac{e^{-iny}-1}{e^{-iy}-1}\right) \\
&= \frac{1}{2in\sin\frac{y}{2}}\frac{e^{iny}+e^{-iny}-2}{e^{i\frac{y}{2}}-e^{-i\frac{y}{2}}} \\
&= \frac{1}{n\sin\frac{y}{2}}\frac{2(\cos ny-1)}{(2i)^2\sin\frac{y}{2}} \\
&= \frac{1}{n(\sin\frac{y}{2})^2}\frac{1-\cos ny}{2} \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{ny}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\right)^2.
\end{aligned}$$

□

Ορισμός 1.5. Αν $f\in L_1(\mathbb{T})$, τότε ο n-οστός μέσος του Fejér ορίζεται ως

$$\sigma_n(f,y)=(F_n*f)(y)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}s_k(f,y). \tag{1.5}$$

Ορισμός 1.6. Μια ακολουθία συναρτήσεων $(K_n)_{n\geqslant 1}$ ονομάζεται καλός πυρήνας αν ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}K_n(y)dy=1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

(β) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{T}}|K_n(y)|dy=M<\infty$.

(γ) $\int_{\delta\leqslant|y|\leqslant\pi}|K_n(y)|dy\to 0$ όταν $n\to\infty$ για κάθε $\delta>0$.

Θεώρημα 1.7. *Έστω $(K_n)_{n\geqslant 1}$ καλός πυρήνας. Τότε:*

(α) *Για κάθε συνεχή συνάρτηση f ισχύει*

$$\|K_n*f-f\|_\infty\to 0 \ \text{ όταν } n\to\infty. \tag{1.6}$$

(β) *Για κάθε $f\in L_p(\mathbb{T}),\ 1\leqslant p<\infty$ ισχύει*

$$\|K_n*f-f\|_p\to 0 \ \text{ όταν } n\to\infty. \tag{1.7}$$

Απόδειξη. Έστω f συνεχής συνάρτηση και έστω $\epsilon > 0$. Αφού το $\mathbb{T}$ είναι συμπαγές, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής σε αυτό. Δηλαδή υπάρχει σταθερά $M_f > 0$ τέτοια ώστε $|f(x)| < M_f$ για κάθε $x \in \mathbb{T}$ και υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2M}. \tag{1.8}$$

Επίσης, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει

$$\left| \int_{\delta \leqslant |u| \leqslant \pi} K_n(u) du \right| \leqslant \frac{\epsilon}{4M_f}. \tag{1.9}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
|(K_n * f)(y) - f(y)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) K_n(y - x) dx - f(y) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K_n(y - x) dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (f(x) - f(y)) K_n(y - x) dx \right| \\
&\leqslant \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|y-x|<\delta} (f(x) - f(y)) K_n(y - x) dx \right| \\
&+ \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|y-x|\geqslant\delta} (f(x) - f(y)) K_n(y - x) dx \right| \\
&< \frac{\epsilon}{2M} \frac{1}{2\pi} \int_{|y-x|<\delta} |K_n(y - x)| dx + 2M_f \frac{1}{2\pi} \int_{|y-x|\geqslant\delta} |K_n(y - x)| dx \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Άρα $\|K_n * f - f|_\infty \to 0$ όταν $n \to \infty$.

Έστω $f \in L_p(\mathbb{T})$. Λόγω της πυκνότητας των συνεχών συναρτήσεων, υπάρχει $h \in C(\mathbb{T})$ ώστε

$$\|f - h\|_p < \min \left\{ \frac{\epsilon}{3\mathrm{sup}_n \|K_n\|_1}, \frac{\epsilon}{3} \right\}. \tag{1.10}$$

Από την ανισότητα του Young για συνελίξεις, έχουμε

$$\|K_n * (f - h)\|_p \leqslant \|K_n\|_1 \|f - h\|_p < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1.11}$$

Επιπλέον, λόγω του πρώτου σκέλους του θεωρήματος, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει $\|K_n * h - h\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\|K_n * f - f\|_p &\leqslant \|K_n * f - K_n * h\|_p + \|K_n * h - h\|_p + \|h - f\|_p \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \|K_n * h - h\|_\infty + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Άρα $\|K_n * f - f\|_p \to 0$ όταν $n \to \infty$. $\square$

Η παρακάτω πρόταση μας δείχνει ότι οι πυρήνες του Dirichlet δεν αποτελούν καλό πυρήνα.

Πρόταση 1.8. $\|D_n\|_1 \sim \frac{4}{\pi^2}\ln n$, *και άρα* $\|D_n\|_1 \to \infty$ *όταν* $n \to \infty$.

Απόδειξη. Αφού η D_n είναι άρτια και $\sin\frac{t}{2} > 0$ στο $(0,\pi)$, έχουμε

$$\begin{aligned} L_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin((n+1/2)t)| \left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{2}{t}\right) dt \\ + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\sin((n+1/2)t)|\,\frac{1}{t}\,dt = A_n + B_n. \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος είναι φραγμένος: αφού η $\phi(t) = \left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{2}{t}\right)$ είναι φραγμένη, έχουμε $A_n = O(1)$. Για τον δεύτερο όρο, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $s = \left(n+\frac{1}{2}\right)t$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi+\pi/2} |\sin s|\,\frac{d\lambda(s)}{s} = \frac{2}{\pi}\int_\pi^{n\pi} |\sin s|\,\frac{d\lambda(s)}{s} + O(1) \\ &= C_n + O(1), \end{aligned}$$

αφού, λόγω της $\lim_{s\to 0^+}\frac{\sin s}{s} = 1$, έχουμε

$$\int_0^\pi \frac{\sin s}{s}\,d\lambda(s) = O(1) \quad \text{και} \quad \int_{n\pi}^{n\pi+\pi/2} \frac{|\sin s|}{s}\,d\lambda(s) \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{n\pi} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{1.12}$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι

$$C_n := \frac{2}{\pi}\int_\pi^{n\pi} |\sin s|\,\frac{d\lambda(s)}{s} = \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1). \tag{1.13}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin s|}{s}\,d\lambda(s) \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^\pi \frac{|\sin(k\pi+t)|}{k\pi+t}\,dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\sin t)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\pi+t}\,dt. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $t \in (0,\pi)$,

$$\frac{1}{(k+1)\pi} \leqslant \frac{1}{k\pi+t} \leqslant \frac{1}{k\pi}, \tag{1.14}$$

άρα

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\pi+t} \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}. \tag{1.15}$$

Τα δύο αθροίσματα $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$ και $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ είναι $\ln n + O(1)$. Αφού $\int_0^\pi \sin t\, dt = 2$, καταλήγουμε στην

$$C_n = \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1) \tag{1.16}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Πρόταση 1.9. *Οι πυρήνες του Fejér αποτελούν καλό πυρήνα.*

Απόδειξη. Η πρώτη ιδιότητα έπεται άμεσα από τον ορισμό. Η δεύτερη έπεται από την πρώτη και από το γεγονός ότι $F_n(y) \geqslant 0$ για κάθε y. Μένει να αποδειχθεί η τρίτη ιδιότητα. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\delta\leqslant|y|\leqslant\pi} |F_n(y)|dy &= \frac{1}{n}\int_{\delta\leqslant|y|\leqslant\pi} \left(\frac{\sin\frac{ny}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\right)^2 dy \\
&\leqslant \frac{1}{n}\int_{\delta\leqslant|y|\leqslant\pi} \frac{1}{\sin^2\frac{y}{2}}dy \\
&\leqslant \frac{1}{n}\int_{\delta\leqslant|y|\leqslant\pi} \frac{1}{(y/2)^2}dy \\
&= \frac{8}{n}\Big(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\pi}\Big) \to 0
\end{aligned}$$

όταν $n \to \infty$. □

Πορίσματα της παραπάνω πρότασης αποτελούν τα ακόλουθα δύο γνωστά αποτελέσματα

Πρόταση 1.10. *Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον* $L_p(\mathbb{T})$.

Απόδειξη. Το $\sigma_n(f) = F_n * f$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η $(F_n)_{n\geqslant 1}$ αποτελεί καλό πυρήνα, $\|F_n * f - f\|_p \to 0$ όταν $n \to \infty$. □

Πόρισμα 1.11 (Λήμμα Riemann-Lebesgue)**.** *Έστω* $f \in L_p(\mathbb{T})$. *Τότε* $\lim\limits_{|n|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0$.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\|f - p\|_1 < \epsilon$ και έστω k ο βαθμός του. Τότε $\widehat{p}(n) = 0$ για κάθε $|n| > k$, άρα για κάθε $|n| > k$,

$$|\widehat{f}(n)| = |\widehat{f}(n) - \widehat{p}(n)| = |\widehat{(f-p)}(n)| \leqslant \|f - p\|_1 < \epsilon \tag{1.17}$$

και το ζητούμενο έπεται. □

2 Σύγκλιση στον L_2

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι ο χώρος L_2 εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{g(x)}dx \tag{2.1}$$

αποτελεί χώρο Hilbert, ενώ το σύνολο $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$, όπου $e_n(x) = e^{inx}$ για κάθε $x \in \mathbb{T}$, είναι ορθοκανονικό (και μάλιστα ορθοκανονική βάση αφού τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $L_2(\mathbb{T})$).

Θεώρημα 2.1. *Έστω $f \in L_2(\mathbb{T})$. Τότε $\|f - s_n(f)\|_2 \to 0$ καθώς $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_2 < \epsilon$ και έστω n_0 ο βαθμός του. Παρατηρούμε ότι

$$s_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k \tag{2.2}$$

και άρα, αν S_n είναι το σύνολο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων βαθμού το πολύ n,

$$\|f - s_n(f)\|_2 = \mathrm{dist}(f, S_n) \tag{2.3}$$

(αφού το S_n αποτελεί γραμμικό υπόχωρο διάστασης $2n + 1 < \infty$ και άρα κλειστό γραμμικό υπόχωρο του $L_2(\mathbb{T})$). Για $n \geqslant n_0$ έχουμε $S_n \supseteq S_{n_0}$, άρα

$$\|f - s_n(f)\|_2 = \mathrm{dist}(f, S_n) \leqslant \mathrm{dist}(f, S_{n_0}) \leqslant \|f - p\|_2 < \epsilon \tag{2.4}$$

και η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Ακόμα ένα όμορφο αποτέλεσμα στον $L_2(\mathbb{T})$, απόρροια των ιδιοτήτων του ως χώρου με εσωτερικό γινόμενο, είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.2 (ταυτότητα του Parseval)**.** *Για κάθε $f \in L_2(\mathbb{T})$,*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2. \tag{2.5}$$

Απόδειξη. Το σύνολο $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L_2(\mathbb{T})$, άρα

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, e_n \rangle|^2, \tag{2.6}$$

δηλαδή

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2, \tag{2.7}$$

που είναι το ζητούμενο. □

3 Σύγκλιση στον L_p

Η γενική μελέτη της σύγκλισης σε χώρους L_p δεν είναι τόσο απλή διότι δεν υπάρχει η δομή χώρου Hilbert. Ξεκινάμε από το ακόλουθο απλό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.1. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) $\|f - s_n(f)\|_p \to 0$ *για κάθε* $f \in L_p(\mathbb{T})$ *όταν* $n \to \infty$.

(β) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|s_n\|_p < \infty$, *όπου* $\|s_n\|_p$ *η νόρμα του τελεστή* $s_n : L_p(\mathbb{T}) \mapsto L_p(\mathbb{T})$.

Απόδειξη. (α) $\Longrightarrow$ (β) Λόγω της σύγκλισης, για κάθε $f \in L_p(\mathbb{T})$ ισχύει

$$\|f - s_n(f)\|_p < M_f \tag{3.1}$$

για κάποιο $M_f > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\|s_n(f)\|_p \leqslant \|f - s_n(f)\|_p + \|f\|_p < M_f + \|f\|_p. \tag{3.2}$$

Από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος έπεται ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|s_n\|_p < M < \infty$.
(β) $\Longrightarrow$ (α) Έστω τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_p < \epsilon$ και έστω n_0 ο βαθμός του. Για $n \geqslant n_0$ έχουμε $s_n(p) = p$, άρα

$$\begin{aligned}\|f - s_n(f)\|_p &= \|f - p + s_n(p) - s_n(f)\|_p \leqslant \|f - p\|_p + \|s_n(p) - s_n(f)\|_p \\ &\leqslant \|f - p\|_p(\|s_n\|_p + 1) < \epsilon(\sup_{n\in\mathbb{N}}(\|s_n\|_p + 1),\end{aligned}$$

άρα $\|f - s_n(f)\|_p \to 0$ όταν $n \to \infty$. □

Ορισμός 3.2. Για ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο f ορίζουμε τον μετασχηματισμό Hilbert ως εξής:

$$H(f,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} -i\mathrm{sgn}(k)\widehat{f}(k)e^{ikx} \tag{3.3}$$

Οι ακόλουθοι τελεστές θα μας είναι επίσης χρήσιμοι για τον χειρισμό του μετασχηματισμού Hilbert.

$$P_+(f,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{ikx} \tag{3.4}$$

$$P_-(f,x) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \widehat{f}(n)e^{ikx} \tag{3.5}$$

Ορίζουμε επίσης τους τελεστές

$$s_n^+(f,x) = \sum_{k=0}^{2n} \widehat{f}(k)e^{ikx} \tag{3.6}$$

και

$$A(f,x) = P_+(f,x) + \widehat{f}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{ikx}. \tag{3.7}$$

Πρόταση 3.3. *Έστω $1 < p < \infty$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(1) $\|H\|_p < \infty$.
(2) $\|P_+\|_p < \infty$.
(3) $\|A\|_p < \infty$.
(4) $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|s_n^+\|_p < \infty$.

(5) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|s_n\|_p < \infty$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι
$$P_+(f) = \frac{1}{2}(f + iH(f) - \widehat{f}(0)).$$
Αφού $|\widehat{f}(0)| \leqslant \|f\| \leqslant \|f\|_p$, η P_+ είναι φραγμένη αν και μόνο αν η H είναι φραγμένη και άρα $(1) \iff (2)$

Κατά προφανή τρόπο $(2) \iff (3)$.

Για την $(4) \implies (3)$ γράφουμε
$$\begin{aligned}\|A(f)\|_p = \|\lim_{n\to\infty} s_n^+(f)\|_p &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\|s_n^+(f)\|_p \\ &\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\|s_n^+\|_p\|f\|_p.\end{aligned}$$

Για την $(3) \implies (4)$ παρατηρούμε ότι
$$\begin{aligned}s_n^+(f,x) &= A(f,x) - \sum_{k=2n+1}^{\infty}\widehat{f}(k)e^{ikx} \\ &= A(f,x) - e^{i(2n+1)x}\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}(2n+1+k)e^{ikx},\end{aligned}$$

άρα
$$s_n^+(f,x) = A(f,x) - e^{i(2n+1)x}A(g,x),$$
όπου $g(x) = f(x)e^{-i(2n+1)x}$. Άρα
$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|s_n^+(f)\|_p \leqslant \|A\|_p\|f\|_p + \|A\|_p\|g\|_p = 2\|A\|_p\|f\|_p$$

και το ζητούμενο έπεται.

Για την $(4) \iff (5)$ Έστω $h(x) = f(x)e^{inx}$. Τότε,

$$\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ikx} = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n}\widehat{f}(k-n)e^{ikx} = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n}\widehat{g}(k)e^{ikx}. \tag{3.8}$$

Άρα $\|s_n(f)\|_p = \|s_n^+(g)\|_p$ και αφού $\|f\|_p = \|g\|_p$ έπεται ότι $\|s_n\|_p = \|s_n^+\|_p$. □

Από τα παραπάνω έπεται το εξής:

Πόρισμα 3.4. *Έστω $1 < p < \infty$. Τότε η $s_n(f)$ συγκλίνει στην f ως προς την L_p νόρμα για κάθε $f \in L_p(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν $\|H\|_p < \infty$.*

Άρα για την L_p σύγκλιση μένει να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.5. *Έστω $1 < p < \infty$. Τότε υπάρχει μια σταθερά A_p έτσι ώστε*

$$\|H(f)\|_p \leqslant A_p \|f\|_p \tag{3.9}$$

για όλα τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα f. Έτσι η H επεκτείνεται σε έναν φραγμένο τελεστή από τον $L_p(\mathbb{T})$ στον $L_p(\mathbb{T})$. Κατά συνέπεια η $s_n(f)$ συγκλίνει στην f ως προς την L_p νόρμα για κάθε $f \in L_p(\mathbb{T})$.

Εδώ θα χρησιμοποιηθεί το *θεώρημα παρεμβολής των Riesz-Thorin*:

Θεώρημα 3.6. *Έστω $1 \leqslant p_1, p_2, q_1, q_2 \leqslant \infty$. Έστω T γραμμικός τελεστής ο οποίος είναι φραγμένος από τον L_{p_1} στον L_{q_1} και φραγμένος από τον L_{p_2} στον L_{q_2}. Θέτουμε $A = \|T\|_{L_{p_1} \to L_{q_1}}$ και $B = \|T\|_{L_{p_2} \to L_{q_2}}$. Τότε για κάθε $0 \leqslant a \leqslant 1$*

$$\|Tf\|_{q_a} \leqslant A^{1-a} B^a \|f\|_{p_a} \tag{3.10}$$

όπου $\frac{1}{p_a} = \frac{1-a}{p_1} + \frac{a}{p_2}$ και $\frac{1}{q_a} = \frac{1-a}{q_1} + \frac{a}{q_2}$.

Πίσω στο προς απόδειξη θεώρημα.

Απόδειξη. Έστω f μη μηδενικό πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο με $\widehat{f}(0) = 0$. Τότε ως γνωστόν $\widehat{f}(-n) = \overline{\widehat{f}(n)}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} H(f,x) &= -i \sum_{k>0} \widehat{f}(k) e^{ikx} + i \sum_{k<0} \widehat{f}(k) e^{ikx} \\ &= \sum_{k>0} (-i\widehat{f}(k) e^{ikx}) + \overline{(-i\widehat{f}(k) e^{ikx})} \\ &= 2\mathrm{Re}(\sum_{k>0} -i\widehat{f}(k) e^{ikx}), \end{aligned}$$

και άρα η $H(f)$ είναι επίσης πραγματική. Αφού $\widehat{f}(0) = 0$, προκύπτει ότι

$$(f + iH(f))(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + i(-\mathrm{sgn}(k))) \widehat{f}(k) e^{ikx} = 2 \sum_{k>0} \widehat{f}(k) e^{ikx}. \tag{3.11}$$

Έτσι, η $(f + iH(f))^{2k}$ έχει μόνο θετικές συχνότητες για κάθε k φυσικό, οπότε

$$\int_{\mathbb{T}} (f + iH(f))^{2k} = 0. \tag{3.12}$$

Αναπτύσσοντας την ταυτότητα,

$$\sum_{j=0}^{2k} \int_{\mathbb{T}} i^j \binom{2k}{j} (H(f))^j f^{2k-j} = 0. \tag{3.13}$$

Παίρνοντας πραγματικό μέρος στο παραπάνω, έχουμε ότι

$$\sum_{j=0}^{k} \int_{\mathbb{T}} (-1)^j \binom{2k}{2j} (H(f))^{2j} f^{2k-2j} = 0. \tag{3.14}$$

Κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned}\|H(f)\|_{2k}^{2k} &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}(H(f))^{2k}\right| \\ &= \left|-(-1)^k\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}(-1)^j\binom{2k}{2j}(H(f))^{2j}f^{2k-2j}\right| \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{2j}\|(H(f))^{2j}f^{2k-2j}\|_1.\end{aligned}$$

Για κάθε j, λόγω της ανισότητας Holder με συντελεστές $\frac{k}{j}$ και $\frac{k}{k-j}$, έχουμε:

(3.15) $$\|H(f)^{2j}f^{2k-2j}\|_1 \leqslant \|H(f)^{2j}\|_{\frac{k}{j}}\|f^{2k-2j}\|_{\frac{k}{k-j}} = \|H(f)\|_{2k}^{2j}\|f\|_{2k}^{2k-2j},$$

επομένως,

(3.16) $$\|H(f)\|_{2k}^{2k} \leqslant \sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{2j}\|H(f)\|_{2k}^{2j}\|f\|_{2k}^{2k-2j}.$$

Εάν θέσουμε

(3.17) $$R = \frac{\|H(f)\|_{2k}}{\|f\|_{2k}},$$

τότε διαιρώντας την παραπάνω σχέση με $\|f\|_{2k}^{2k}$ προκύπτει

(3.18) $$R^{2k} \leqslant \sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{2j}R^{2j}.$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο

(3.19) $$P(x) = x^{2k} - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{2j}x^{2j}.$$

Εφ'όσον το P έχει άρτιο βαθμό, ισχύει ότι

(3.20) $$\lim_{|x|\to\infty}P(x) = +\infty.$$

Άρα υπάρχει σταθερά C_{2k} τέτοια, ώστε

(3.21) $$P(x) \leqslant 0 \Longrightarrow |x| \leqslant C_{2k}.$$

Αυτό σημαίνει ότι $|R| \leqslant C_{2k}$ και επομένως

(3.22) $$\|H(f)\|_{2k} \leqslant C_{2k}\|f\|_{2k}$$

για όλα τα πραγματικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα με $\widehat{f}(0) = 0$.

Έστω ότι $\widehat{f}(0) = 0$. Τότε επειδή ο μετασχηματισμός Hilbert μιας σταθερής συνάρτησης είναι ίσος με 0 έχουμε:

$$\|H(f)\|_{2k} = \|H(f - \widehat{f}(0))\|_{2k} \leqslant C_{2k}\|f - \widehat{f}(0)\|_{2k} \leqslant 2C_{2k}\|f\|_{2k}. \tag{3.23}$$

Έστω ότι η f είναι τυχαίο τριγωνομετρικό πολυώνυμο και έστω $f(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$. Τότε,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{a_k + \overline{a_{-k}}}{2} e^{ikx} + \sum_{k=-n}^{n} \frac{a_k - \overline{a_{-k}}}{2} e^{ikx} \\ &= \left(\mathrm{Re}(a_0) + \sum_{k=1}^{n} 2\mathrm{Re}(a_k + a_{-k}) \cos(kx) \right) \\ &\quad + i \left(\mathrm{Im}(a_0) + \sum_{k=1}^{n} 2\mathrm{Re}(a_k - a_{-k}) \sin(kx) \right). \end{aligned}$$

Δηλαδή, $f = R + iQ$ όπου R, Q πραγματικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα και τριγωνική ανισότητα,

$$\|H(f)\|_{2k} \leqslant \|H(R)\|_{2k} + \|iH(Q)\|_{2k} \leqslant 2C_{2k}(\|R\|_{2k} + \|Q\|_{2k}) \leqslant 4C_{2k}\|f\|_{2k}. \tag{3.24}$$

Άρα υπάρχει μια σταθερά A_p τέτοια ώστε

$$\|H(f)\|_p \leqslant A_p \|f\|_p \tag{3.25}$$

για όλα τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα f και για $p = 2k$ όπου $k \in \mathbb{N}$. Αφού κάθε $p \geqslant 2$ είναι σε ένα διάστημα της μορφής $[2k, 2k+2]$ το θεώρημα παρεμβολής των Riesz-Thorin επεκτείνει το αποτέλεσμα για κάθε $p \geqslant 2$. Αφού τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $L_p(\mathbb{T})$ η H επεκτείνεται σε ένα φραγμένο τελεστή στον $L_p(\mathbb{T})$.

Για $1 < p < 2$ χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο H είναι αντιερμιτιανός έχουμε ότι αν p' τέτοιο ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ και $p' \geqslant 2$ τότε

$$|\langle H(f), g\rangle| = |\langle -f, H(g)| \leqslant \|f\|_p \|H(g)\|_{p'} \leqslant C_{p'} \|f\|_p \|g\|_{p'}. \tag{3.26}$$

Αν η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο και $g = \frac{|H(f)|^p}{\overline{H(f)}}$ τότε $g \in L_{p'}(\mathbb{T})$ αφού

$$\begin{aligned} \|g\|_{p'} &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{|H(f)|^p}{\overline{H(f)}} \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (|H(f)|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= \|H(f)\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\|H(f)\|_p^p = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} H(f) \frac{|H(f)|^p}{H(f)} \right| = |\langle H(f), g\rangle| \leqslant C_{p'} \|f\|_p \|H(f)\|_p^{p-1}. \tag{3.27}$$

Συνεπώς $\|H(f)\|_p \leqslant C_{p'}\|f\|_p$ δηλαδή ο H είναι L_p φραγμένος στο χώρο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων για $1 < p < 2$. Λόγω της πυκνότητάς τους μπορούμε να επεκτείνουμε τον H σε ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή στον $L_p(\mathbb{T})$. $\square$