Αρμονική ανάλυση στον διακριτό κύβο και θεωρία κοινωνικής επιλογής

Ειρήνη Ανδρεάδη, Δημήτρης Λαμπράκης, Αγγελική Μενεγάκη

1 Boolean συναρτήσεις και ο μετασχηματισμός Fourier

1.1 Boolean συναρτήσεις

Ορισμός 1.1. Μια Boolean συνάρτηση f απεικονίζει δυαδικά διανύσματα σε μια δυαδική τιμή. Δηλαδή, είναι μια συνάρτηση $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Για παράδειγμα, στην θεωρία κοινωνικής επιλογής, μια Boolean συνάρτηση μπορεί να είναι ένας «κανόνας» εκλογής μεταξύ δύο υποψηφίων, τους οποίους ορίζουμε ως 0 ή 1.

Σημείωση 1.2. Μια Boolean συνάρτηση μπορεί να είναι και της μορφής $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ ή $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$.

Το σύνολο $\{-1,1\}^n$ ονομάζεται κύβος του Hamming (ή υπερκύβος, n-κύβος, Boolean κύβος ή διακριτός κύβος). Συχνά ενδιαφερόμαστε για την απόσταση Hamming μεταξύ δύο διανυσμάτων $x, y \in \{-1,1\}^n$, που ορίζεται ως εξής:

$$\Delta(x,y) = \#\{i : x_i \neq y_i\}, \tag{1.1}$$

όπου x_i και y_i είναι οι i-οστές συντεταγμένες του x και του y αντίστοιχα.

1.2 Το ανάπτυγμα Fourier: συναρτήσεις ως πλειογραμμικά πολυώνυμα

Το *ανάπτυγμα Fourier* μιας Boolean συνάρτησης $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ είναι η αναπαράστασή της ως ένα πραγματικό πλειογραμμικό πολυώνυμο. Πλειογραμμικό σημαίνει ότι καμία μεταβλητή x_i δεν εμφανίζεται υψωμένη στο τετράγωνο, στον κύβο κτλ.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι $n = 2$ και $f = \max_2$, η συνάρτηση «maximum» των δύο τιμών. Έχουμε

$$\max\nolimits_2(1,1) = 1, \quad \max\nolimits_2(-1,1) = 1, \quad \max\nolimits_2(1,-1) = 1, \quad \max\nolimits_2(-1,-1) = -1. \tag{1.2}$$

Μπορούμε να εκφράσουμε την $\max_2$ μέσω του πλειογραμμικού πολυωνύμου

$$\max\nolimits_2(x_1,x_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2. \tag{1.3}$$

Αυτό είναι το ανάπτυγμα Fourier της $\max_2$.

Ως ένα άλλο παράδειγμα, θεωρούμε την συνάρτηση «πλειοψηφίας» $\mathrm{Maj}_2 : \{-1,1\}^3 \to \{-1,1\}$ που έχει ως τιμή εκείνη που πλειοψηφεί στις συντεταγμένες του x. Για παράδειγμα,

$$\mathrm{Maj}_3(1,-1,1) = 1 \text{ και } \mathrm{Maj}_3(-1,-1,1) = -1. \tag{1.4}$$

Το ανάπτυγμα Fourier της Maj_3 είναι:

$$\mathrm{Maj}_3(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_1x_2x_3. \tag{1.5}$$

Ας δούμε πώς βρήκαμε αυτά τα αποτελέσματα.

Έστω $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ μια Boolean συνάρτηση. Για κάθε $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \{-1,1\}^n$, το *πολυώνυμο δείκτης*

$$\mathbf{1}_{\{\alpha\}}(x) = \left(\frac{1+\alpha_1x_1}{2}\right)\left(\frac{1+\alpha_nx_n}{2}\right)\cdots\left(\frac{1+\alpha_nx_n}{2}\right) \tag{1.6}$$

παίρνει την τιμή 1 όταν $x = \alpha$, δηλαδή όταν $x_i = \alpha_i$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$, και την τιμή 0 όταν $x \in \{-1,1\}^n \setminus \{\alpha\}$. Οπότε, η f παίρνει την εξής μορφή:

$$f(x) = \sum_{\alpha\in\{-1,1\}^n} f(\alpha)\mathbf{1}_{\{\alpha\}}(x). \tag{1.7}$$

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα με την $\max_2$, έχουμε από το παραπάνω:

$$\begin{aligned}\max_2(x) = 1\cdot\left(\frac{1+x_1}{2}\right)\left(\frac{1+x_2}{2}\right) + 1\cdot\left(\frac{1+(-1)x_1}{2}\right)\left(\frac{1+x_2}{2}\right)\\ + 1\cdot\left(\frac{1+x_1}{2}\right)\left(\frac{1+(-1)x_2}{2}\right) + (-1)\cdot\left(\frac{1+(-1)x_1}{2}\right)\left(\frac{1+(-1)x_2}{2}\right)\\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2.\end{aligned}$$

Παρατηρήσεις 1.3. (α) Η παραπάνω διαδικασία δουλεύει εξίσου καλά για συναρτήσεις $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$.

(β) Εφόσον τα πολυώνυμα δείκτες είναι πλειογραμμικά, όταν αναλύονται, η διαδικασία παράγει πάντα πλειογραμμικά πολυώνυμα. Στην περίπτωση που το πεδίο τιμών είναι το $\mathbb{R}$, απλά αντικαθιστούμε τα τετράγωνα με μονάδες, δηλαδή $x_i^k = x_i^{k \pmod 2}$, εφόσον κάθε συντεταγμένη ενός διανύσματος από το $\{-1,1\}^n$ ανήκει στο $\{-1,1\}$.

(γ) Η αναπαράσταση μιας $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ σε πλειογραμμικό πολυώνυμο, όπως θα δούμε παρακάτω, είναι μοναδική.

(δ) Το πλειογραμμικό πολυώνυμο της f μπορεί να έχει μέχρι και 2^n όρους, όσο είναι και το πλήθος των $S \subseteq [n] := \{1,2,\dots,n\}$. Για το μονώνυμο που αντιστοιχεί στο S γράφουμε

$$x^S = \prod_{i\in S} x_i \tag{1.8}$$

(με $x^{\emptyset} = 1$ κατά σύμβαση) και χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό για τον συντελεστή του: $\widehat{f}(S) :=$ ο συντελεστής του x^S στην πλειγραμμική αναπαράσταση της f.

Με βάση τα παραπάνω, έχουμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 1.4. *Κάθε $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ γράφεται μοναδικά ως ένα πλειογραμμικό πολυώνυμο:*

$$f(x) = \sum_{S\subseteq[n]} \widehat{F}(S)x^S. \tag{1.9}$$

Η αναπαράσταση αυτή της f λέγεται *ανάπτυγμα Fourier* της f και ο πραγματικός αριθμός $\widehat{f}(S)$ καλείται *συντελεστής Fourier* της f στο S. Συλλογικά, οι συντελεστές είναι το *φάσμα Fourier* της f.

Με αυτούς τους συμβολισμούς, στο παράδειγμα της $\max_2$ που συζητήσαμε προηγουμένως, έχουμε

$$\widehat{\max_2}(\emptyset) = \frac{1}{2}, \quad \widehat{\max_2}(\{1\}) = \frac{1}{2}, \quad \widehat{\max_2}(\{2\}) = \frac{1}{2}, \quad \widehat{\max_2}(\{1,2\}) = -\frac{1}{2}. \tag{1.10}$$

Ενώ για την Maj_3 έχουμε

$$\widehat{\mathrm{Maj}_3}(\{1\}) = \widehat{\mathrm{Maj}_3}(\{2\}) = \widehat{\mathrm{Maj}_3}(\{3\}) = \frac{1}{2}, \quad \widehat{\mathrm{Maj}_3}(\{1,2,3\}) = -\frac{1}{2}, \tag{1.11}$$

και $\widehat{\mathrm{Maj}_3}(S) = 0$ διαφορετικά.

Ολοκληρώνουμε αυτήν την ενότητα εισάγοντας κάποιον ακόμα συμβολισμό. Είναι βολικό να σκεφτόμαστε το μονώνυμο x^S ως συνάρτηση του $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, οπότε γράφουμε

$$\chi_S(x) = x^S = \prod_{i\in S} x_i. \tag{1.12}$$

Οπότε, μερικές φορές γράφουμε

$$f(x) = \sum_{S\subseteq[n]} \widehat{f}(S)\chi_S(x). \tag{1.13}$$

Μέχρι τώρα οι συμβολισμοί μας έχουν νόημα μόνο στον κύβο του Hamming $\{-1,1\}^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Μια άλλη συχνή αναπαράσταση του κύβου είναι το $\mathbb{Z}_2^n$. Μπορούμε να ορίσουμε το ανάπτυγμα Fourier για συναρτήσεις $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{R}$, αντιστοιχίζοντας τα $0, 1 \in \mathbb{Z}_2$ στους $-1, 1 \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε την αντιστοιχία $\chi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τις $\chi(0_{\mathbb{Z}_2}) = 1$ και $\chi(1_{\mathbb{Z}_2}) = -1$. Η επιλογή αυτή, παρά το ότι είναι μη διαισθητική, έχει την ιδιότητα ότι για κάθε $b \in \mathbb{Z}_2$ έχουμε $\chi(b) = (-1)^b$. Επεκτείνουμε αυτόν τον συμβολισμό ως εξής:

Ορισμός 1.5. Για κάθε $S \subseteq [n]$ ορίζουμε $\chi_S : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$\chi_S(x) = \prod_{i\in S} \chi(x_i) = (-1)^{\sum_{i\in S} x_i}. \tag{1.14}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\chi_S(x+y) = \chi_S(x)\chi_S(y). \tag{1.15}$$

Με αυτόν τον τρόπο, για οποιαδήποτε $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{R}$, έχει πλέον νόημα να γράφουμε

$$f(x) = \sum_{S\subseteq[n]} \widehat{f}(S)\chi_S(x). \tag{1.16}$$

1.3 Η ορθογώνια βάση των συναρτήσεων βαρύτητας

Για κάθε $x \in \{-1,1\}^n$ ο αριθμός $\chi_S(x) = \prod_{i \in S} x_i$ ανήκει στο $\{-1,1\}$. Οπότε, η $\chi_S : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ είναι μια Boolean συνάρτηση και εξετάζει την λογική *βαρύτητα* των $(x_i)_{i\in S}$. Οι συναρτήσεις βαρύτητας παίζουν σπουδαίο ρόλο στην ανάλυση των Boolean συναρτήσεων. Το ανάπτυγμα Fourier $f = \sum_{S\subseteq[n]} \widehat{f}(S)\chi_S$ δείχνει ότι κάθε f μπορεί να αναπαρασταθεί ως γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων βαρύτητας (πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς).

Είναι χρήσιμο να διερευνήσουμε περαιτέρω αυτήν την ιδέα από την οπτική της γραμμικής άλγεβρας. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ σχηματίζει έναν διανυσματικό χώρο V, εφόσον μπορούμε να προσθέσουμε κατά σημείο δύο συναρτήσεις και να πολλαπλασιάσουμε βαθμωτά μια συνάρτηση με έναν πραγματικό αριθμό. Ισχύει ότι $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2^n$ και μπορούμε να σκεφτόμαστε τις συναρτήσεις στο V ως διανύσματα στον $\mathbb{R}^{2^n}$, θεωρώντας τις 2^n τιμές $f(x)$ ως τις συντεταγμένες ενός διανύσματοσ-στήλης (με κάποια συγκεκριμένη σειρά).

Γενικότερα, το ανάπτυγμα Fourier μας δείχνει ότι κάθε $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ στον V είναι ένας γραμμικός συνδυασός των συναρτήσεων βαρύτητας, δλαδή οι συναρτήσεις βαρύτητας παράγουν τον V. Εφόσον το πλήθος τους είναι $2^n = \dim(V)$, συνάγουμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες, δηλαδή, αποτελούν τελικά μια βάση για τον V. Και αυτό αποδεικνύει τη μοναδικότητα του αναπτύγματος Fourier.

Μπορούμε επίσης να εισάγουμε μια έννοια εσωτερικού γινομένου για δύο συναρτήσεις $f, g : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ στον V. Το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^{2^n}$ θα αντιστοιχούσε στο $\sum_{x\in\{-1,1\}^n} f(x)g(x)$, αλλά είναι βολικό να το πολλαπλασιάσουμε με τον παράγοντα 2^{-n}, θεωρώντας το έτσι ως μέσο όρο αντί για άθροισμα. Με αυτόν τον ορισμό, για κάθε Boolean συνάρτηση $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ θα έχουμε $\langle f, f\rangle = 1$, δηλαδή η f θα είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα (στον $\mathbb{R}^{2^n}$).

Ορισμός 1.6. Ορίζουμε το *εσωτερικό γινόμενο* δύο συναρτήσεων $f, g : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{x\in\{-1,1\}^n} f(x)g(x) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim\{-1,1\}^n}[f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})]. \tag{1.17}$$

Χρησιμοποιούμε επίσης τον συμβολισμό $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$, και γενικότερα,

$$\|f\|_p = \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim\{-1,1\}^n}\left[|f(\mathbf{x})|^p\right]^{1/p}. \tag{1.18}$$

Γράφοντας $\mathbf{x} \sim \{-1,1\}^n$ εννοούμε ότι το $\mathbf{x}$ επιλέγεται τυχαία και ομοιόμορφα από το $\{-1,1\}^n$. Ισοδύναμα, οι συντεταγμένες x_i επιλέγονται ανεξάρτητα με πιθανότητα $1/2$ να είναι 1 ή -1. Το ίδιο θα εννοούμε και όταν γράφουμε $\mathbb{E}_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})]$ ή $\mathbb{E}[f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})]$ ή $\mathbb{E}[fg]$.

Επιστρέφοντας στο ότι οι συναρτήσεις βαρύτητας είναι βάση του V, επισημαίνουμε το ότι η κρίσιμη παρατήρηση, στην οποία βασίζεται όλη η ανάλυση των Boolean συναρτήσεων, είναι ότι οι συναρτήσεις βαρύτητας είναι μια ορθοκανονική βάση.

Θεώρημα 1.7. *Οι 2^n συναρτήσεις βαρύτητας $\chi_S : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ σχηματίζουν μια ορθοκανονική βάση για τον διανυσματικό χώρο V των συναρτήσεων $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, δηλαδή*

$$\langle \chi_S, \chi_T\rangle = 1 \text{ αν } S = T, \quad \text{και } \langle \chi_S, \chi_T\rangle = 0 \text{ αν } S \neq T. \tag{1.19}$$

Απόδειξη. Ανακαλώντας τον ορισμό $\langle \chi_S, \chi_T\rangle = \mathbb{E}[\chi_S(\mathbf{x})\chi_T(\mathbf{x})]$ βλέπουμε ότι το θεώρημα έπεται άμεσα από τις εξής δύο παρατηρήσεις:

1. Για κάθε $x \in \{-1,1\}^n$ ισχύει ότι $\chi_S(x)\chi_T(x) = \chi_{S\triangle T}(x)$, όπου $S\triangle T$ είναι η συμμετρική διαφορά των S και T.

   Πράγματι,
$$\begin{aligned}\chi_S(x)\chi_T(x) &= \prod_{i\in S} x_i \prod_{i\in T} x_i = \prod_{i\in S\triangle T} x_i \prod_{i\in S\cap T} x_i^2 \\ &= \prod_{i\in S\triangle T} x_i = \chi_{S\triangle T}(x).\end{aligned}$$

2. $\mathbb{E}[\chi_S(\mathbf{x})] = \mathbb{E}\left[\prod_{i\in S}\mathbf{x}_i\right] = 1$ αν $S=\emptyset$ και $=0$ αν $S\neq\emptyset$.

   Πράγματι, αν $S=\emptyset$ τότε $\mathbb{E}[\chi_S(\mathbf{x})] = \mathbb{E}[\mathbf{x}^{\emptyset}] = \mathbb{E}[1] = 1$. Αλλιώς, από την ανεξαρτησία των $\mathbf{x}_i$ έχουμε $\mathbb{E}\left[\prod_{i\in S}\mathbf{x}_i\right] = \prod_{i\in S}\mathbb{E}[\mathbf{x}_i]$. Όμως, $\mathbf{x}\sim\{-1,1\}^n$, άρα $\mathbb{E}[\mathbf{x}_i] = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot(-1) = 0$ για κάθε i.

Επιστρέφοντας στο θεώρημα, έχουμε

$$\langle \chi_S, \chi_T\rangle = \mathbb{E}[\chi_{S\triangle T}(\mathbf{x})], \tag{1.20}$$

το οποίο είναι ίσο με 1 αν και μόνο αν $S\triangle T=\emptyset$, δηλαδή αν και μόνο αν $S=T$, ενώ είναι ίσο με 0 αν και μόνο αν $S\triangle T\neq\emptyset$, δηλαδή αν και μόνο αν $S\neq T$. □

1.4 Βασικοί τύποι ανάλυσης Fourier

Όπως είδαμε, το ανάπτυγμα Fourier της $f:\{-1,1\}\to\mathbb{R}$ μπορεί να θεωρηθεί ως η αναπαράσταση της f πάνω από την ορθογώνια βάση των συναρτήσεων βαρύτητας $(\chi_S)_{S\subseteq[n]}$. Ως προς αυτή τη βάση, η f έχει 2^n «συντεταγμένες», και αυτές είναι ακριβώς οι συντελεστές Fourier της f. Η «συντεταγμένη» της f στην χ_S «διεύθυνση» είναι ίση με $\langle f,\chi_S\rangle$, οπότε έχουμε την εξής σχέση:

Πρόταση 1.8. *Έστω $f:\{-1,1\}^n\to\mathbb{R}$. Για κάθε $S\subseteq[n]$, ο συντελεστής της f στο S δίνεται από την*

$$\widehat{f}(S) = \langle f,\chi_S\rangle = \mathbb{E}\left[f(x)\chi_S(x)\right]. \tag{1.21}$$

Απόδειξη. Έχουμε
$$\begin{aligned}\langle f,\chi_S\rangle &= \Big\langle \sum_{T\subseteq[n]}\widehat{f}(T)\chi_T, \chi_S\Big\rangle = \sum_{T\subseteq[n}\widehat{f}(T)\langle\chi_T,\chi_S\rangle \\ &= \widehat{f}(S),\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου και τις σχέσεις καθετότητας μεταξύ των χ_T. □

Ο τύπος αυτός μας δίνει τον απλούστερο τρόπο για να υπολογίσουμε τους συντελεστές Fourier δοθείσης συνάρτησης και μπορεί να θεωρηθεί μια απλούστερη εκδοχή της αρχικής μεθόδου υπολογισμού. Εναλλακτικά, ο τύπος αυτός μπορεί να θεωρηθεί ως ο ορισμός των συντελεστών Fourier.

Η ορθοκανονική βάση των συναρτήσεων βαρύτητας μας επιτρέπει να μετρήσουμε αποτελεσματικά το «τετραγωνικό μήκος» (την L_2-νόρμα) της $f:\{-1,1\}^n\to\mathbb{R}$. Είναι απλά το άθροισμα των τετραγώνων των «συντεταγμένων» της f, δηλαδή των συντελεστών Fourier της. Αυτό το απλό, αλλά σημαντικό, αποτέλεσμα ονομάζεται *Θεώρημα του Parseval*.

Θεώρημα 1.9 (Parseval). *Για κάθε $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι*

$$\langle f, f\rangle = \mathbb{E}\,[f(x)^2] = \sum_{S\subseteq[n]} \widehat{f}(S)^2. \tag{1.22}$$

Ειδικότερα, αν η f είναι Boolean συνάρτηση, τότε

$$\sum_{S\subseteq[n]} \widehat{f}(S)^2 = 1. \tag{1.23}$$

Γενικότερα, αν μας δώσουν δύο συναρτήσεις $f, g : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$, μπορούμε να υπολογίσουμε το $\langle f, g\rangle$ παίρνοντας το «κατά σημείο γινόμενο» των συντεταγμένων τους ως προς την ορθοκανονική βάση των συναρτήσεων βαρύτητας. Ο τύπος που προκύπτει ονομάζεται *Θεώρημα του Plancherel*.

Θεώρημα 1.10 (Plancherel). *Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f, g : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ έχουμε ότι*

$$\langle f, g\rangle = \mathbb{E}\,[f(x)g(x)] = \sum_{S\subseteq[n]} \widehat{f}(S)\widehat{g}(S). \tag{1.24}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \Big\langle \sum_{S\subseteq[n]} \widehat{f}(S)\chi_S, \sum_{T\subseteq[n]} \widehat{g}(T)\chi_T \Big\rangle = \sum_{S,T\subseteq[n]} \widehat{f}(S)\widehat{g}(T)\langle \chi_S, \chi_T\rangle \\ &= \sum_{S\subseteq[n]} \widehat{f}(S)\widehat{g}(S),\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου και τις σχέσεις καθετότητας μεταξύ των χ_T. □

Αξίζει τον κόπο να σημειώσουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g\rangle$ δύο Boolean συναρτήσεων $f, g : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ μπορεί να ερμηνευτεί ως ένας δείκτης συσχέτισης μεταξύ των f και g, που μετράει πόσο μοιάζουν οι f και g. Αφού $f(x)g(x) = 1$ αν $f(x) = g(x)$ και $f(x)g(x) = -1$ αν $f(x) \neq g(x)$, εχουμε:

Πρόταση 1.11. *Έστω $f, g : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$. Τότε,*

$$\langle f, g\rangle = \mathbb{P}(\{f = g\}) - \mathbb{P}(\{f \neq g\}) = 1 - 2\mathrm{dist}(f, g), \tag{1.25}$$

όπου

$$\mathrm{dist}(f, g) = \mathbb{P}(\{f \neq g\}) \tag{1.26}$$

είναι η σχετική Hamming απόσταση των f και g.

Με βάση τα προηγούμενα, μπορούμε τώρα να δούμε ενδιαφέρουσες συνδυαστικές ιδιότητες των Boolean συναρτήσεων, οι οποίες εκφράζονται μέσω των συντελεστών Fourier τους.

Ορισμός 1.12. Η *μέση τιμή* της $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ είναι η $\mathbb{E}\,[f]$. Λέμε ότι η f είναι *αμερόληπτη* ή *ισορροπημένη* αν $\mathbb{E}\,[f] = 0$.

Αν η f είναι Boolean συνάρτηση, τότε η μέση τιμή της είναι ίση με

$$\mathbb{E}\,[f] = \mathbb{P}(f = 1) - \mathbb{P}(f = -1), \tag{1.27}$$

οπότε η f είναι αμερόληπτη αν και μόνο αν παίρνει την τιμή 1 ακριβώς στα μισά σημεία του διακριτού κύβου.

Πρόταση 1.13. *Για κάθε $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι*

$$\mathbb{E}\,[f] = \widehat{f}(\emptyset). \tag{1.28}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\mathbb{E}\,[f \cdot 1] = \langle f, 1\rangle = \langle f, \chi_{\emptyset}\rangle = \widehat{f}(\emptyset). \tag{1.29}$$

□

Άρα, η f είναι αμερόληπτη αν και μόνο αν $\widehat{f}(\emptyset) = 0$. Αυτό ισχύει και για τις Boolean συναρτήσεις.

Πρόταση 1.14. *Η διακύμανση της $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ είναι ίση με*

$$\mathrm{Var}\,[f] = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} \widehat{f}(S)^2. \tag{1.30}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,[f] &= \langle f - \mathbb{E}\,[f], f - \mathbb{E}\,[f]\rangle = \mathbb{E}\,[f^2] - \mathbb{E}[f]^2 \\ &= \sum_{S \subseteq [n]} \widehat{f}(S)^2 - \widehat{f}(\emptyset)^2 = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} \widehat{f}(S)^2.\end{aligned}$$

□

Ειδικότερα, μια Boolean συνάρτηση f έχει διακύμανση 1 αν είναι αμερόληπτη και 0 αν είναι σταθερή. Γενικότερα, η διακύμανση μιας Boolean συνάρτησης είναι ανάλογη της απόστασής της «απ¨ το να γίνει σταθερή».

Πρόταση 1.15. *Έστω $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$. Τότε,*

$$2\varepsilon \leqslant \mathrm{Var}(f) \leqslant 4\varepsilon, \tag{1.31}$$

όπου

$$\varepsilon = \min\{\mathrm{dist}(f,1), \mathrm{dist}(f,-1)\} = \min\{\mathbb{P}(f=1), \mathbb{P}(f=-1)\} = \min\{\mathbb{P}(f=-1), \mathbb{P}(f=1)\}. \tag{1.32}$$

Απόδειξη. Αν η f είναι σταθερή, το ζητούμενο παίρνει τη μορφή $0 \leqslant 0 \leqslant 0$, και προφανώς ισχύει. Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή. Τότε, $\mathbb{P}(f = 1), \mathbb{P}(f = -1) \in (0, 1)$.

Αν $\mathbb{P}(f = 1) = \mathbb{P}(f = -1) = \frac{1}{2}$, τότε το ζητούμενο παίρνει τη μορφή $1 \leqslant 1 \leqslant 2$, και προφανώς ισχύει. Χωρίς ωλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε λοιπόν ότι

$$0 < \mathbb{P}(f = 1) < \frac{1}{2} < \mathbb{P}(f = -1) < 1. \tag{1.33}$$

Έχουμε $\frac{1}{2}\mathbb{P}(f = 1) < \mathbb{P}(f = -1)\,\mathbb{P}(f = 1)$, άρα

$$2\min\{\mathbb{P}(f = 1), \mathbb{P}(f = -1)\} < 4\mathbb{P}(f = -1)\,\mathbb{P}(f = 1), \tag{1.34}$$

δηλαδή

$$2\varepsilon < \mathrm{Var}[f]. \tag{1.35}$$

Με τον ιδιο τρόπο βλέπουμε ότι $\mathbb{P}(f = -1) < 1$, άρα

$$\mathbb{P}(f = -1)\,\mathbb{P}(f = 1) < \mathbb{P}(f = 1). \tag{1.36}$$

Δηλαδή,

$$\mathrm{Var}[f] = 4\mathbb{P}(f = -1)\,\mathbb{P}(f = 1) < 4\min\{\mathbb{P}(f = 1), \mathbb{P}(f = -1)\} = 4\varepsilon. \tag{1.37}$$

□

Πρόταση 1.16. *Η συνδιακύμανση των* $f, g : \{-1, 1\}^n \to \mathbb{R}$ *είναι:*

$$\mathrm{Cov}[f, g] := \langle f - \mathbb{E}[f], g - \mathbb{E}[g] \rangle = \sum_{S \neq \emptyset} \widehat{f}(S)\widehat{g}(S). \tag{1.38}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}[f, g] &= \langle f - \mathbb{E}[f], g - \mathbb{E}[g] \rangle = \mathbb{E}[fg] - \mathbb{E}[f] \cdot \mathbb{E}[g] \\
&= \sum_{S \subseteq [n]} \widehat{f}(S)\widehat{g}(S) - \widehat{f}(\emptyset)\widehat{g}(\emptyset) \\
&= \sum_{S \neq \emptyset} \widehat{f}(S)\widehat{g}(S),
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Plancherel και τις $\mathbb{E}[f] = \widehat{f}(\emptyset)$, $\mathbb{E}[g] = \widehat{g}(\emptyset)$. □

Ορισμός 1.17. Το *βάρος* της $f : \{-1, 1\}^n \to \mathbb{R}$ στο σύνολο $S \subseteq [n]$ ορίζεται να είναι το $\widehat{f}(S)^2$.

Παρότι χάνουμε κάποια πληροφορία για τους συντελεστές Fourier, όταν τους τετραγωνίζουμε, πολλοί από τους τύπους που χρησιμοποιούμε εξαρτώνται μόνο από τα βάρη της f. Για παράδειγμα, είδαμε σε προηγούμενη πρόταση ότι η διακύμανση μιας συνάρτησης ισούται με το συνολικό βάρος της στα μη κενά υποσύνολα. Το να μελετάς μάλιστα τα βάρη στην περίπτωση των Boolean συναρτήσεων είναι ιδιαίτερα ευχάριστο, μιας και το θεώρημα του Parseval μας λέει ότι το συνολικό τους βάρος είναι πάντα ίσο με 1. Ειδικότερα, καθορίζουν μια κατανομή πιθανότητας στα υποσύνολα του $[n]$.

Ορισμός 1.18. Δοθείσης $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, το *φασματικό δείγμα* της f συμβολίζεται με $\mathcal{S}_f$ και είναι η κατανομή πιθανότητας στα υποσύνολα του $[n]$ για την οποία κάθε $S \subseteq [n]$ έχει πιθανότητα $\widehat{f}(S)^2$. Γράφουμε $S \sim \mathcal{S}_f$ για μια τυχαία μεταβλητή που έχει αυτήν την κατανομή.

Για παράδειγμα, το φασματικό δείγμα για την $\max_2$ συνάρτηση είναι η ομοιόμορφη κατανομή στα τέσσερα υποσύνολα του $[2] = \{1,2\}$, ενώ το φασματικό δείγμα της Maj_3 είναι η ομοιόμορφη κατανομή στα τέσσερα υποσύνολα του $[3]$ που έχουν περιττό πλήθος στοιχείων.

Ορισμός 1.19. Έστω $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ και έστω $0 \leqslant k \leqslant n$. Το *βάρος βαθμού* k της f ορίζεται ως εξής:

$$W^k[f] = \sum_{|S|=k} \widehat{f}(S)^2. \tag{1.39}$$

Αν η f είναι Boolean συνάρτηση, δηλαδή $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, τότε ένας ισοδύναμος ορισμός είναι ο εξής:

$$W^k[f] = \mathbb{P}_{S\sim\mathcal{S}_f}[|S| = k]. \tag{1.40}$$

Από το θεώρημα του Parseval έχουμε

$$W^k[f] = \|f^{=k}\|_2^2, \quad \text{όπου } f^{=k} = \sum_{|S|=k} \widehat{f}(S)\chi_S. \tag{1.41}$$

Η συνάρτηση $f^{=k}$ είναι το *τμήμα βαθμού* k *της* f. Μερικές φορές χρησιμοποιούμε και συμβολισμούς όπως

$$W^{>k}[f] = \sum_{|S|>k} \widehat{f}(S)^2 \;\text{ ή }\; f^{\leqslant k} = \sum_{|S|\leqslant k} \widehat{f}(S)\chi_S. \tag{1.42}$$

1.5 Πυκνότητες πιθανότητας και συνέλιξη

Σε αυτήν την ενότητα γράφουμε τον κύβο του Hamming στη μορφή $\mathbb{Z}_2^n$ (αντί για $\{-1,1\}^n$) για ποικιλία.

Ορισμός 1.20. Μια *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* στο $\mathbb{Z}_2^n$ είναι μια μη αρνητική συνάρτηση $\varphi\mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ που ικανοποιεί την

$$\mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim\mathbb{Z}_2^n}[\phi] = 1. \tag{1.43}$$

Γράφουμε $\mathbf{y} \sim \varphi$ για να δηλώσουμε ότι το $\mathbf{y}$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα, που έχει κατανομή πιθανότητας αυτήν που ορίζεται από την φ: δηλαδή,

$$\mathbb{P}_{\mathbf{y}\sim\varphi}[\mathbf{y} = y] = \varphi(y)\frac{1}{2^n} \quad \text{για κάθε } y \in \mathbb{Z}_2^n. \tag{1.44}$$

Μπορούμε να σκεφτόμαστε την $\varphi(y)$ ως την *σχετική πυκνότητα* του y ως προς την ομοιόμορφη κατανομή στο $\mathbb{Z}_2^n$. Για παράδειγμα έχουμε:

Παρατήρηση 1.21. Αν φ είναι μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και $g : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$, τότε

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}\sim\varphi}]g(\mathbf{y})] = \langle \varphi, g\rangle = \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim\mathbb{Z}_2^n}[\varphi(\mathbf{x})g(\mathbf{x})]. \tag{1.45}$$

Ορισμός 1.22. Έστω $A \subseteq \mathbb{Z}_2^n$. Γράφουμε $\mathbf{1}_A : \mathbb{Z}_2^n \to \{0,1\}$ για την δείκτρια συνάρτηση του A (δηλαδή, $\mathbf{1}_A(x) = 1$ αν $x \in A$ και $\mathbf{1}_A(x) = 0$ αν $x \notin A$). Υποθέτοντας ότι $A \neq \emptyset$, γράφουμε φ_A για την συνάρτηση πυκνότητας που σχετίζεται με την ομοιόμορφη κατανομή στο A:

$$\varphi_A = \frac{1}{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A]}\,\mathbf{1}_A. \tag{1.46}$$

Γράφουμε επίσης $\mathbf{y} \sim A$ αντί για $\mathbf{y} \sim \varphi_A$.

Ορίζουμε τώρα μια πράξη μεταξύ συναρτήσεων, που αλληλεπιδρά ωραία με τις συναρτήσεις πυκνότητας, και ονομάζεται *συνέλιξη*.

Ορισμός 1.23. Έστω $f, g : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{R}$. Η *συνέλιξη* των f και g είναι η συνάρτηση $f * g : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$(f * g)(x) = \mathbb{E}_{\mathbf{y}\sim\mathbb{Z}_2^n}[f(y)g(x-y)] = \mathbb{E}_{\mathbf{y}\sim\mathbb{Z}_2^n}[f(x-y)g(y)]. \tag{1.47}$$

Δεδομένου ότι η αφαίρεση συμπίπτει με την πρόσθεση στο $\mathbb{Z}_2^n$, έχουμε τελικά

$$(f * g)(x) = \mathbb{E}_{\mathbf{y}\sim\mathbb{Z}_2^n}[f(y)g(x+y)] = \mathbb{E}_{\mathbf{y}\sim\mathbb{Z}_2^n}[f(x+y)g(y)]. \tag{1.48}$$

Αν δουλεύαμε στο $\{-1,1\}^n$, αντί του $\mathbb{Z}_2^n$, θα αντικαθιστούσαμε το $x+y$ με το $x \circ y$ στην προηγούμενη σχέση, όπου το «$\circ$» δηλώνει τον πολλαπλασιασμό κατά συντεταγμένη.

Χρησιμοποιώντας την τελευταία παρατήρηση, συνάγουμε τα εξής δύο απλά αποτελέσματα:

Πρόταση 1.24. *Αν φ είναι μια συνάρτηση πυκνότητας στο $\mathbb{Z}_2^n$ και $g : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{R}$, τότε*

$$(\varphi * g)(x) = \mathbb{E}_{\mathbf{y}\sim\varphi}[g(x-y)] = \mathbb{E}_{\mathbf{y}\sim\varphi}[g(x+y)]. \tag{1.49}$$

Ειδικότερα,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}\sim\varphi}[g(\mathbf{y})] = (\varphi * g)(0). \tag{1.50}$$

Πρόταση 1.25. *Αν φ, ψ είναι δύο συναρτήσεις πυκνότητας, τότε το ίδιο ισχύει και για την $\varphi * \psi$. Αντιπροσωπεύει την κατανομή των $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n$ που παίρνουμε αν επιλέξουμε ανεξάρτητα $\mathbf{y} \sim \varphi$ και $\mathbf{z} \sim \psi$, και θέσουμε $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$.*

Το πιο σημαντικό θεώρημα για την συνέλιξη είναι αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό των συντελεστών Fourier.

Θεώρημα 1.26. *Έστω $f, g : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{R}$. Για κάθε $S \subseteq [n]$ ισχύει ότι*

$$\widehat{f * g}(S) = \widehat{f}(S)\widehat{g}(S). \tag{1.51}$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(S) &= \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim\mathbb{Z}_2^n}[(f * g)(\mathbf{x})\chi_S(\mathbf{x})] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim\mathbb{Z}_2^n}\left[\mathbb{E}_{\mathbf{y}\sim\mathbb{Z}_2^n}[f(\mathbf{y})g(\mathbf{x}-\mathbf{y})]\chi_S(\mathbf{x})\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbf{y},\mathbf{z}\sim\mathbb{Z}_2^n}[f(\mathbf{y})g(\mathbf{z})\chi_S(\mathbf{y}+\mathbf{z})] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbf{y},\mathbf{z}\sim\mathbb{Z}_2^n}[f(\mathbf{y})\chi_S(\mathbf{y})g(\mathbf{z})\chi_S(\mathbf{z})] \\
&= \widehat{f}(S)\widehat{g}(S),
\end{aligned}$$

από ανεξαρτησία. □

1.6 Σχεδόν γραμμικές συναρτήσεις και το κριτήριο Blum-Luby-Rubinfeld (BLR)

Ορισμός 1.27. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ λέγεται *γραμμική* αν ικανοποιείται οποιαδήποτε από τις παρακάτω δύο συνθήκεσ:

(α) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{Z}_2^n$.

(β) $f(x) = \langle a, x \rangle$ για κάποιο $a \in \mathbb{Z}_2^n$. Δηλαδή, $f(x) = \sum_{i \in S} x_i$ για κάποιο $S \subseteq [n]$.

Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι οι δύο αυτές συνθήκες είναι ισοδύναμες.

Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, αν ήθελε κανείς να ορίσει τι σημαίνει το ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ είναι *σχεδόν γραμμική*, υπάρχουν δύο δυνατότητεσ:

(α′) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για *σχεδόν όλα* τα ζευγάρια $x, y \in \mathbb{Z}_2^n$.

(β′) Υπάρχει κάποιο $S \subseteq [n]$ τέτοιο ώστε $f(x) = \sum_{i \in S} x_i$ για *σχεδόν όλα* τα $x \in \mathbb{Z}_2^n$.

Μπορεί κανείς να δείξει σχετικά εύκολα ότι η (α′) είναι συνέπεια της (β′). Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε ότι και η (β′) είναι συνέπεια της (α′). Για να κάνουμε πιο συγκεκριμένο το πρόβλημα δίνουμε πρώτα κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 1.28. Αν f και g είναι δύο Boolean συναρτήσεις, λέμε ότι οι f και g είναι *ε-κοντά* αν $\mathrm{dist}(f, g) \leqslant \varepsilon$. Αλλιώς, λέμε ότι είναι *ε-μακρυά*. Αν $\mathcal{P}$ είναι μια ιδιότητα των Boolean συναρτήσεων, θέτουμε

$$\mathrm{dist}(f, \mathcal{P}) = \min \mathrm{dist}(f, g), \tag{1.52}$$

όπου το minimum παίρνεται πάνω από όλες τις g που έχουν την ιδιότητα $\mathcal{P}$. Λέμε ότι η f είναι *ε-κοντά στην $\mathcal{P}$* αν $\mathrm{dist}(f, \mathcal{P}) \leqslant \varepsilon$.

Με βάση αυτόν τον ορισμό θα λέμε ότι η f βρίσκεται *ε-κοντά στο να είναι γραμμική* αν $\mathrm{dist}(f, g) \leqslant \varepsilon$ για κάποια πραγματικά γραμμική συνάρτηση $g(x) = \sum_{i \in S} x_i$. Το 1990, οι Blum, Luby και Rubinfeld έδειξαν ότι η (β′) είναι συνέπεια της (α′) δίνοντας ένα κριτήριο για την ιδιότητα της γραμμικότητας, το οποίο βασίζεται σε τρείς μόνο ερωτήσεις:

Κτιτήριο (BLR). *Για δοθείσα συνάρτηση $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$:*

- *Επιλέγουμε $\mathbf{x} \sim \mathbb{Z}_2^n$ και $\mathbf{y} \sim \mathbb{Z}_2^n$ ανεξάρτητα.*
- *Ζητάμε τις τιμές της f στα $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ και $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.*
- *Δηλώνουμε «αποδοχή» αν $f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{y})$.*

Θα δείξουμε ότι αν το κριτήριο (BLR) αποδέχεται την f με μεγάλη πιθανότητα τότε η f βρίσκεται κοντά στο να είναι γραμμική. Η απόδειξη συνδέει απευθείας την πιθανότητα αποδοχής με την ποσότητα $\sum_S \widehat{f}(S)^3$.

Θεώρημα 1.29. *Υποθέτουμε ότι το κριτήριο (BLR) αποδέχεται την $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ με πιθανότητα $1 - \varepsilon$. Τότε η f βρίσκεται ε-κοντά στο να είναι γραμμική.*

Απόδειξη. Για να χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό τλΦουριερ κωδικοποιούμε την έξοδο (τις τιμές) της f με $\pm 1 \in \mathbb{R}$. Έτσι, η συνθήκη αποδοχής στο κριτήριο (BLR) γίνεται $f(\mathbf{x})f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{y})$. Παρατηρώντας ότι

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} f(\mathbf{x})f(\mathbf{y})f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = 1 \;\text{ αν }\; f(\mathbf{x})f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \tag{1.53}$$

και

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} f(\mathbf{x})f(\mathbf{y})f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = 0 \;\text{ αν }\; f(\mathbf{x})f(\mathbf{y}) \neq f(\mathbf{x}+\mathbf{y}), \tag{1.54}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}
1 - \varepsilon &= \mathbb{P}\left[\text{το BLR αποδέχεται την } f\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} f(\mathbf{x})f(\mathbf{y})f(\mathbf{x}+\mathbf{y})\right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mathbf{x}}\left[f(\mathbf{x}) \cdot \mathbb{E}_{\mathbf{y}}[f(\mathbf{y})f(\mathbf{x}+\mathbf{y})]\right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x}) \cdot (f * f)(\mathbf{x})] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{S \subseteq [n]} \widehat{f}(S)\widehat{f * f}(S) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{S \subseteq [n]} \widehat{f}(S)^3,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της συνέλιξης, την ταυτότητα του Plancherel και την $\widehat{f * f}(S) = \widehat{f}(S)^2$. Άρα,

$$\begin{aligned}
1 - 2\varepsilon &= \sum_{S \subseteq [n]} \widehat{f}(S)^3 \leqslant \max_{S \subseteq [n]}[\widehat{f}(S)] \cdot \sum_{S \subseteq [n]} \widehat{f}(S)^2 \\
&= \max_{S \subseteq [n]}[\widehat{f}(S)],
\end{aligned}$$

αφού $\sum_{S \subseteq [n]} \widehat{f}(S)^2 = \|f\|_2^2 = 1$. Όμως γνωρίζουμε ότι $\widehat{f}(S) = \langle f, \chi_S \rangle = 1 - \mathrm{dist}(f, \chi_S)$. Επομένως, υπάρχει κάποιο $S^* \subseteq [n]$ για τοοποίο

$$1 - 2\varepsilon \leqslant 1 - 2\mathrm{dist}(f, \chi_{S^*}), \tag{1.55}$$

δηλαδή η f βρίσκεται ε-κοντά στο να είναι η γραμμική συνάρτηση χ_{S^*}. □

Στην πραγματικότητα, για μικρά ε μπορεί κανείς να δείξει ότι η f βρίσκεται $(\varepsilon/3)$-κοντά στο να είναι γραμμική συνάρτηση, και αυτό το αποτέλεσμα είναι ακριβές.

Το κριτήριο (BLR) δείχνει ότι μπορούμε να αποφανθούμε αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{Z}_2^n \to \{-1, 1\}$ βρίσκεται κοντά σε κάποια γραμμική συνάρτηση κάνοντας τρείς μόνο ερωτήσεις. Το κριτήριο δεν αποκαλύπτει σε *ποιά* γραμμική συνάρτηση χ_S βρίσκεται κοντά η f (μπορεί μάλιστα να δείξει κανείς ότι αυτό απαιτεί n ερωτήσεις). Ωστόσο, μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή της $\chi_S(x)$ με μεγάλη πιθανότητα *για κάθε* $x \in \mathbb{Z}_2^n$ της επιλογής μας, κάνοντας δύο ερωτήσεις. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται *τοπική διορθωσιμότητα* των γραμμικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.30. *Υποθέτουμε ότι η $f : \mathbb{Z}_2^n \to \{-1, 1\}$ βρίσκεται ε-κοντά στη γραμμική συνάρτηση χ_S. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{Z}_2^n$, ο ακόλουθος αλγόριθμος υπολογίζει την τιμή $\chi_S(x)$ με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - 2\varepsilon$:*

- *Επιλέγουμε $\mathbf{y} \sim \mathbb{Z}_2^n$.*
- *Ζητάμε τις τιμές της f στα $\mathbf{y}$ και $x + \mathbf{y}$.*
- *Έξοδοσ: $f(\mathbf{y}) \cdot f(x + \mathbf{y})$.*

Τονίζουμε την διάταξη των ποσοδεικτών σε αυτό το αποτέλεσμα: αν θεωρήσουμε την τιμή $f(x)$ τότε αυτή θα ισούται με την $\chi_S(x)$ για *τα περισσοτερα* x. Όμως, ο παραπάνω αλγόριθμος «τοπικής διόρθωσης» προσδιορίζει την τιμή $\chi_S(x)$ (με μεγάλη πιθανότητα) *για κάθε* x.

Απόδειξη. Αφού τα $\mathbf{y}$ και $x + \mathbf{y}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στο $\mathbb{Z}_2^n$ (αν και δεν είναι ανεξάρτητα) έχουμε

$$\mathbb{P}[f(\mathbf{y}) \neq \chi_S(\mathbf{y})] \leqslant \varepsilon \;\text{ και }\; \mathbb{P}[f(x + \mathbf{y}) \neq \chi_S(x + \mathbf{y})] \leqslant \varepsilon, \tag{1.56}$$

από την υπόθεση ότι η f βρίσκεται ε-κοντά στην χ_S. Η πιθανότητα να συμβαίνει τουλάχιστον ένα απότα δύο ενδεχόμενα είναι $\leqslant 2\varepsilon$, και όταν κανένα από τα δύο δεν συμβαίνει, έχουμε

$$f(\mathbf{y})f(x + \mathbf{y}) = \chi_S(\mathbf{y})\chi_S(x + \mathbf{y}) = \chi_S(x), \tag{1.57}$$

όπως θέλαμε. □

2 Κοινωνική επιλογή

Σ¨ αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε σημαντικές έννοιες, μεταξύ αυτών την *επιρροή* και την *ευστάθεια του θορύβου*. Το κίνητρο για πολλές από αυτές τις βασικές έννοιες γίνεται ευκολότερα αντιληπτό μέσα από τη γλώσσα της *θεωρίας κοινωνικής επιλογής*.

2.1 Συναρτήσεις κοινωνικής επιλογής

Σε αυτήν την ενότητα περιγράφουμε μερικά βασικά στοιχεία των μαθηματικών της κοινωνικής επιλογής, ένα θέμα με το οποίο έχουν ασχοληθεί οικονομολόγοι, πολιτικοί επιστήμονες, μαθηματικοί και πληροφορικάριοι. Το θεμελιώδες ερώτημα εδώ είναι πόσο καλό είναι να αθροίζεις τις απόψεις πολλών.

Παραδείγματα όπου το πρόβλημα αναδεικνύεται περιλαμβάνουν την ψηφοφορία των πολιτών σε μια εκλογή, επιτροπές που λαμβάνουν αποφάσεις σχετικά με εναλλακτικές λύσεις, ανεξάρτητους υπολογιστικούς παράγοντες που παίρνουν συλλογικές αποφάσεις. Η *θεωρία της κοινωνικής επιλογής*, επίσης, παρέχει ελκυστικές ερμηνείες για κάποιες σημαντικές συναρτήσεις και έννοιες από την Ανάλυση των Boolean συναρτήσεων.

Μια Boolean συνάρτηση $f : \{-1, 1\}^n \to \{-1, 1\}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένας «κανόνας εκλογής» ή μια συνάρτηση κοινωνικής επιλογής για μια εκλογή με δύο υποψήφιους και n ψηφοφόρους: απεικονίζει τις ψήφους των ψηφοφόρων στο νικητή της εκλογής. Ο πιο συνηθισμένος, ίσως, κανόνας εκλογής είναι η *συνάρτηση πλειοψηφίας* (majority):

Ορισμός 2.1. Για n περιττό, η συνάρτηση πλειοψηφίας $\mathrm{Maj}_n : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{Maj}_n(x) = \mathrm{sgn}\,(x_1 + \cdots + x_n). \tag{2.1}$$

Περιστασιακά, για n άρτιο λέμε ότι η f είναι μια συνάρτηση πλειοψηφίας εάν $f(x) = \mathrm{sgn}\,(x_1+\cdots+x_n)$ όποτε ο αριθμός αυτός είναι μη μηδενικός, δηλαδή αν $x_1 + \cdots + x_n \neq 0$.

Οι Boolean συναρτήσεις «AND» και «OR» αντιστοιχούν σε εκλογικούς νόμους στους οποίους κάποιος υποψήφιος εκλέγεται πάντα εκτός αν όλοι οι ψηφοφόροι είναι παμψηφεί αντίθετοι. Έχοντας κατά νού την σύμβαση ότι το $+1$ αντιπροσωπεύει το «αληθές» και το -1 το ψευδές, τις ορίζουμε ως εξής:

Ορισμός 2.2. Η συνάρτηση AND_n"$\{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ παίρνει παντού την τιμή $\mathrm{AND}_n(x) = 1$ εκτός αν $x = (-1,\ldots,-1)$ οπότε παίρνει την τιμή -1. Η συνάρτηση OR_n"$\{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ παίρνει παντού την τιμή $\mathrm{OR}_n(x) = -1$ εκτός αν $x = (1,\ldots,1)$ οπότε παίρνει την τιμή $+1$.

Ένας άλλος κανόνας εκλογής, ο οποίος εμφανίζεται συχνά στην πράξη, είναι ο εξής:

Ορισμός 2.3. Η i-οστή *δικτατορική συνάρτηση* $\chi_i : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ ορίζεται από την $\chi_i(x) = x_i$.

Εδώ, απλουστεύουμε τον συμβολισμό για το μονώνυμο $\chi_{\{i\}}$ σε χ_i. Αν και είναι πολύ απλές συναρτήσεις, οι δικτατορικές συναρτήσεις παίζουν έναν πολύ βασικό ρόλο στην Ανάλυση των Boolean συναρτήσεων. Συχνά τις αποκαλούμε και *προβολές*. Γενικεύοντας τις προβολές, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.4. Έστω $1 \leqslant k \leqslant n$. Μια συνάρτηση $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ λέγεται *k-χούντα* αν η τιμή $f(x)$ εξαρτάται από k το πολύ συντεταγμένες του x, δηλαδή αν $f(x) = g(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})$ για κάποια $g : \{-1,1\}^k \to \{-1,1\}$ και κάποιους δείκτες $i_1,\ldots,i_k \in [n]$. Ανεπίσημα, λέμε ότι η f είναι «χούντα» αν εξαρτάται μόνο από «σταθερό» πλήθος συντεταγμένων.

Για παράδειγμα, το πλήθος των συναρτήσεων $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ οι οποίες είναι 1-χούντες είναι ακριβώς ίσο με $2n+2$: αποτελείται από τις n δικτατορικές συναρτήσεις, τις αντίθετές τους, και τις δύο σταθερές συναρτήσεις ± 1.

Το Συμβούλιο Υπουργών της Ευρωπαϊκής Ένωσης λαμβάνει αποφάσεις εφαρμόζοντας τον κανόνα εκλογής της σταθμισμένης πλειοψηφίας:

Ορισμός 2.5. Μια συνάρτηση $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ λέγεται *συνάρτηση σταθμισμένης πλειοψηφίας* ή *γραμμική κατωφλική συνάρτηση* αν ορίζεται από την $f(x) = \mathrm{sgn}(a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n)$ για κάποιους $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Παραδείγματα συναρτήσεων σταθμισμένης πλειοψηφίας μας δίνουν η συνάρτηση Maj_n, οι συναρτήσεις «AND» και «OR», οι δικτατορικές συναρτήσεις και οι σταθερές συναρτήσεις.

Ο Πρόεδρος των Ηνωμένων Πολιτειών (και πολλών άλλων χωρών) εκλέγεται με ένα είδος «πλειοψηφίας δύο επιπέδων» το οποίο τυποποιείται από τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.6. Η συνάρτηση *αναδρομικής πλειοψηφίας βάθους d για n^d ψηφοφόρους* είναι η Boolean συνάρτηση $\mathrm{Maj}_n^{\otimes d}$ η οποία ορίζεται επαγωγικά ως εξής: $\mathrm{Maj}_n^{\otimes 1} = \mathrm{Maj}_n$, και

$$\mathrm{Maj}_n^{\otimes(d+1)}(x^{(1)},\ldots,x^{(n)}) = \mathrm{Maj}_n(\mathrm{Maj}_n^{\otimes d}(x^{(1)}),\ldots,\mathrm{Maj}_n^{\otimes d}(x^{(n)})) \tag{2.2}$$

όπου $x^{(i)} \in \{-1,1\}^{n^d}$.

Στον ορισμό που ακολουθεί συγκεντρώνουμε κάποιες φυσιολογικές ιδιότητες που θα ήθελε κάποιος να έχει μια συνάρτηση κοινωνικής επιλογής με δύο υποψηφίουσ:

Ορισμός 2.7. Λέμε ότι μια συνάρτηση $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ είναι:

- *μονότονη* αν $f(x) \leqslant f(y)$ οταν $x \leqslant y$ κατά συντεταγμένη.
- *περιττή* αν $f(-x) = -f(x)$.
- *ομόφωνη* αν $f(1,1,\ldots,1) = 1$ και $f(-1,-1,\ldots,-1) = -1$.
- *συμμετρική* αν $f(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(n)}) = f(x_1,\ldots,x_n)$ για όλες τις μεταθέσεις $\pi \in S_n$ (ισοδύναμα, αν η τιμή $f(x)$ εξαρτάται μόνο από το πλήθος των συντεταγμένων του x που είναι ίσες με 1).

Οι ορισμοί της μονότονης, της περιττής και της συμμετρικής συνάρτησης έχουν έννοια και για συναρτήσεις $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$.

Παρατήρηση 2.8. Η συνάρτηση πλειοψηφίας Maj_n (για n περιττό) έχει όλες τις ιδιότητες του Ορισμού 2.7. Πράγματι, το θεώρημα του May εξασφαλίζει ότι αυτή είναι η μόνη μονότονη, περιττή και συμμετρική Boolean συνάρτηση. Οι δικτατορικές συναρτήσεις έχουν τις τρείς πρώτες από τις παραπάνω ιδιότητες, όπως και οι αναδρομικές συναρτήσεις πλειοψηφίας. Οι συναρτήσεις AND και OR είναι μονότονες, ομόφωνες και συμμετρικές, αλλά όχι περιττές. Μια άλλη σημαντική ιδιότητα, ασθενέστερη από την συμμετρική ιδιότητα είναι η εξής:

Ορισμός 2.9. Η $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ λέγεται *μεταβατική-συμμετρική* αν για κάθε $i, i' \in [n]$ υπάρχει μετάθεση $\pi \in S_n$ που απεικονίζει το i στο i', τέτοια ώστε $f(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(n)}) = f(x_1,\ldots,x_n)$ για κάθε $x \in \{-1,1\}^n$.

Διαισθητικά, μια συνάρτηση είναι μεταβατική-συμμετρική εάν κάθε δύο συντεταγμένες $i, j \in [n]$ είναι «ισοδύναμες».

Μία ακόμα φυσιολογική επιθυμητή ιδιότητα για έναν κανόνα εκλογής με δύο υποψηφίους είναι να είναι αμερόληπτος, δηλαδή οι τιμές ± 1 να είναι ισοπίθανες. Βέβαια, αυτό προϋποθέτει την ομοιόμορφη κατανομή πιθανότητας στις ψήφους.

Ορισμός 2.10. Η *υπόθεση της αμεροληψίας* είναι ότι οι προτιμήσεις n ψηφοφόρων είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα τυχαίες.

Αν και αυτή η υπόθεση μοιάζει κάπως μη ρεαλιστική, δίνει μια καλή βάση σύγκρισης διαφόρων κανόνων εκλογής, απουσία άλλων πληροφοριών. Κάποιος μπορεί επίσης να το θεωρήσει σαν ένα μοντέλο για τις ψήφους των «αναποφάσιστων» ή για τους ψηφοφόρους του «κόμματος των ανεξάρτητων».

2.2 Επιρροές και Παράγωγοι

Για δοθέντα κανόνα εκλογής $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ είναι φυσικό να προσπαθήσουμε να μετρήσουμε την «επιρροή» ή την «δύναμη» του i-οστού ψηφοφόρου. Μπορεί κανείς να την ορίσει ως «την πιθανότητα η i-οστή ψήφος να επηρεάζει το αποτέλεσμα».

Ορισμός 2.11. Λέμε ότι η συντεταγμένη $i \in [n]$ είναι *ζωτική* για την $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ στο x, αν $f(x) \neq f(x^{\oplus i})$. Εδώ, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $x^{\oplus i}$ για το διάνυσμα $(x_1,\ldots,x_{i-1},-x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$.

Ορισμός 2.12. Η *επιρροή* της συντεταγμένης i στην $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ ορίζεται ως η πιθανότητα το i να είναι ζωτικό για το τυχαίο $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{Inf}_i[f] = \mathbb{P}_{\mathbf{x}\in\{-1,1\}^n}[f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x}^{\oplus i})]. \tag{2.3}$$

Ισοδύναμα, οι επιρροές μπορούν να οριστούν μέσω της «γεωμετρίας» του κύβου του Hamming.

Παρατήρηση 2.13. Για μια συνάρτηση $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, η επιρροή $\mathbf{Inf}_j[f]$ ισούται με το ποσοστό των *i-ακμών* του κύβου του Hamming που είναι *συνοριακές* ακμές. Εδώ, με τον όρο i-ακμή εννοούμε μια ακμή (x,y) για την οποία $y = x^{\oplus i}$, και με τον όρο συνοριακή ακμή εννοούμε μια ακμή (x,y) για την οποία $f(x) \neq f(y)$.

Παράδειγμα 2.14. Για την i-οστή δικτατορική συνάρτηση χ_i έχουμε ότι η i-οστή συντεταγμένη είναι ζωτική για κάθε x. Ως εκ τούτου, $\mathbf{Inf}_i[\chi_i] = 1$. Από την άλλη πλευρά, αν $j \neq i$ τότε η j-οστή συντεταγμένη δεν είναι ποτέ ζωτική. Ως εκ τούτου, $\mathbf{Inf}_j[\chi_i] = 0$ για $j \neq i$. Σημειώνουμε ότι αυτές οι δύο προτάσεις ισχύουν και για τις αρνητικές-δικτατορικές συναρτήσεις $f(x) = -x_i$. Για τις σταθερές συναρτήσεις ± 1, όλες οι επιρροές είναι ίσες με 0. Για τη συνάρτηση OR_n, η συντεταγμένη 1 είναι ζωτική για ακριβώς δύο τιμές του x: $(-1,1,1,\ldots,1)$ και $(1,1,1,\ldots,1)$. Άρα, $\mathbf{Inf}_1[\mathrm{OR}_n] = 2^{1-n}$. Όμοια, $\mathbf{Inf}_i[\mathrm{OR}_n] = \mathbf{Inf}_i[\mathrm{AND}_n] = 2^{1-n}$ για κάθε $i \in [n]$. Για την Maj_3 μπορούμε να δούμε ότι $\mathbf{Inf}_i[\mathrm{Maj}_3] = 1/2$ για κάθε $i \in [3]$. Για την συνάρτηση πλειοψηφίας σε μεγαλύτερες διαστάσεις, η $\mathbf{Inf}_i[\mathrm{Maj}_n]$ ισούται με την πιθανότητα ακριβώς τα μισά από $n-1$ τυχαία bits να είναι ίσα με 1. Αυτή η πιθανότητα είναι περίπου ίση με $\frac{\sqrt{2/\pi}}{\sqrt{n}}$ για μεγάλα n.

Μπορούμε να ορίσουμε τις επιρροές με έναν πιο αναλυτικό τρόπο, εισάγοντας τους τελεστές παραγώγισησ:

Ορισμός 2.15. Η *i-οστή διακριτή παράγωγος* είναι ο τελεστής D_i που απεικονίζει την συνάρτηση $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ στη συνάρτηση $D_i f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ που ορίζεται ως εξής:

$$D_i f(x) = \frac{f(x^{(i\to 1)}) - f(x^{(i\to -1)})}{2}. \tag{2.4}$$

Εδώ, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $x^{(i\to b)} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Παρατηρήστε ότι η $D_i f(x)$ δεν εξαρτάται από την τιμή της x_i. Ο τελεστής D_i είναι γραμμικός, δηλαδή

$$D_i(f+g) = D_i f + D_i g. \tag{2.5}$$

Αν $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ είναι μια Boolean συνάρτηση, τότε

$$D_i f(x) = 0 \text{ αν η συντεταγμένη } i \text{ δεν είναι ζωτική για το } x \tag{2.6}$$

και

$$D_i f(x) = \pm 1 \text{ αν η συντεταγμένη } i \text{ είναι ζωτική για το } x. \tag{2.7}$$

Έτσι, η $(D_i f)^2$ είναι η «δείκτρια συνάρτηση της ζωτικότητας της i-οστής συντεταγμένης», και

$$\mathbf{Inf}_i[f] = \mathbb{E}\,[D_i f(\mathbf{x})^2]. \tag{2.8}$$

Παίρνουμε αυτόν τον τύπο ως ορισμό για τις επιρροές Boolean συναρτήσεων με τιμές στο $\mathbb{R}$:

Ορισμός 2.16. *Αν $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ τότε η επιρροή της i-οστής συντεταγμένης στην f είναι:*

$$\mathbf{Inf}_i[f] = \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim\{-1,1\}^n}[D_i f(\mathbf{x})^2] = \|D_i f\|_2^2. \tag{2.9}$$

Ορισμός 2.17. Λέμε ότι η συντεταγμένη $i \in [n]$ είναι *σχετική* για την $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ αν $\mathbf{Inf}_i[f] > 0$, δηλαδή αν $f(x^{(i\to 1)}) \neq f(x^{(i\to -1)})$ για τουλάχιστον ένα $x \in \{-1,1\}^n$.

Η διακριτή παράγωγος D_i παρουσιάζει πολλές ομοιότητες με τις συνήθεις μερικές παραγώγους. Για παράδειγμα, η $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη αν και μόνο αν $D_i f(x) \geqslant 0$ για όλα τα i και όλα τα x. Ακόμη, ο τελεστής D_i συμπεριφέρεται σαν τελεστής τυπικής παραγώγισης σε σχέση με τα αναπτύγματα Fourier:

Πρόταση 2.18. *Έστω $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$, με ανάπτυγμα το $f(x) = \sum_{S\subseteq[n]} \widehat{f}(S)\chi_S$. Τότε,*

$$D_i f(x) = \sum_{i\in S\subseteq[n]} \widehat{f}(S)\chi_{S\setminus\{i\}}. \tag{2.10}$$

Απόδειξη. Αφού ο D_i είναι γραμμικός τελεστής, το αποτέλεσμα έπεται αμέσως από τον υπολογισμό στις χ_S. Έχουμε $D_i\chi_S = 0$ αν $i \notin S$ και $D_i\chi_S = \chi_{S\setminus\{i\}}$ αν $i \in S$. □

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Parseval για το ανάπτυγμα Fourier της $D_i f$, μπορούμε να εκφράσουμε τις επιρροές μέσω των συντελεστών Fourier:

Θεώρημα 2.19. *Για κάθε $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ και για κάθε $i \in [n]$,*

$$\mathbf{Inf}_i[f] = \sum_{i\in S} \widehat{f}(S)^2. \tag{2.11}$$

Με άλλα λόγια, η επιρροή της i συντεταγμένης στην f ισούται με το άθροισμα των βαρών της f στα υποσύνολα S που περιέχουν το i. Αυτό είναι ένα ακόμα καλό παράδειγμα της χρησιμότητας του αναπτύγματος Fourier για την κατανόηση μιας ενδιαφέρουσας ιδιότητας μιας Boolean συνάρτησης.

Στην ειδική περίπτωση που η $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ είναι μονότονη, υπάρχει ένας πιο απλός τρόπος για να «διαβάσουμε» τις επιρροές τησ: είναι οι συντελεστές βαθμού 1. Σε ότι ακολουθεί, γράφουμε $\widehat{f}(i)$ αντί για $\widehat{f}(\{i\})$.

Πρόταση 2.20. *Αν η $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ είναι μονότονη, τότε*

$$\mathbf{Inf}_i[f] = \widehat{f}(i) \tag{2.12}$$

για κάθε $i \in [n]$.

Απόδειξη. Από την ιδιότητα της μονοτονίας έπεται ότι η τιμή της $D_i f(x)$, όταν δεν είναι 0, είναι πάντα 1. Δηλαδή, η $D_i f$ είναι η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου των x για τα οποία η i-οστή συντεταγμένη είναι ζψτική. Ως εκ τούτου,

$$\mathbf{Inf}_i[f] = \mathbb{E}[D_i f] = \widehat{D_i f}(\emptyset) = \widehat{f}(i), \tag{2.13}$$

όπου η τελευταία ισότητα είναι άμεση από την Πρόταση 2.18. □

Πρόταση 2.21. *Έστω $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ μεταβατική-συμμετρική και μονότονη συνάρτηση. Τότε,*

$$\mathbf{Inf}_i[f] \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \textit{για κάθε } i = 1, \ldots, n. \tag{2.14}$$

Απόδειξη. Από την μεταβατική-συμμετρική ιδιότητα της f έπεται ότι $\widehat{f}(i) = \widehat{f}(j)$ για όλα τα $i, j \in [n]$. Έτσι, από τη μονοτονία έχουμε

$$\mathbf{Inf}_i[f] = \widehat{f}(i) = \widehat{f}(1) \tag{2.15}$$

για όλα τα $i \in [n]$. Αλλά, από το θεώρημα του Parseval,

$$1 = \sum_S \widehat{f}(S)^2 \geqslant \sum_{i=1}^n \widehat{f}(i)^2 = n \cdot \widehat{f}(1)^2. \tag{2.16}$$

Ως εκ τούτου, $\widehat{f}(1) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$. □

Ορισμός 2.22. Ο *i-οστός τελεστής μέσης τιμής* $\mathbb{E}_i$ είναι ο γραμμικός τελεστής που ορίζεται στις συναρτήσεις $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\mathbb{E}_i f(x) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}_i}[f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \mathbf{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)]. \tag{2.17}$$

Ενώ ο $D_i f$ απομονώνει το τμήμα της f που εξαρτάται από την i-οστή συντεταγμένη, ο $\mathbb{E}_i f$ απομονώνει το τμήμα της f που *δεν* εξαρτάται από την i-οστή συντεταγμένη.

Πρόταση 2.23. *Για κάθε $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ ισχύουν τα εξής:*

(α) $\mathbb{E}_i f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^{(i\to 1)}) + f(x^{(i\to -1)})\right)$.

(β) $\mathbb{E}_i f(x) = \sum_{i\notin S} \widehat{f}(S)\chi_S$.

(γ) $f(x) = x_i D_i f(x) + \mathbb{E}_i f(x)$.

Απόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i f(x) &= \mathbb{E}_{\mathbf{x}_i}[f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \mathbf{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)] \\
&= \frac{1}{2}(f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \ldots, x_n)) \\
&= \frac{1}{2}\left(f(x^{(i\to 1)}) + f(x^{(i\to -1)})\right).
\end{aligned}$$

(β) Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i f(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x^{(i\to 1)}) + f(x^{(i\to -1)})\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \sum_{i\notin S} \widehat{f}(S)\chi_S \\
&= \sum_{i\notin S} \widehat{f}(S)\chi_S.
\end{aligned}$$

(γ) Προκύπτει άμεσα από τις $D_i f(x) = \sum_{i\in S} \widehat{f}(S)\chi_{S\setminus\{i\}}$ και $\mathbb{E}_i f(x) = \sum_{i\notin S} \widehat{f}(S)\chi_S$. □

Παρατήρηση 2.24. Οι συναρτήσεις $D_i f$ και $\mathbb{E}_i f$ που εμφανίζονται στην $f(x) = x_i D_i f(x) + \mathbb{E}_i f(x)$ δεν εξαρτώνται από το x_i. Λόγω αυτής της παρατήρησης, η συγκεκριμένη διάσπαση είναι πολύ χρήσιμη για την απόδειξη αποτελεσμάτων σχετικά με τις Boolean συναρτήσεις με επαγωγή ως προς n.

Ορίζουμε τώρα έναν τελεστή παρόμοιο με τον D_i, την i-οστή Λαπλασιανή.

Ορισμός 2.25. Ο *i-οστός Λαπλασιανός τελεστής* ορίζεται ως εξής:

$$L_i f = f - \mathbb{E}_i f. \tag{2.18}$$

Η επόμενη πρόταση περιγράφει τις βασικές ιδιότητες του τελεστή L_i.

Πρόταση 2.26. *Για κάθε $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ ισχύουν τα εξής:*

(α) $L_i f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(x^{\oplus i})\right)$.

(β) $L_i f(x) = x_i D_i f(x) = \sum_{i \in S} \widehat{f}(S)\chi_S$.

(γ) $\langle f, L_i f\rangle = \langle L_i f, L_i f\rangle = \mathbf{Inf}_i[f]$.

Απόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $2L_i f(x) = f(x) + f(x^{\oplus i})$ αν και μόνο αν $2f(x) - 2\mathbb{E}_i f(x) = f(x) + f(x^{\oplus i})$. Ισοδύναμα, αν

$$f(x) = f(x^{(i\to 1)}) + f(x^{(i\to -1)}) - f(x^{\oplus i}), \tag{2.19}$$

που ισχύει. (β) Από την $f(x) = x_i D_i f(x) + \mathbb{E}_i f(x)$ είναι άμεσο ότι

$$L_i f(x) = f(x) - \mathbb{E}_i f(x) = x_i D_i f(x) = \sum_{i\in S} \widehat{f}(S)\chi_S. \tag{2.20}$$

(γ) Από την $\mathbb{E}_i f(x) = \sum_{i \notin S} \widehat{f}(S)\chi_S$ βλέπουμε ότι

$$\langle \mathbb{E}_i f, \mathbb{E}_i f\rangle = \|\mathbb{E}_i f\|_2^2 = \sum_{i\in S} \widehat{f}(S)^2 \tag{2.21}$$

και από το θεώρημα του Plancherel,

$$\langle f, \mathbb{E}_i f\rangle = \sum_{S\subseteq[n]} \widehat{f}(S)\widehat{\mathbb{E}_i f}(S) = \sum_{i\in S} \widehat{f}(S)\widehat{f}(S), \tag{2.22}$$

δηλαδή $\langle f, \mathbb{E}_i f\rangle = \|\mathbb{E}_i f\|_2^2$. Τώρα γράφουμε

$$\begin{aligned}\langle L_i f, L_i f\rangle &= \langle f - \mathbb{E}_i f, f - \mathbb{E}_i f\rangle = \langle f, f\rangle - 2\langle f, \mathbb{E}_i f\rangle + \langle \mathbb{E}_i f, \mathbb{E}_i f\rangle \\ &= \langle f, f\rangle - \langle f, \mathbb{E}_i f\rangle = \langle f, f - \mathbb{E}_i f\rangle = \langle f, L_i f\rangle.\end{aligned}$$

□

2.3 Συνολική επιρροή

Ορισμός 2.27. Η *συνολική επιρροή* της $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ ορίζεται να είναι:

$$\mathbf{I}[f] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Inf}_i[f]. \tag{2.23}$$

Στην περίπτωση των Boolean συναρτήσεων $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ η συνολική επιρροή επιδέχεται μερικές επιπλέον ερμηνείες. Πρώτον, αναφέρεται συχνά ως η *μέση ευαισθησία* της f, εξαιτίας της ακόλουθης πρότασησ:

Πρόταση 2.28. *Για κάθε $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ ισχύει ότι*

$$\mathbf{I}[f] = \mathbb{E}_{\mathbf{x}}[\mathrm{sens}_f(\mathbf{x})], \tag{2.24}$$

όπου η $\mathrm{sens}_f(x)$ είναι η ευαισθησία της f στο x, που ορίζεται να είναι το πλήθος των ζωτικών συντεταγμένων της f στο σημείο x.

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}[f] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Inf}_i[f] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x}^{\oplus 1})] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{\mathbf{x}}[\mathbf{1}_{f(\mathbf{x}) \neq f(x^{\oplus 1})}] = \mathbb{E}_{\mathbf{x}}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{f(\mathbf{x}) \neq f(x^{\oplus 1})}\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbf{x}}[\mathrm{sens}_f(\mathbf{x})].
\end{aligned}$$

□

Η συνολική επιρροή της $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ είναι επίσης στενά συνδεδεμένη με το πλήθος των συνοριακών ακμών.

Πόρισμα 2.29. *Το ποσοστό των ακμών του κύβου του Hamming $\{-1,1\}^n$ που είναι συνοριακές ακμές για την $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ ισούται με $\frac{1}{n}\mathbf{I}[f]$.*

Παράδειγμα 2.30. Η συνολική επιρροή μιας Boolean συνάρτησης $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ βρίσκεται πάντα μεταξύ 0 και n. Ελαχιστοποιείται από τις σταθερές συναρτήσεις ± 1, οι οποίες έχουν συνολική επιρροή ίση με 0. Μεγιστοποιείται από τις συναρτήσεις $\chi_{[n]}$ και $-\chi_{[n]}$, οι οποίες έχουν συνολική επιρροή n: γι¨ αυτές τις συναρτήσεις, κάθε συντεταγμένη είναι ζωτική για κάθε x. Οι δικτατορικές συναρτήσεις χ_i και $-\chi_i$ έχουν συνολική επιρροή ίση με 1. Η συνολική επιρροή της OR_n και της AND_n είναι πολύ μικρή: $n/2^{n-1}$. Από την άλλη πλευρά, η συνολική επιρροή της Maj_n είναι αρκετά μεγάλη: περίπου ίση με $\sqrt{2/\pi}\sqrt{n}$ για μεγάλα n.

Από την Πρόταση 2.20 έχουμε άλλη μία ερμηνεία για τη συνολική επιρροή των μονότονων συναρτήσεων.

Πρόταση 2.31. *Αν η $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ είναι μονότονη, τότε*

$$\mathbf{I}[f] = \sum_{i=1}^{n} \widehat{f}(i). \tag{2.25}$$

Αυτό το άθροισμα των συντελεστών Fourier βαθμού 1 έχει μια φυσιολογική ερμηνεία στην θεωρία της κοινωνικής επιλογής:

Πρόταση 2.32. *Έστω $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ ένας κανόνας εκλογής για μια εκλογή με δύο υποψηφίους. Για δεδομένη ψηφοφορία $x = (x_1, \dots, x_n)$ της ψηφοφορίας, έστω w το πλήθος των ψήφων που συμφωνούν με το αποτέλεσμα $f(x)$ της ψηφοφορίας. Τότε,*

$$\mathbb{E}[w] = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \widehat{f}(i). \tag{2.26}$$

Απόδειξη. Απ¨ τον τύπο για τους συντελεστές Fourier έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{f}(i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x})\mathbf{x}_i] = \mathbb{E}_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x})(\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_n)]. \tag{2.27}$$

Τώρα, το άθροισμα $x_1 + \cdots + x_n$ ισούται με την διαφορά του πλήθους των ψήφων υπέρ του υποψηφίου -1 από το πλήθος των ψήφων υπέρ του υποψηφίου 1. Έτσι, η τιμή $f(x)(x_1 + \cdots + x_n)$ ισούται με την διαφορά του πλήθους των ψήφων του ηττημένου από το πλήθος των ψήφων του νικητή, δηλαδή είναι ίση με $w - (n - w) = 2w - n$. Το αποτέλεσμα έπεται. □

Ο Rousseau (1762) πρότεινε ότι ο ιδανικός κανόνας εκλογής είναι αυτός που μεγιστοποιεί το πλήθος των ψήφων που συμφωνούν με το αποτέλεσμα. Εδώ δείχνουμε ότι ο πλειοψηφικός νόμος έχει αυτήν την ιδιότητα (τουλάχιστον όταν ο n είναι περιττός).

Θεώρημα 2.33. *Οι μοναδικές Boolean συναρτήσεις $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ που μεγιστοποιούν το άθροισμα $\sum_{i=1}^{n} \widehat{f}(i)$ είναι οι συναρτήσεις πλειοψηφίας. Ειδικότερα,*

$$\mathbf{I}[f] \leqslant \mathbf{I}[\mathrm{Maj}_n] = \sqrt{2/\pi}\,\sqrt{n} + O(n^{-1/2}) \tag{2.28}$$

για όλες τις μονότονες f.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{f}(i) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x})(\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_n)] \leqslant \mathbb{E}_{\mathbf{x}}[\,|\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_n|\,], \tag{2.29}$$

αφού $f(x) \in \{-1,1\}$ πάντοτε. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $f(x) = \mathrm{sgn}(x_1 + \cdots + x_n)$ όταν $x_1 + \cdots + x_n \neq 0$. Ο δεύτερος ισχυρισμός του θεωρήματος προκύπτει με απευθείας υπολογισμό. □

Στη συνέχεια θα δούμε κάποιες πιο αναλυτικές εκφράσεις για τη συνολική επιρροή. Από τον ορισμό, για κάθε $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ έχουμε

$$\mathbf{I}[f] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Inf}_i[f] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{\mathbf{x}}[D_i f(\mathbf{x})^2] = \mathbb{E}_{\mathbf{x}}\left[\sum_{i=1}^{n} D_i f(\mathbf{x})^2\right]. \tag{2.30}$$

Αυτό μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 2.34. Ο *διακριτός τελεστής κλίσης* ∇ απεικονίζει τη συνάρτηση $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ στη συνάρτηση $\nabla f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται ως εξής:

$$\nabla f(x) = (D_1 f(x), D_2 f(x), \ldots, D_n f(x)). \tag{2.31}$$

Σημειώστε ότι αν $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ τότε

$$\|\nabla f(x)\|_2^2 = \mathrm{sens}_f(x), \tag{2.32}$$

όπου $\|\cdot\|_2$ είναι εδώ η συνήθης Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Γενικά, από την (2.30) συμπεραίνουμε το εξής:

Πρόταση 2.35. *Για κάθε $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι*

$$\mathbf{I}[f] = \mathbb{E}_{\mathbf{x}}\left[\|\nabla f(\mathbf{x})\|_2^2\right]. \tag{2.33}$$

Θα δώσουμε έναν εναλλακτικό αναλυτικό ορισμό της συνολικής επιρροής μέσω του Λαπλασιανού τελεστή:

Ορισμός 2.36. Ο *Λαπλασιανός τελεστής* L είναι ο γραμμικός τελεστής που ορίζεται στις συναρτήσεις $f : \{-1,1\} \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$Lf = \sum_{i=1}^{n} L_i f. \tag{2.34}$$

Οι βασικές ιδιότητες του Λαπλασιανού τελεστή δίνονται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.37. *Για κάθε $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ ισχύουν τα εξής:*

(α) $Lf(x) = \frac{n}{2}\Big(f(x) - \mathrm{avg}_{i\in[n]}\{f(x^{\oplus i})\}\Big)$.

(β) $Lf(x) = f(x)\cdot \mathrm{sens}_f(x)$ *αν* $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$.

(γ) $Lf = \sum_{S\subseteq[n]} |S|\widehat{f}(S)\chi_S$.

(δ) $\langle f, Lf\rangle = \mathbf{I}[f]$.

Μπορούμε τώρα να δώσουμε τον ακόλουθο τύπο για τη συνολική επιρροή:

Θεώρημα 2.38. *Για κάθε $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι*

$$\mathbf{I}[f] = \sum_{S\subseteq[n]} |S|\widehat{f}(S)^2 = \sum_{k=0}^{n} k\cdot W^k[f]. \tag{2.35}$$

Για συναρτήσεις $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ μπορούμε να δώσουμε μια δεύτερη περιγραφή, χρησιμοποιώντας το φασματικό δείγμα:

$$\mathbf{I}[f] = \mathbb{E}_{\mathbf{S}\sim\mathcal{S}_f}[\,|S|\,]. \tag{2.36}$$

Έτσι, η συνολική επιρροή της $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ επίσης μετρά το μέσο «ύψος» ή το μέσο βαθμό των τετραγώνων των συντελεστών Fourier της f. Συγκρίνοντας την σχέση $\mathrm{Var}[f] = \sum_{k>0} W^k[f]$ με το Θεώρημα 2.38 παίρνουμε άμεσα ένα απλό αλλά σημαντικό αποτέλεσμα, την *ανισότητα Poincaré*.

Θεώρημα 2.39 (ανισότητα Poincaré). *Για κάθε* $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ *ισχύει ότι*

$$\mathrm{Var}[f] \leqslant \mathbf{I}[f]. \tag{2.37}$$

Έχουμε ισότητα στην ανισότητα Poincaré αν και μόνο αν ολόκληρο το βάρος της f συγκεντρώνεται στους βαθμούς 0 και 1, δηλαδή όταν

$$W^{\leqslant 1}[f] = \mathbb{E}[f^2]. \tag{2.38}$$

Στην περίπτωση των Boolean συναρτήσεων αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν $f = \pm 1$ ή $f = \chi_i$ για κάποιο i.

Στην περίπτωση των συναρτήσεων $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$, η ανισότητα poincaré μπορεί να θεωρηθεί ως μία ισοπεριμετρική ανισότητα για τον κύβο του Hamming. Αν σκεφτούμε την f ως την δείκτρια συνάρτηση ενός συνόλου $A \subseteq \{-1,1\}^n$ που έχει «μέτρο» $a = |A|/2^n$, τότε

$$\mathrm{Var}[f] = 4a(1-a), \tag{2.39}$$

ενώ η συνολική επιρροή $\mathbf{I}[f]$ είναι το ποσοστό των συνοριακών ακμών του A πολλαπλασιασμένο επί n. Ειδικότερα, η ανισότητα Poincaré λέει ότι ανάμεσα στα υποσύνολα $A \subseteq \{-1,1\}^n$ που έχουν μέτρο $a = 1/2$, τα δικτατορικά σύνολα έχουν το μικρότερο πλήθος συνοριακών ακμών.

Όταν $a \notin \{0, 1/2, 1\}$, η ανισότητα Poincaré δεν είναι το ίδιο ισχυρή με την ισοπεριμετρική ανισότητα. Για μικρές τιμές του a ακόμα και η ασυμπτωτική εκτίμηση που μας δίνει δεν είναι βέλτιστη. Τα βέλτιστα ισοπεριμετρικά αποτελέσματα για τον κύβο του Hamming είναι γνωστά. Για παράδειγμα, το ακόλουθο απλουστευμένο θεώρημα είναι βέλτιστο για a της μορφής 2^{-i}.

Θεώρημα 2.40. *Έστω* $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$. *Αν* $a = \min\{\mathbb{P}[f=1], \mathbb{P}[f=-1]\}$, *τότε*

$$2a\log(1/a) \leqslant \mathbf{I}[f]. \tag{2.40}$$

Πίσω από αυτό το αποτέλεσμα βρίσκεται μια σημαντική ιδέα που εμφανίζεται συχνά στην ανάλυση των Boolean συναρτήσεων: ο κύβος του Hamming είναι ένας «διαστολέας μικρών συνόλων». Σε αδρές γραμμές, αυτό σημαίνει ότι τα «μικρά» υποσύνολα $A \subseteq \{-1,1\}^n$ έχουν ασυνήθιστα μεγάλο «σύνορο».

2.4 Ευστάθεια του θορύβου

Έστω $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ ένας κανόνας εκλογής για μια εκλογή με δύο υποψηφίους. Υποθέτουμε ότι οι n ψηφοφόροι επιλέγουν την ψήφο τους $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ ανεξάρτητα και ομοιόμορφα. Τώρα, ας υποθέσουμε ότι όταν ο κάθε ψηφοφόρος πηγαίνει στην κάλπη υπάρχει το ενδεχόμενο η ψήφος του να *καταγραφεί λανθασμένα*. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι η κάθε ψήφος καταγράφεται σωστά με πιθανότητα $p \in [0,1]$ (και καταγράφεται αλλοιωμένη με πιθανότητα $1-p$). Γράφοντας $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$ για τις ψήφους που έχουν καταγραφεί τελικώς, ζητάμε την πιθανότητα να συμβαίνει $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$, δηλαδή ρωτάμε αν οι ψήφοι που έχουν καταγραφεί λανθασμένα επηρεάζουν το αποτέλεσμα της εκλογής. Το ερώτημα αυτό οδηγεί στον ορισμό της *ευστάθειας θορύβου της* f.

Ορισμός 2.41. Έστω $p \in [0,1]$. Για δοθέν $x \in \{-1,1\}^n$ γράφουμε $\mathbf{y} \sim N_p(x)$ για να δηλώσουμε ότι το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{y}$ σχηματίζεται ως εξής: κάθε $\mathbf{y}_i$ επιλέγεται να είναι ίσο με x_i με πιθανότητα p, και είναι ομοιόμορφα τυχαίο με πιθανότητα $1-p$.

Επεκτείνουμε αυτόν τον ορισμό σε όλα τα $p \in [-1,1]$ ζητώντας το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{y}$ να σχηματίζεται ως εξής: κάθε $\mathbf{y}_i$ επιλέγεται να είναι ίσο με x_i με πιθανότητα $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p$, και είναι ίσο με $-x_i$ με πιθανότητα $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}p$.

Λέμε ότι το $\mathbf{y}$ είναι *p-συσχετισμένο με το x*.

Ορισμός 2.42. Αν το $\mathbf{x} \sim \{-1,1\}^n$ επιλέγεται ομοιόμορφα και έπειτα $\mathbf{y} \sim N_p(\mathbf{x})$, λέμε ότι το $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ είναι ένα *p-συσχετισμένο ζεύγος* τυχαίων διανυσμάτων. Ο ορισμός αυτός είναι συμμετρικός ως προς $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$. Είναι ισοδύναμος με το να πούμε ότι, ανεξάρτητα για κάθε $i \in [n]$, το ζεύγος $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ ικανοποιεί τις $\mathbb{E}(\mathbf{x}_i) = \mathbb{E}(\mathbf{y}_i) = 0$ και $\mathbb{E}(\mathbf{x}_i\mathbf{y}_i) = p$. Πράγματι, παρατηρήστε (για παράδειγμα) ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{x}_i\mathbf{y}_i) &= 1 \cdot \mathbb{P}(\mathbf{x}_i\mathbf{y}_i = 1) + (-1) \cdot \mathbb{P}(\mathbf{x}_i\mathbf{y}_i = 1)\\ &= \mathbb{P}(\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i) - \mathbb{P}(\mathbf{x}_i = -\mathbf{y}_i)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}p\right) = p.\end{aligned}$$

Τώρα, είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε την έννοια της *ευστάθειας θορύβου*, η οποία μετράει την συσχέτιση μεταξύ των $f(\mathbf{x})$ και $f(\mathbf{y})$ όταν το $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ είναι p-συσχετισμένο ζευγάρι.

Ορισμός 2.43. Έστω $f : \{-1,1\} \to \mathbb{R}$ και $p \in [-1,1]$. Η *ευστάθεια θορύβου* της f στο p είναι η

$$\mathrm{Stab}_p(f) = \mathbb{E}_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\ p-\text{συσχ.}}[f(\mathbf{x})f(\mathbf{y})]. \tag{2.41}$$

Εάν $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Stab}_p(f) &= \mathbb{P}_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\ p-\text{συσχ.}}[f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})] - \mathbb{P}_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\ p-\text{συσχ.}}[f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{y})]\\ &= 2\mathbb{P}_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\ p-\text{συσχ.}}[f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})] - 1.\end{aligned}$$

Από τον ορισμό είναι σαφές ότι η πιθανότητα να μην επηρεάζεται το εκλογικό αποτέλεσμα από την αλλοιωμένη καταγραφή των ψήφων είναι ίση με $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Stab}_p(f)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Stab}_p(f) &= \frac{1}{2} + \mathbb{P}_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\ p-\text{συσχ.}}[f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})] - \frac{1}{2}\\ &= \mathbb{P}_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\ p-\text{συσχ.}}[f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})].\end{aligned}$$

Όταν το p είναι κοντά στο 1 (δηλαδή ο «θόρυβος» είναι μικρός) είναι μερικές φορές πιο φυσιολογικό να αναρωτηθούμε αν αντιστρέφοντας ένα μικρό ποσοστό των ψήφων μπορεί κανείς να αλλάξει το αποτέλεσμα της εκλογής.

Ορισμός 2.44. Για $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ και $\delta \in [0,1]$ συμβολίζουμε με $\mathbf{NS}_\delta[f]$ την ευαισθησία ως προς θόρυβο της f στο δ, που ορίζεται να είναι η πιθανότητα να έχουμε $f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{y})$ όταν $\mathbf{x} \sim \{-1,1\}^n$ και το $\mathbf{y}$ προκύπτει από το $\mathbf{y}$ αν αντιστρέψουμε κάθε συντεταγμένη, ανεξάρτητα, με πιθανότητα δ. Δηλαδή,

$$\mathbf{NS}_\delta[f] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{Stab}_{1-2\delta}[f]. \tag{2.42}$$

Παράδειγμα 2.45. Οι σταθερές συναρτήσεις ± 1 έχουν ευστάθεια θορύβου ίση με 1 για κάθε p. Οι δικτατορικές συναρτήσεις χ_i ικανοποιούν την $\mathbf{Stab}_p[\chi_i] = p$ για κάθε p. Ισοδύναμα, $\mathbf{NS}_\delta[\chi_i] = \delta$ για κάθε δ. Γενικά,

$$\begin{aligned}\mathbf{Stab}_p[\chi_S] &= \mathbb{E}_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\ p-\text{συσχ.}}[\mathbf{x}^S\mathbf{y}^S] = \mathbb{E}\left[\prod_{i\in S}(\mathbf{x}_i\mathbf{y}_i)\right]\\ &= \prod_{i\in S}\mathbb{E}[\mathbf{x}_i\mathbf{y}_i] = \prod_{i\in S} p = p^{|S|}.\end{aligned}$$

Δεν υπάρχει κάποια βολική έκφραση για την ευστάθεια θορύβου της συνάρτησης πλειοψηφίας Maj_n. Μπορούμε όμως να προσεγγίσουμε την $\mathbf{Stab}_p[\mathrm{Maj}_n]$ και για σταθερή τιμη του p να υπολογίσουμε το όριό της όταν $n \to \infty$.

Θεώρημα 2.46. *Για κάθε $p \in [-1, 1]$,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{Stab}_p[\mathrm{Maj}_n] = \frac{2}{\pi}\arcsin p = 1 - \frac{2}{\pi}\arccos p, \tag{2.43}$$

όπου θεωρούμε μόνο τις περιττές τιμές του n. Ισοδύναμα, για κάθε $\delta \in [0, 1]$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{NS}_\delta[\mathrm{Maj}_n] = \frac{1}{\pi}\arccos(1-\delta). \tag{2.44}$$

Χρησιμοποιώντας την $\cos z = 1 - \frac{1}{2}z^2 + O(z^4)$, απ¨ όπου έπεται ότι $\arccos(1-2\delta) = 2\sqrt{\delta} + O(\delta^{3/2})$, παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{NS}_\delta[\mathrm{Maj}_n] = \frac{2}{\pi}\sqrt{\delta} + O(\delta^{3/2}). \tag{2.45}$$

Υπάρχει ένας απλός τύπος που εκφράζει την ευστάθεια θορύβου μιας Boolean συνάρτησης μέσω των συντελεστών Fourier της. Για να τον περιγράψουμε, εισάγουμε πρώτα έναν πολύ σημαντικό τελεστή της ανάλυσης των Boolean συναρτήσεων, τον *τελεστή θορύβου* T_p.

Ορισμός 2.47. Για κάθε $p \in [-1, 1]$, ο *τελεστής θορύβου με παράμετρο* p είναι ο γραμμικός τελεστής T_p που ορίζεται για κάθε συνάρτηση $f : \{-1, 1\}^n \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$T_p f(x) = {}_{\mathbf{y}\sim N_p(x)}[f(\mathbf{y})]. \tag{2.46}$$

Πρόταση 2.48. *Για κάθε $f : \{-1, 1\}^n \to \mathbb{R}$, το ανάπτυγμα Fourier της $T_p f$ δίνεται από την σχέση*

$$T_p f = \sum_{S\subseteq[n]} p^{|S|}\widehat{f}(S)\chi_S = \sum_{k=0}^{n} p^k f^{=k}, \tag{2.47}$$

όπου $f^{=k} = \sum_{|S|=k}\widehat{f}(S)\chi_S$.

Απόδειξη. Επειδή ο T_p είναι γραμμικός τελεστής, αρκεί να δείξουμε ότι $T_p\chi_S = p^{|S|}\chi_S$. Γράφουμε:

$$T_p\chi_S(x) = \mathbb{E}_{\mathbf{y}\sim N_p(x)}[\mathbf{y}^S] = \prod_{i\in S}\mathbb{E}_{\mathbf{y}\sim N_p(x)}[\mathbf{y}_i] = \prod_{i\in S}(px_i) = p^{|S|}\chi_S(x), \tag{2.48}$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι, αφού $\mathbf{y} \sim N_p(x)$, οι συντεταγμένες $\mathbf{y}_i$ είναι ανεξάρτητες και $\mathbb{E}[\mathbf{y}_i] = px_i$. □

Η σύνδεση ανάμεσα στον τελεστή θορύβου και την ευστάθεια θορύβου δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{Stab}_p[f] = \mathbb{E}_{\substack{\mathbf{x}\sim\{-1,1\}^n \\ \mathbf{y}\sim N_p(\mathbf{x})}}[f(\mathbf{x})f(\mathbf{y})] = \mathbb{E}_{\mathbf{x}}\left[f(\mathbf{x})\mathbb{E}_{\mathbf{y}\sim N_p(\mathbf{x})}[f(\mathbf{y})]\right]. \tag{2.49}$$

Συνεπώς,

$$\mathbf{Stab}_p[f] = \langle f, T_p f\rangle. \tag{2.50}$$

Από τον τύπο του Plancherel και την Πρόταση 2.48 έχουμε:

Θεώρημα 2.49. *Για κάθε* $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$,

$$\mathbf{Stab}_p[f] = \sum_{S \subseteq [n]} p^{|S|} \widehat{f}(S)^2 = \sum_{k=0}^{n} p^k \mathbf{W}^k[f]. \tag{2.51}$$

Άρα, για $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ *έχουμε*

$$\mathbf{Stab}_p[f] = \mathbb{E}_{\mathbf{S} \sim S_f}[p^{|\mathbf{S}|}] \tag{2.52}$$

και

$$\mathbf{NS}_\delta[f] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} (1 - (1-2\delta)^k)\, \mathbf{W}^k[f]. \tag{2.53}$$

Οι προηγούμενες σχέσεις δείχνουν ότι η ευστάθεια θορύβου της f στο p είναι ίση με το άθροισμα των βαρών της πολλαπλασιασμένων με έναν όρο που φθίνει εκθετικά καθώς μεγαλώνει ο βαθμός τους. Ένα απλό αλλά σημαντικό πόρισμα είναι ότι οι δικτατορικές συναρτήσεις (και οι αντίθετές τους) έχουν τη μέγιστη ευστάθεια θορύβου.

Πρόταση 2.50. *Έστω* $p \in (0,1)$. *Εάν η* $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ *είναι αμερόληπτη, τότε* $\mathbf{Stab}_p[f] \leqslant p$, *με ισότητα αν και μόνο αν* $f = \pm\chi_i$ *για κάποιο* $i \in [n]$.

Απόδειξη. Για μια αμερόληπτη f έχουμε $\mathbf{W}^0[f] = 0$ (διότι $\widehat{f}(\emptyset) = 0$). Άρα,

$$\mathbf{Stab}_p[f] = \sum_{k \geqslant 1} p^k \mathbf{W}^k[f]. \tag{2.54}$$

Εφόσον $p^k < p$ για κάθε $k > 1$, η ευστάθεια θορλυβου μεγιστοποιείται αν όλο το βάρος της f συγκεντρώνεται στο βαθμό 1. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $f = \pm\chi_i$. □

Για δοθείσα συνάρτηση f είναι ενδιαφέρον να δούμε πώς μεταβάλλεται η $\mathbf{Stab}_p[f]$ σαν συνάρτηση του p. Από το Θεώρημα 2.49 βλέπουμε ότι η $\mathbf{Stab}_p[f]$ είναι πολυώνυμο του p με μη αρνητικούς συντελεστές, άρα είναι αύξουσα συνάρτηση του p. Η επόμενη πρόταση, που προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 2.49, δείχνει ότι οι παράγωγοι αυτού του πολυωνύμου στα σημεία 0 και 1 έχουν κομψές ερμηνείες.

Πρόταση 2.51. *Για κάθε* $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dp}\mathbf{Stab}_p[f]\Big|_{p=0} = \mathbf{W}^1[f] \tag{2.55}$$

και

$$\frac{d}{dp}\mathbf{Stab}_p[f]\Big|_{p=1} = \mathbf{I}[f]. \tag{2.56}$$

Για κάθε $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ έχουμε ότι η $\mathbf{NS}_\delta[f]$ είναι αύξουσα συνάρτηση του δ στο $[0, 1/2]$, και η δεύτερη ταυτότητα της προηγούμενης πρότασης δείχνει ότι

$$\frac{d}{dp}\mathbf{NS}_\delta[f]\Big|_{\delta=0} = \mathbf{I}[f]. \tag{2.57}$$

Κλείνουμε αυτήν την παραγραφο με μια παραλλαγή των επιρροών που λαμβάνει υπ¨ όψιν και τον θόρυβο.

Ορισμός 2.52. Για κάθε $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, $p \in [0,1]$ και $i \in [n]$, η *p-ευσταθής επιρροή του i* στην f είναι η

$$\mathbf{Inf}_i^{(p)}[f] = \mathbf{Stab}_p[D_i f] = \sum_{i \in S} p^{|S|-1} \widehat{f}(S)^2, \tag{2.58}$$

όπου συμφωνούμε ότι $0^0 = 1$. Επίσης, ορίζουμε

$$\mathbf{I}^{(p)}[f] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Inf}_i^{(p)}[f]. \tag{2.59}$$

Από το Θεώρημα 2.49 έπεται ότι

$$\mathbf{Inf}^{(p)}[f] = \frac{d}{dp}\mathbf{Stab}_p[f] = \sum_{k=1}^{n} kp^{k-1} \cdot \mathbf{W}^k[f]. \tag{2.60}$$

Η p-ευσταθής επιρροή $\mathbf{Inf}_i^{(p)}[f]$ αυξάνεται από το $\widehat{f}(i)^2$ στο $\mathbf{Inf}_i[f] = \sum_{i \in S} \widehat{f}(S)^2$ καθώς το p αυξάνεται από το 0 προς το 1. Ένα δείγμα για την χρησιμότητα των ενδιάμεσων τιμών (όταν $0 < p < 1$) μας δίνει η επόμενη πρόταση, η οποία δείχνει ότι μια συνάρτηση δεν μπορεί να έχει πολλές συντεταγμένες με μεγάλη «ευσταθή επιρροή»:

Πρόταση 2.53. *Έστω$f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ με $\mathrm{Var}[f] \leqslant 1$. Για δοσμένα $0 < \delta, \varepsilon \leqslant 1$ ορίζουμε $J = \{i \in [n] : \mathbf{Inf}_i^{(1-\delta)}[f] \geqslant \varepsilon\}$. Τότε, $|J| \leqslant \frac{1}{\delta\varepsilon}$.*

Απόδειξη. Από την

$$\sum_{i \in [n]} \mathbf{Inf}_i^{(1-\delta)}[f] = \mathbf{I}^{(1-\delta)}[f] \geqslant |J| \cdot \varepsilon \tag{2.61}$$

έχουμε $|J| \leqslant \mathbf{I}^{(1-\delta)}[f]/\varepsilon$. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbf{I}^{(1-\delta)}[f] \leqslant 1/\delta$.

Έχουμε $\mathrm{Var}[f] = \sum_{k \geqslant 1} \mathbf{W}^k[f] \leqslant 1$, και

$$\mathbf{I}^{(1-\delta)}[f] = \sum_{k=1}^{n} k(1-\delta)^{k-1}\mathbf{W}^k[f]. \tag{2.62}$$

Επειδή $\delta \in (0,1)$ έχουμε $1 - \delta < 1$, και τότε

$$k(1-\delta)^{k-1} \leqslant 1 + (1-\delta) + \cdots + (1-\delta)^{k-1} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}(1-\delta)^k = \frac{1}{1-(1-\delta)} = \frac{1}{\delta}.$$

Τότε,

$$\mathbf{I}^{(1-\delta)}[f] = \sum_{k=1}^{n} k(1-\delta)^{k-1}\mathbf{W}^k[f] \leqslant \frac{1}{\delta}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{W}^k[f] \leqslant \frac{1}{\delta} \cdot 1 = \frac{1}{\delta}. \tag{2.63}$$

Άρα, $|J| \leqslant \mathbf{I}^{(1-\delta)}[f]/\varepsilon \leqslant 1/(\delta\varepsilon)$. □