

# Αρνητικά αποτελέσματα στη θεωρία προσέγγισης

Μιλτιάδης Καρακικές

## 1 Εισαγωγή

Η θεωρία προσέγγισης είναι ένας κλάδος της μαθηματικής ανάλυσης που μελετά την προσέγγιση συναρτήσεων από απλούστερες συναρτήσεις, σημαντικότερες από τις οποίες είναι τα αλγεβρικά και τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Το θεώρημα Taylor είναι ένα απλό παράδειγμα τέτοιου θεωρήματος, μειονέκτημα του οποίου είναι πως η τάξη προσέγγισης της συνάρτησης εξαρτάται από το πόσες φορές αυτή είναι διαφορίσιμη γύρω από το σημείο προσέγγισης. Το σφάλμα προσέγγισης μας το δίνει το υπόλοιπο Taylor ή MacLaurin της συνάρτησης.

Κάποια θεωρήματα αυτού του κλάδου μας δείχνουν απλά πως κάτι είναι αδύνατο να γίνει. Στην πραγματικότητα όμως, αυτά τα αποτελέσματα της θεωρίας προσέγγισης μας δείχνουν τί είναι αδύνατο ούτως ώστε να κατανοήσουμε περισσότερο τί είναι εφικτό. Τα θεωρήματα που θα ακολουθήσουν περιγράφουν με τον ένα ή τον άλλο τρόπο την γενική αρχή ότι οι διαδικασίες προσέγγισης είναι κατ' ανάγκη περιορισμένων δυνατοτήτων. Λόγω του χαρακτήρα της θεωρίας προσέγγισης, της προσέγγισης δηλαδή συναρτήσεων από απλούστερα και πιο εύχρηστα αντικείμενα, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε αυτούς τους περιορισμούς ώστε να μην προσπαθούμε να βελτιώσουμε κάτι που δεν μπορεί να βελτιωθεί. Επιπλέον, οι εν λόγω διαδικασίες προσέγγισης είναι περιορισμένων δυνατοτήτων για κάποιους λόγους που θα πρέπει να τους κατανοήσουμε προκειμένου να καταφέρουμε, εφόσον είναι δυνατό, να πετύχουμε κάτι καλύτερο με κάποιον άλλον τρόπο.

Υπάρχουν αρκετά αρνητικά αποτελέσματα στην θεωρία προσέγγισης αλλά τρεις είναι οι κυριότερες κατηγορίες τέτοιων αποτελεσμάτων. Η πρώτη αφορά αντίστροφα θεωρήματα, η δεύτερη τους εγγενείς περιορισμούς σε γραμμικές μεθόδους προσέγγισης, και η τρίτη το γενικό πλαίσιο της προσέγγισης από  $n$ -διάστατους χώρους συναρτήσεων. Θα γίνει λόγος ξεχωριστά για κάθε μία από τις τρεις κατηγορίες αρνητικών αποτελεσμάτων και θα αποδείξουμε κάποια θεωρήματα τα οποία είναι σημαντικά.

## 2 Αντίστροφα θεωρήματα

Αρχίζουμε με κάποιους βασικούς ορισμούς οι οποίοι θα μας χρειαστούν για να αναπτύξουμε τις διάφορες ιδέες.

Έστω  $C[a, b]$  ο χώρος των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στο κλειστό

διάστημα  $[a, b]$ , στον οποίο θεωρούμε την ομοιόμορφη νόρμα

$$(2.1) \quad \|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$$

και έστω  $\tilde{C}$  ο χώρος των πραγματικών  $2\pi$ -περιοδικών συναρτήσεων εφοδιασμένος με την ίδια νόρμα.

Ο χαρακτηρισμός ομοιομόρφη προκύπτει από το γεγονός πως η σύγκλιση στη νόρμα αυτή είναι ισοδύναμη με την ομοιόμορφη σύγκλιση. Δηλαδή,

$$(2.2) \quad \|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0 \text{ αν και μόνο αν } f_n \rightarrow f \text{ ομοιόμορφα στο } [a, b].$$

Με το σύμβολο  $\Pi_n$  θα συμβολίζουμε τον χώρο των αλγεβρικών πολυωνύμων με βαθμό το πολύ  $n$ , δηλαδή,

$$(2.3) \quad \Pi_n = \text{span}\{1, x, \dots, x^n\}.$$

Με όμοιο τρόπο, θα συμβολίζουμε με  $T_n$  τον χώρο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων βαθμού το πολύ  $n$ , δηλαδή,

$$(2.4) \quad T_n = \text{span}\{1, \sin x, \cos x, \dots, \sin(nx), \cos(nx)\}.$$

Θέτουμε

$$(2.5) \quad E_n(f) = \min\{\|f - p\|_\infty : p \in \Pi_n\}, \quad f \in C[a, b]$$

και

$$(2.6) \quad \tilde{E}_n(g) = \min\{\|g - t\|_\infty : t \in T_n\}, \quad g \in \tilde{C}.$$

Οι δύο αυτές ακολουθίες παραμέτρων μετρούν την απόσταση των  $f$  και  $g$  από συναρτήσεις των συνόλων  $\Pi_n$  και  $T_n$  αντίστοιχα: είναι, ουσιαστικά, τα σφάλματα στην προσέγγισή τους.

Το 1885, ο Weierstrass απέδειξε πως το σύνολο των αλγεβρικών πολυωνύμων είναι πυκνό στον  $C[a, b]$  και το σύνολο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι πυκνό στον  $\tilde{C}$ . Αυτό σημαίνει το εξής:

$$(2.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) = 0, \quad \text{για κάθε } f \in C[a, b]$$

και

$$(2.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{E}_n(g) = 0, \quad \text{για κάθε } g \in \tilde{C}.$$

Τα επόμενα μεγάλα ερωτήματα της θεωρίας αυτής αντιμετωπίστηκαν με επιτυχία περίπου 25 χρόνια αργότερα. Αυτά αφορούσαν ακριβείς εκτιμήσεις για την ταχύτητα με την οποία οι  $E_n(f)$  και  $\tilde{E}_n(g)$  τείνουν στο μηδέν, με βάση ορισμένες εγγενείς ιδιότητες των  $f$  και  $g$ ,

και την ανάπτυξη χρήσιμων και πρακτικών μεθόδων προσέγγισης. Αυτά τα δύο προβλήματα, σε ποικίλες εκδοχές τους, βρίσκονταν και βρίσκονται ακόμα στο επίκεντρο της θεωρίας προσέγγισης.

Με τον όρο «ευθέα θεωρήματα» εννοούμε αποτελέσματα που εξασφαλίζουν άνω φράγμα για το σφάλμα στην προσέγγιση μιας δοσμένης συνάρτησης από συγκεκριμένες κλάσεις συναρτήσεων προσέγγισης (αλγεβρικά, τριγωνομετρικά πολυώνυμα, συναρτήσεις-κλάδους κ.λ.π.) που βασίζονται σε ορισμένες ιδιότητες και χαρακτηριστικά των συναρτήσεων που προσεγγίζουμε.

Με τον όρο «αντίστροφα θεωρήματα» εννοούμε αποτελέσματα που συνάγουν μια ιδιότητα ή ένα χαρακτηριστικό της συνάρτησης που προσεγγίζουμε από την εκάστοτε ταχύτητα της προσέγγισης. Επομένως, τα αντίστροφα θεωρήματα μας παρέχουν ένα κάτω φράγμα για το σφάλμα προσέγγισης. Με αυτήν την έννοια τα αποκαλούμε «αρνητικά αποτελέσματα».

Για να κατανοήσουμε όμως καλύτερα αυτήν την ορολογία, καλό θα ήταν να ασχοληθούμε με τα εξής βασικά θεωρήματα που έχουν και άμεση σχέση. Για ευκολία ορίζουμε πρώτα την κλάση  $Lip(\alpha)$ , για κάποιο  $\alpha$  που ικανοποιεί την σχέση  $0 < \alpha \leq 1$ , όλων των Lipschitz συναρτήσεων τάξης  $\alpha$  του  $\tilde{C}$  ως εξής: λέμε ότι η  $g \in \tilde{C}$  ανήκει στην κλάση  $Lip(\alpha)$  αν υπάρχει  $M > 0$  ώστε

$$(2.9) \quad |g(x) - g(y)| \leq M|x - y|^\alpha \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ορίζουμε επίσης το *μέτρο συνέχειας* μιας φραγμένης συνάρτησης  $f$  που ορίζεται σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, b]$  ως εξής: για κάθε  $\delta > 0$ ,

$$(2.10) \quad \omega_f(\delta) = \omega_f([a, b]; \delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b], |x - y| \leq \delta\}.$$

Ουσιαστικά το  $\omega_f(\delta)$  δίνει μια εκτίμηση του  $\epsilon$  που καθορίζει το  $\delta$  στον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας. Έχουμε γράψει, δηλαδή, το  $\epsilon = \omega_f(\delta)$  συναρτήσει του  $\delta$ .

### 3 Το ευθύ θεώρημα Jackson

**Θεώρημα 3.1** (Jackson). Έστω  $g$  η οποία ανήκει στον  $\tilde{C}$ , της οποίας η  $r$ -τάξης παράγωγος  $g^{(r)}$  ανήκει στην κλάση  $Lip(\alpha)$  για κάποιον  $\alpha \in (0, 1]$ . Τότε, υπάρχει σταθερά  $M > 0$  τέτοια ώστε

$$(3.1) \quad \tilde{E}_n(g) \leq Mn^{-r-\alpha}$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1 θα χρειαστούμε δύο άλλα θεωρήματα του Jackson.

**Θεώρημα 3.2.** Αν  $\phi$  είναι μια  $2\pi$ -περιοδική και συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε

$$(3.2) \quad \tilde{E}_n(\phi) \leq \frac{\pi}{2(n+1)} \|\phi'\|_\infty,$$

και η σταθερά  $\frac{\pi}{2(n+1)}$  είναι η καλύτερη που μπορούμε να πάρουμε.

**Θεώρημα 3.3.** Αν η  $g \in \tilde{C}$  έχει συνεχή παράγωγο, τότε

$$(3.3) \quad \tilde{E}_n(g) \leq \frac{6}{n} \tilde{E}_{n-1}(g').$$

**Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.** Θα δείξουμε πρώτα πως αν  $g \in \tilde{C}$  τότε

$$(3.4) \quad \tilde{E}_n(g) \leq \frac{3}{2} \omega_g \left( \frac{\pi}{n+1} \right).$$

Ορίζουμε λοιπόν, για κάποιο σταθερό  $\delta > 0$ ,

$$(3.5) \quad \phi(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} g(t) dt.$$

Τότε,

$$(3.6) \quad |\phi'(x)| = \frac{1}{2\delta} |g(x+\delta) - g(x-\delta)| \leq \frac{1}{2\delta} \omega_g(2\delta).$$

Από το Θεώρημα 3.2 έχουμε

$$(3.7) \quad \tilde{E}_n(\phi) \leq \frac{\pi}{2(n+1)} \frac{1}{2\delta} \omega_g(2\delta).$$

Επιπλέον,

$$(3.8) \quad \begin{aligned} |\phi(x) - g(x)| &\leq \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} |g(t) - g(x)| dt \leq \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \omega_g(2\delta) dt \\ &= \frac{1}{2\delta} \omega_g(2\delta) [(x+\delta) - (x-\delta)] \\ &= \omega_g(2\delta). \end{aligned}$$

Έπειτα, έστω  $t \in T_n$  (τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ  $n$ ) το οποίο είναι η καλύτερη προσέγγιση της  $\phi$ , οπότε  $\tilde{E}_n(\phi) = \|\phi - t\|_\infty$ . Τότε,

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \tilde{E}_n(g) &\leq \|g - t\|_\infty \leq \|g - \phi\|_\infty + \|\phi - t\|_\infty \\ &\leq \omega_g(2\delta) + \frac{\pi}{2(n+1)} \frac{1}{2\delta} \omega_g(2\delta) = \omega_g(2\delta) \left[ 1 + \frac{\pi}{4\delta(n+1)} \right]. \end{aligned}$$

Αρκεί να πάρουμε το  $2\delta$  ίσο με  $\pi/(n+1)$  και η τελευταία ανισότητα γίνεται

$$\tilde{E}_n(g) \leq \frac{3}{2} \omega_g[\pi/(n+1)].$$

Έτσι έχουμε ότι αν  $g^{(r)} \in \text{Lip}(\alpha)$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ , τότε υπάρχει  $M_1 \in \mathbb{R}$  ώστε  $|g^{(r)}(x) - g^{(r)}(y)| \leq M_1|x - y|^\alpha$ , και προφανώς  $g^{(r)} \in \tilde{C}$ , άρα

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad \tilde{E}_{n-r}(g^{(r)}) &\leq \frac{3}{2} \omega_g \left( \frac{\pi}{n+1-r} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \sup \left\{ |g^{(r)}(x) - g^{(r)}(y)| : |x - y| \leq \frac{\pi}{n+1-r} \right\} \\
 &\leq \frac{3}{2} M_1 \left( \frac{\pi}{n+1-r} \right)^\alpha \\
 &\leq \frac{3}{2} M_1 \left( \frac{\pi}{n} \right)^\alpha \\
 &= M_2 n^{-\alpha}.
 \end{aligned}$$

Τώρα, για να παρουμε τον όρο  $n^{-r}$  θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 3.3. Αν το εφαρμόσουμε  $r$ -φορές, έχουμε το εξής

$$(3.11) \quad \tilde{E}_n(g) \leq \frac{6}{n} \tilde{E}_{n-1}(g') \leq \dots \leq \left( \frac{6}{n} \right)^r \tilde{E}_{n-r}(g^{(r)}).$$

Συνδυάζοντας τα δύο τελευταία αποτελέσματα έχουμε

$$(3.12) \quad \tilde{E}_n(g) \leq \left( \frac{6}{n} \right)^r M_2 n^{-\alpha} = M_3 n^{-r-\alpha},$$

και ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

**Παρατήρηση 3.4.** Σε ό,τι αφορά τις συνεχείς περιοδικές συναρτήσεις, όσο πιο λεία είναι η συνάρτηση τόσο καλύτερα μπορεί να προσεγγιστεί από τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Φυσικά, το θεώρημα του Jackson δίνει μόνο ένα άνω φράγμα του βαθμού προσέγγισης. Αυτό δεν συνεπάγεται πως σε κάποιες περιπτώσεις δεν μπορούμε να πετύχουμε κάτι καλύτερο. Η απάντηση στο κατά πόσο είναι εφικτό να προσεγγίσουμε καλύτερα δόθηκε πριν καλά-καλά τεθεί το ερώτημα, το 1912, από τον Bernstein, πριν δημοσιεύσει ο Jackson το δικό του θεώρημα.

## 4 Το αντίστροφο θεώρημα Bernstein-Zygmund

**Θεώρημα 4.1** (Bernstein). Έστω  $g$  μια συνάρτηση στην κλάση  $\tilde{C}$ . Αν υπάρχουν  $r \in \mathbb{N}$  και  $\alpha \in (0, 1)$ , και σταθερά  $M > 0$  τέτοια ώστε

$$(4.1) \quad \tilde{E}_n(g) \leq M n^{-r-\alpha}, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

τότε η  $g$  είναι  $r$  φορές διαφορίσιμη και  $g^{(r)} \in \text{Lip}(\alpha)$ .

Το παραπάνω θεώρημα, που οφείλεται στον Bernstein, μας λέει ουσιαστικά πως αν η  $g$  δεν είναι  $r$ -φορές διαφορίσιμη με  $g^{(r)} \in \text{Lip}(\alpha)$  για κάποιον  $\alpha \in (0, 1)$ , τότε αναγκαστικά ισχύει πως

$$(4.2) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{r+\alpha} \tilde{E}_n(g) = \infty.$$

Αυτό εξηγεί τον χαρακτηρισμό «αρνητικό» για το θεώρημα του Bernstein. Ο Zygmund αναφέρεται στον τίτλο γιατί απέδειξε το ίδιο αποτέλεσμα στην περίπτωση  $\alpha = 1$ .

Για να καταλάβουμε όμως περισσότερα, ας μελετήσουμε το έργο του Bernstein και του Zygmund ξεχωριστά.

**Λήμμα 4.2** (ανισότητα Bernstein). *Για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο  $t_n \in T_n$  βαθμού το πολύ  $n$  ισχύει*

$$(4.3) \quad \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |t'_n(x)| \leq n \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |t_n(x)|,$$

ή πιο απλά,

$$(4.4) \quad \|t'_n\|_\infty \leq n \|t_n\|_\infty.$$

Απόδειξη. Παραλείπεται. □

**Θεώρημα 4.3** (Bernstein, I). *Έστω  $g$  συνάρτηση στην  $\tilde{C}$ . Αν, για κάποια σταθερά  $M > 0$  και κάποιον  $\alpha \in (0, 1)$ , ισχύει  $\tilde{E}_n(g) \leq Mn^{-\alpha}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , τότε  $g \in \text{Lip}(\alpha)$ .*

Απόδειξη. Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  σταθεροποιούμε ένα  $t_n \in T_n$  (τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού  $\leq n$ ) τέτοιο ώστε  $\|g - t_n\|_\infty \leq M_1 n^{-\alpha}$ . Θέτουμε  $V_n = t_{2^n} - t_{2^{n-1}}$  για  $n \geq 1$ . Τότε  $g = \sum_{n=1}^{\infty} V_n$ . Τελικά, για κάθε  $m$ , με τη βοήθεια του θεωρήματος μέσης τιμής και της ανισότητας Bernstein, παίρνουμε

$$(4.5) \quad \begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} [V_n(x) - V_n(y)] \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{m-1} |V_n(x) - V_n(y)| + \sum_{n=m}^{\infty} |V_n(x)| + \sum_{n=m}^{\infty} |V_n(y)| \\ &\leq \sum_{n=0}^{m-1} |V'_n(\xi_n)| |x - y| + 2 \sum_{n=m}^{\infty} \|V_n\|_\infty \\ &\leq \sum_{n=0}^{m-1} 2^n \|V_n\|_\infty |x - y| + 2 \sum_{n=m}^{\infty} \|V_n\|_\infty \end{aligned}$$

(το  $\xi_n$  επιλέγεται έτσι ώστε  $|V_n(x) - V_n(y)| = |V'_n(\xi_n)| \cdot |x - y|$ , και κατόπιν χρησιμοποιούμε την  $|V'_n(\xi_n)| \leq \|V'_n\|_\infty \leq 2^n \|V_n\|_\infty$ , η οποία ισχύει, από την ανισότητα του Bernstein, αφού

το  $V_n = t_{2^n} - t_{2^{n-1}}$  είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού  $2^n$ ). Για την  $\|V_n\|_\infty$ , όμως, έχουμε το εξής:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \|V_n\|_\infty &= \|(t_{2^n} - g) + (g - t_{2^{n-1}})\|_\infty \\ &\leq \|(t_{2^n} - g)\| + \|(g - t_{2^{n-1}})\|_\infty \\ &\leq M_1(2^n)^{-\alpha} + M_1(2^{n-1})^{-\alpha} \\ &\leq M_2 2^{-n\alpha}. \end{aligned}$$

Τότε, η (4.5) παίρνει την μορφή:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} |g(x) - g(y)| &\leq M_1|x - y| \sum_{n=0}^{m-1} 2^{n(1-\alpha)} + 2M_1 \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n\alpha} \\ &= M_1|x - y| \frac{2^{m(1-\alpha)} - 1}{2^{1-\alpha} - 1} + 2M_1 2^{-m\alpha} \frac{1}{1 - 2^{-\alpha}} \\ &\leq M_2 \left[ |x - y| 2^{m(1-\alpha)} + 2^{-m\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Τώρα ας θέσουμε  $|x - y| = \delta$ . Προκειμένου ο τελευταίος όρος στην ανισότητα (4.7) να φράσσεται από έναν όρο της μορφής  $\lambda\delta^\alpha$ , πρέπει να έχουμε μια ανισότητα της μορφής

$$(4.8) \quad \delta 2^{m(1-\alpha)} + 2^{-m\alpha} \leq M_4 \delta^\alpha.$$

Αλλά αυτό είναι ισοδύναμο με

$$(4.9) \quad (\delta 2^m)^{1-\alpha} + (\delta 2^m)^{-\alpha} \leq M_4,$$

και για αυτό αρκεί το  $\delta 2^m$  να είναι άνω φραγμένο και μακριά από το μηδέν. Για παράδειγμα, αν το  $m$  είναι ο μικρότερος ακέραιος που ικανοποιεί την  $2^m \delta \geq 1$ , τότε  $2^m \delta \leq 2$ . Τελικά παίρνουμε

$$(4.10) \quad |g(x) - g(y)| \leq M_5 \delta^\alpha,$$

άρα  $g \in \text{Lip}(\alpha)$ . □

**Θεώρημα 4.4** (Bernstein, II). Έστω  $g$  συνάρτηση στην  $\tilde{C}$ . Αν ισχύει  $\tilde{E}_n(g) \leq M/n$ , τότε το μέτρο συνέχειας της  $g$  ικανοποιεί την σχέση

$$\omega_g(\delta) \leq \lambda \delta |\log \delta|$$

για μικρό  $\delta$ .

*Απόδειξη.* Οι ανισότητες (4.5) και (4.6) της προηγούμενης απόδειξης ισχύουν ακόμα και για  $\alpha = 1$ . Όμως, στην ανισότητα (4.7) παίρνουμε

$$(4.11) \quad |g(x) - g(y)| \leq M_2|x - y|m + 4M_2 2^{-m} \leq M_3 [m\delta + 2^{-m}]$$

Προκειμένου να φράξουμε αυτήν την ποσότητα από έναν όρο  $\lambda\delta |\log \delta|$  αρκεί να φράξουμε από πάνω το  $\delta 2^m$  και ταυτόχρονα να είναι μακριά από το 0. □

**Θεώρημα 4.5** (Bernstein, III). Έστω  $g$  συνάρτηση στην  $\tilde{C}$ . Αν υπάρχουν  $r \in \mathbb{N}$  και  $\alpha \in (0, 1)$ , και σταθερά  $M > 0$  τέτοια ώστε

$$(4.12) \quad \tilde{E}_n(g) \leq Mn^{-r-\alpha}$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , τότε η  $g$  έχει συνεχείς παραγώγους τάξεως  $1, 2, \dots, r$  και η παράγωγος τάξης  $r$  ανήκει στην κλάση  $\text{Lip}(\alpha)$ .

*Απόδειξη.* Ακολουθώντας την διαδικασία της απόδειξης του πρώτου θεωρήματος, έχουμε  $g = \sum_{n=0}^{\infty} V_n$  και

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \|V_n\|_{\infty} &= \|(t_{2^n} - g) + (g - t_{2^{n-1}})\|_{\infty} \leq \|(t_{2^n} - g)\| + \|(g - t_{2^{n-1}})\| \\ &\leq M_1(2^n)^{-r-\alpha} + M_1(2^{n-1})^{-r-\alpha} \leq M_2 2^{-n(r+\alpha)}. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Bernstein  $r$  φορές, έχουμε

$$(4.14) \quad \|V_n^{(r)}\|_{\infty} \leq (2^n)^r \|V_n\|_{\infty} \leq M_2 2^{-n\alpha}.$$

Τότε η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(r)}$  συγκλίνει ομοιόμορφα. Οπότε, υπάρχει η  $g^{(r)}$ , είναι συνεχής και δίνεται από την  $\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(r)}$ . Προφανώς

$$(4.15) \quad \tilde{E}_{2^n}(g^{(r)}) \leq \left\| g^{(r)} - \sum_{n=0}^m V_n^{(r)} \right\|_{\infty}$$

αφού το  $\sum_{n=0}^m V_n^{(r)}$  είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού  $\leq 2^m$ .

Αλλά

$$(4.16) \quad \left\| g^{(r)} - \sum_{n=0}^m V_n^{(r)} \right\|_{\infty} = \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} V_n^{(r)} \right\|_{\infty} \leq M_3 2^{-m\alpha}.$$

Συνεπώς,  $\tilde{E}_{2^n}(g^{(r)}) \leq M_3(2^m)^{-\alpha}$ . Τώρα για κάθε  $n$  μπορούμε να βρούμε  $m$  τέτοιο ώστε  $2^m \leq n < 2^{m+1}$ . Τότε

$$(4.17) \quad \tilde{E}_{2^n}(g^{(r)}) \leq \tilde{E}_{2^m}(g^{(r)}) \leq M_3(2^m)^{-\alpha} < M_3 \left(\frac{n}{2}\right)^{-\alpha}.$$

Τώρα, εφαρμόζοντας το πρώτο θεώρημα του Bernstein συμπεραίνουμε πως  $g^{(r)} \in \text{Lip}(\alpha)$ .  $\square$

**Θεώρημα 4.6** (Zygmund). Έστω  $g$  συνάρτηση στην  $\tilde{C}$ . Ισχύει πως  $\tilde{E}_n(g) \leq Mn^{-1}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  αν και μόνο αν

$$(4.18) \quad \omega_g^*(\delta) \leq B\delta, \quad (\delta > 0)$$

όπου  $\omega_g^*(\delta)$  είναι ο δείκτης του Zygmund που ορίζεται ως εξής:

$$(4.19) \quad \omega_g^*(\delta) = \sup_x \sup_{|h| \leq \delta} |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|.$$



**Σημείωση 4.7.** Είναι φανερό πως  $\omega_g^*(\delta) \leq 2\omega_g(\delta)$  αλλά για κάποιες συναρτήσεις το  $\omega_g^*(\delta)/\delta$  είναι φραγμένο ενώ το  $\omega_g(\delta)/\delta$  δεν είναι.

*Απόδειξη.* ( $\implies$ ) Υποθέτουμε πως  $\tilde{E}_n(g) \leq Mn^{-1}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Όπως στην απόδειξη του πρώτου θεωρήματος του Bernstein, για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  διαλέγουμε ένα  $t_n \in T_n$  ώστε  $\|t_n - g\|_\infty = \tilde{E}_n(g)$ , και στη συνέχεια θέτουμε  $V_n = t_{2^n} - t_{2^{n-1}}$  για  $n \geq 1$ . Τότε  $g = \sum_{n=1}^{\infty} V_n$ , και για κάθε  $m$  έχουμε

$$(4.20) \quad |g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x+h) - 2V_n(x) + V_n(x-h) \right| \\ \leq \sum_{n=0}^{m-1} |V_n(x+h) - 2V_n(x) + V_n(x-h)| + 4 \sum_{n=m}^{\infty} \|V_n\|_\infty.$$

Προκειμένου να εκτιμήσουμε την ποσότητα  $\|V_n\|_\infty$  γράφουμε

$$(4.21) \quad \|V_n\|_\infty = \|t_{2^n} - t_{2^{n-1}}\|_\infty \leq \|t_{2^n} - g\|_\infty + \|g - t_{2^{n-1}}\|_\infty \\ = \tilde{E}_n(g) + \tilde{E}_{n-1}(g) \leq M2^{-n} + M2^{-n+1} \\ = 3M2^{-n}.$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τους όρους του πρώτου αθροίσματος της (4.20), εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής δύο φορές και μετά την ανισότητα Bernstein, και με την (4.21) παίρνουμε

$$(4.22) \quad |V_n(x+h) - 2V_n(x) + V_n(x-h)| = |[V_n(x+h) - V_n(x)] - [V_n(x) - V_n(x-h)]| \\ = |h| |V_n'(\xi_1) - V_n'(\xi_2)| = |h| |\xi_1 - \xi_2| |V_n''(\xi_3)| \\ \leq 2h^2 \|V_n\| \leq 2h^2 2^{2n} \|V_n\| \\ \leq 6Mh^2 2^n.$$

Επιστρέφοντας πάλι στην (4.20) έχουμε

$$(4.23) \quad |g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)| \leq 6Mh^2 \sum_{n=0}^{m-1} 2^n + 12M \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n} \\ \leq 6Mh^2 2^m + 24M2^{-m}.$$

Για να φράξουμε το τελευταίο από έναν όρο της μορφής  $M_2|h|$ , αρκεί το  $m$  να επιλεγεί σε σχέση με το  $|h|$  ώστε και οι δύο όροι  $2^{-m}|h^{-1}|$  και  $2^m|h|$  να είναι άνω φραγμένοι.

( $\Leftarrow$ ) Τώρα, υποθέτουμε πως  $\omega_g^*(\delta) \leq M_2\delta$  για κάθε  $\delta > 0$ . Θα εφαρμόσουμε την διαδικασία υπολογισμού μέσου όρου: θέτουμε

$$(4.24) \quad \phi(x) \equiv \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} [g(x+t) + g(x-t)] dt,$$

και εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία πάνω στην  $\phi$  για να πάρουμε το δεύτερο μέσο όρο της  $g$ :

$$(4.25) \quad \begin{aligned} \psi(x) &\equiv \frac{1}{2\delta} \int_0^\delta [\phi(x+s) + \phi(x-s)] ds \\ &\equiv \frac{1}{4\delta^2} \int_0^\delta \int_0^\delta [g(x+s+t) + g(x+s-t) + g(x-s+t) + g(x-s-t)] dt ds. \end{aligned}$$

Αφού η  $g$  είναι συνεχής, η  $\psi$  έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο. Πράγματι,

$$(4.26) \quad \phi'(x) = \frac{1}{2\delta} [g(x+\delta) - g(x-\delta)],$$

οπότε

$$(4.27) \quad \psi'(x) = \frac{1}{2\delta} [\phi(x+\delta) - \phi(x-\delta)]$$

και

$$(4.28) \quad \begin{aligned} \psi''(x) &= \frac{1}{2\delta} [\phi'(x+\delta) - \phi'(x-\delta)] \\ &= \frac{1}{4\delta^2} [g(x+2\delta) - 2g(x) + g(x-2\delta)]. \end{aligned}$$

Έπεται πως

$$\|\psi''\| \leq (1/4\delta^2)\omega_g^*(2\delta) \leq M_2/2\delta.$$

Τώρα αρκεί να δείξουμε πως  $\|\psi - g\| \leq M_2\delta$ . Πράγματι,

$$\begin{aligned} \psi(x) - g(x) &= \frac{1}{4\delta^2} \int_0^\delta \int_0^\delta [g(x+s+t) + g(x+s-t) + g(x-s+t) \\ &\quad + g(x-s-t) - 4g(x)] dt ds. \end{aligned}$$

Αφού το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\begin{aligned} [g(x+s+t) - 2g(x+s) + g(x+s-t)] + [g(x-s+t) - 2g(x-s) + g(x-s-t)] \\ + [2g(x+s) - 4g(x) + 2g(x-s)] \end{aligned}$$

όπου το μέτρο του δεν μπορεί να ξεπεράσει το

$$(4.29) \quad \omega_g^*(t) + \omega_g^*(t) + 2\omega_g^*(s) \leq 2M_2(t+s) \leq 4M_2\delta,$$

παίρνουμε  $|\psi(x) - g(x)| \leq M_2\delta$ .

Τώρα για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, έστω  $t \in T_n$  ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ  $n$  που είναι μια καλή προσέγγιση της  $\psi$ . Από το τέταρτο θεώρημα του Jackson (διαβάστε το παρακάτω), έχουμε

$$(4.30) \quad \tilde{E}_n(\psi) \leq \frac{\pi}{2}(n+1)^{-2}\|\psi''\|.$$

Οπότε,

$$(4.31) \quad \tilde{E}_n(g) \leq \|t - g\| \leq \|t - \psi\| + \|\psi - g\| \leq \frac{\pi}{2}(n+1)^{-2} \frac{M_2}{2\delta} + M_2\delta$$

Αν το  $\delta = N^{-1}$ , τότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως

$$(4.32) \quad \tilde{E}_n(g) \leq M_2 n^{-1} \left( \frac{\pi}{4} + 1 \right).$$

□

Διατυπώνουμε το *τέταρτο θεώρημα του Jackson*, χωρίς να το αποδείξουμε, για να κατανοήσουμε καλύτερα τι συνέβη παραπάνω.

**Θεώρημα 4.8** (Jackson, IV). Έστω συνάρτηση  $g \in \tilde{C}$ . Αν η  $g$  έχει συνεχή παράγωγο  $r$ -τάξης, τότε

$$(4.33) \quad \tilde{E}_n(g) \leq \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{n+1} \right)^r \|g^{(r)}\|$$

και ο συντελεστής  $\pi/2$  είναι ο καλύτερος που μπορούμε να πάρουμε ώστε να είναι ανεξάρτητος της συνάρτησης  $g$ , του  $k$  και του  $n$ .

**Σχόλια 4.9.** Αξίζει να σχολιάσουμε εν συντομία τα παραπάνω. Μπορούμε να παρατηρήσουμε πως η ανισότητα Bernstein παίζει τον πιο κρίσιμο ρόλο στην απόδειξη του θεωρήματός του. Η ανισότητα Bernstein μετράει κατά κάποιο τρόπο την ακαμψία των πολυωνύμων. Οπότε μπορούμε να καταλάβουμε γιατί, όπως είπαμε παραπάνω, το πόσο λεία είναι η συνάρτηση επηρεάζει τον ρυθμό με τον οποίο φθίνει η  $\tilde{E}_n(g)$ , δηλαδή όσο πιο λεία είναι η συνάρτηση τόσο καλύτερα προσεγγίζεται από τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

## 4.1 Αλγεβρικά Πολυώνυμα

Συνεχίζουμε την μελέτη μας με τα αλγεβρικά πολυώνυμα. Όταν προσεγγίζουμε (σε ένα διάστημα) μια συνάρτηση από αλγεβρικά πολυώνυμα, τα αποτελέσματα είναι παρόμοια με αυτά για τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα, εκτός από το γεγονός ότι υπάρχουν σημαντικά προβλήματα κοντά στα άκρα του διαστήματος. Αυτό συμβαίνει επειδή για κάθε  $x$  κοντά στα άκρα του διαστήματος υπάρχει  $p \in \Pi_n$  για το οποίο η τάξη της  $|p'(x)|$  μπορεί να γίνει μέχρι και  $n^2 \|p\|_\infty$ . Όταν δεν βρισκόμαστε κοντά στα άκρα, μπορούμε να δώσουμε ένα φράγμα της τάξης του  $n \|p\|_\infty$ .

Εδώ διατυπώνουμε ένα ακόμα θεώρημα (ευθύ και αντίστροφο) που περιλαμβάνει θετικές και αρνητικές πληροφορίες. Πρώτα, όμως, διατυπώνουμε τον εξής ορισμό που θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα. Λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$ , ορισμένη στο  $[-1, 1]$ , είναι αναλυτική σε αυτό το διάστημα αν μπορεί να επεκταθεί σε μια μιγαδική αναλυτική συνάρτηση σε ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει το  $[-1, 1]$ . Στο πλαίσιο που συζητάμε εδώ, τα πιο σημαντικά ανοιχτά

σύνολα είναι τα εσωτερικά ελλείψεων που έχουν εστίες τα σημεία  $\pm 1$  και με ημιάξονες που έχουν άθροισμα  $\lambda$  μεγαλύτερο από ένα. Έστω  $E_\lambda$  μια τέτοια έλλειψη:

$$(4.34) \quad E_\lambda = \left\{ \left( \frac{1}{2} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \cos \theta, \frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \sin \theta \right) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\},$$

και έστω  $D_\lambda$  το εσωτερικό της  $E_\lambda$ .

Το ακόλουθο αποτέλεσμα, επίσης, αποδίδεται στον Bernstein (αξίζει να αναφέρουμε πως υπάρχει στενή σχέση μεταξύ αυτού του αποτελέσματος και του τύπου για την εύρεση της ακτίνας σύγκλισης μιας δυναμοσειράς σε σχέση με τους συντελεστές της).

**Θεώρημα 4.10** (Bernstein). *Η  $f$  έχει μια αναλυτική επέκταση στο  $D_\ell$  και σε κανένα  $D_\lambda$  με  $\lambda > \ell$  αν και μόνο αν*

$$(4.35) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( E_n(f) \right)^{1/n} = \frac{1}{\ell}.$$

Το αρνητικό περιεχόμενο του Θεωρήματος 4.10 είναι ότι η αν η  $f$  δεν είναι αναλυτική στο  $[-1, 1]$  τότε δεν μπορούμε να έχουμε έναν γεωμετρικό ρυθμό σύγκλισης στο μηδέν για το σφάλμα προσέγγισης της  $f$  από αλγεβρικά πολυώνυμα.

## 5 Γραμμικές Μέθοδοι

Η εύρεση της βέλτιστης προσέγγισης, ή απλώς μιας καλής προσέγγισης, είναι γενικά μια δύσκολη και δαπανηρή διαδικασία. Οι καλύτεροι τρόποι προσέγγισης είναι οι μη-γραμμικοί. Οι γραμμικές μέθοδοι, όμως, είναι προτιμότερες και απλούστερες, και έχει αφιερωθεί πολύς χρόνος στη μελέτη τους. Ωστόσο, όπως φαίνεται, οι γραμμικές διαδικασίες συχνά έχουν ουσιαστικούς περιορισμούς.

Δίνουμε ένα παράδειγμα: μια πολύ φυσιολογική μέθοδος είναι να προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε παρεμβολή για να πετύχουμε καλές προσεγγίσεις. Ας υποθέσουμε πως μας δίνουνε έναν τριγωνικό πίνακα με  $n + 1$  στοιχεία από το  $[a, b]$  στη  $n$ -οστή γραμμή του πίνακα, και έστω  $p_n(f) \in \Pi_n$  το (μοναδικό) πολυώνυμο του συνόλου  $\Pi_n$  που παρεμβάλλει την  $f$  του  $C[a, b]$  στα σημεία της  $n$ -οστής γραμμής. Ο Faber έδειξε το 1914 ότι για κάθε τέτοιο πίνακα υπάρχει  $f$  στο  $C[a, b]$  για την οποία

$$(5.1) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|f - p_n(f)\|_\infty > 0.$$

Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύτηκε από τους Kharshiladze-Lozinski:

**Θεώρημα 5.1** (Kharshiladze-Lozinski). *Για κάθε ακολουθία  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  γραμμικών τελεστών, τέτοιων ώστε ο  $L_n$  να απεικονίζει τον  $C[a, b]$  στο  $\Pi_n$  και να ικανοποιεί την  $L_n(p_n) = p_n$  για κάθε  $p_n \in \Pi_n$  (λέμε τότε ότι ο  $L_n$  είναι προδοθή του  $C[a, b]$  στον  $\Pi_n$ ), υπάρχει μια συνάρτηση  $f$  στο  $C[a, b]$  τέτοια ώστε*

$$(5.2) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n(f)\|_\infty > 0.$$

Το Θεώρημα 5.1 δείχνει πως δεν μπορεί να υπάρχει ακολουθία γραμμικών τελεστών  $L_n : C[a, b] \rightarrow \Pi_n$  που να ικανοποιεί την

$$(5.3) \quad \|f - L_n(f)\|_\infty \leq M E_n(f)$$

για κάποια σταθερά  $M > 0$  και για όλες τις  $f \in C[a, b]$  και όλα τα  $n$ . Αν αυτή η ανισότητα ίσχυε, τότε κάθε  $L_n$  θα ήταν προβολή στον  $\Pi_n$  και οι νόρμες  $\|f - L_n(f)\|_\infty$  θα έτειναν στο μηδέν, καθώς το  $n \rightarrow \infty$ , για κάθε  $f \in C[a, b]$ . Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει για την κλάση  $\tilde{C}$  και τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

## 6 $N$ -διάστατοι χώροι

Στην Παράγραφο 2 είδαμε πως για μια συνάρτηση  $g \in \tilde{C}$  ο ρυθμός με τον οποίο φθίνει η  $\tilde{E}_n(g)$  είναι άμεσα συνδεδεμένος με το πόσο λεία είναι η  $g$ . Αλλά δεν μας ενδιαφέρει πόσο λεία είναι η συνάρτηση. Μας ενδιαφέρει να έχουμε αποτελεσματικές μεθόδους προσέγγισης. Υπό αυτήν την έννοια, ενδέχεται τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα να μην είναι καλές κλάσεις προσέγγισης. Ίσως υπάρχουν καλύτερες. Πώς μπορούμε να βρούμε τέτοιες και πώς μπορούμε να συγκρίνουμε την αποτελεσματικότητα των διαφορετικών κλάσεων προσέγγισης; Το 1936 ο Kolmogorov πρότεινε την εξής ιδέα.

Δεδομένου ενός συνόλου συναρτήσεων, αντί να προσεγγίζουμε από κάποιον συγκεκριμένο γραμμικό υπόχωρο (όπως οι  $T_n, \Pi_n$ ), γιατί δεν επιδιώκουμε να βρούμε τον «καλύτερο» υπόχωρο προσέγγισης της ίδιας διάστασης;

Για παράδειγμα, θυμηθείτε πως αν οι  $g$  και  $g^{(r)}$  είναι συναρτήσεις της κλάσης  $\tilde{C}$ , τότε υπάρχει  $M > 0$  τέτοιος ώστε

$$(6.1) \quad \tilde{E}_n(g) \leq M n^{-r} \|g^{(r)}\|_\infty$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , από το θεώρημα του Jackson.

Ορίζουμε

$$(6.2) \quad \tilde{B}_r = \{g : g, g^{(r)} \in \tilde{C}, \|g^{(r)}\|_\infty \leq 1\}.$$

Για κάθε  $g \in \tilde{B}_r$  βλέπουμε, από την (6.1), πως

$$(6.3) \quad \tilde{E}_n(g) \leq M n^{-r}.$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε αυτήν την εκτίμηση ως εξής:

$$(6.4) \quad E(\tilde{B}_r, T_n) := \sup_{g \in \tilde{B}_r} \min_{t \in T_n} \|g - t\|_\infty \leq M n^{-r}.$$

Η ποσότητα  $E(\tilde{B}_r, T_n)$  μετράει την απόσταση του  $T_n$  από το  $\tilde{B}_r$ , υπό την έννοια ότι είναι το supremum του σφάλματος της προσέγγισης των στοιχείων  $g$  του  $\tilde{B}_r$  από τα στοιχεία  $t$  του  $T_n$ .

Η ιδέα του Κολμογορον ήταν να σκεφτούμε πόσο καλά μπορεί κανείς να προσεγγίσει το σύνολο  $\tilde{B}_r$  με την έννοια που συστήνει η (6.4), όχι απαραίτητα από στοιχεία του  $T_n$ , αλλά από οποιονδήποτε γραμμικό υπόχωρο της κλάσης  $\tilde{C}$  του οποίου η διάσταση είναι ίση με την διάσταση του  $T_n$ , δηλαδή  $2n + 1$ . Με άλλα λόγια, όρισε

$$(6.5) \quad d_{2n+1}(\tilde{B}_r) = \inf_{X_{2n+1}} \sup_{g \in \tilde{B}_r} \inf_{h \in X_{2n+1}} \|g - h\|_\infty,$$

όπου το αριστερό infimum είναι πάνω από όλους τους υπόχωρους  $X_{2n+1}$  της  $\tilde{C}$  που έχουν διάσταση το πολύ ίση με  $2n + 1$ . Η ποσότητα αυτή είναι το  $(2n + 1)$ -διάστατο πλάτος του  $\tilde{B}_r$  κατά Κολμογορον. Δείχνει πόσο καλά μπορούμε να προσεγγίσουμε το  $\tilde{B}_r$  από κάποιον  $(2n + 1)$ -διάστατο υπόχωρο της  $\tilde{C}$ .

Γενικά, δοθέντος ενός συνόλου  $A$  σε έναν γραμμικό χώρο με νόρμα  $X$ , το  $n$ -διάστατο πλάτος Κολμογορον  $d_n(A)$  του  $A$  στον  $X$  ορίζεται ως εξής:

$$(6.6) \quad d_n(A) := \inf_{X_n} \sup_{f \in A} \inf_{h \in X_n} \|f - h\|_X,$$

όπου το  $X_n$  τρέχει πάνω από όλους τους  $n$ -διάστατους υπόχωρους του  $X$ . Η ποσότητα  $d_n(A)$  μας λέει τι είναι εφικτό και τι όχι. Από την μια μεριά, είναι μια μέτρηση του βαθμού στον οποίο το  $A$  μπορεί να προσεγγιστεί από  $n$ -διάστατους υπόχωρους του  $X$ . Από την άλλη μεριά, τα  $n$ -διάστατα πλάτη  $d_n(A)$  είναι κάτω φράγματα του πόσο καλά γίνεται να προσεγγίσουμε το  $A$ . Αυτό σημαίνει πως, για κάθε  $\epsilon > 0$  και για κάθε  $n$ -διάστατο υπόχωρο  $X_n$  του  $X$  υπάρχει μια συνάρτηση  $f$  στο  $A$ , που εξαρτάται από τον  $X_n$ , που ικανοποιεί τη

$$(6.7) \quad \inf_{h \in X_n} \|f - h\|_X \geq d_n(A) - \epsilon.$$

Με αυτήν την έννοια, οι εκτιμήσεις για τα  $n$ -διάστατα πλάτη είναι αρνητικά αποτελέσματα. Δεν μπορούμε να πετύχουμε κάτι καλύτερο από  $d_n(A)$  όταν προσεγγίζουμε το  $A$  από  $n$ -διάστατους υπόχωρους.

Καμιά φορά, αν και είναι σπάνιο, μπορούμε να αναγνωρίσουμε έναν υπόχωρο  $X_n$  για τον οποίο

$$(6.8) \quad E(A, X_n) = \sup_{f \in A} \inf_{h \in X_n} \|f - h\|_X = d_n(A).$$

## 7 Επίλογος

Έχουμε, λοιπόν, περιγράψει αποτελέσματα που οριοθετούν την αποτελεσματικότητα των μεθόδων προσέγγισης. Αντίστροφα θεωρήματα, που εξαρτώνται από τους υπόχωρους από τους

οποίους προσεγγίζουμε, που καθορίζουν ορισμένες ιδιότητες ή χαρακτηριστικά των συναρτήσεων που προσεγγίζουμε σε ότι αφορά τον βαθμό στον οποίο το σφάλμα της καλύτερης προσέγγισης τείνει στο μηδέν. Κατ' αντιστοιχία, για συναρτήσεις χωρίς αυτές τις ιδιότητες, τα αντίστροφα θεωρήματα μας δίνουν κάτω φράγματα του ρυθμού προσέγγισης.

Είδαμε ότι οι γραμμικές διαδικασίες συχνά παρουσιάζουν κάποιους εγγενείς περιορισμούς του βαθμού προσέγγισης ανεξάρτητα από την συνάρτηση που προσεγγίζεται.

Είδαμε επίσης ότι μέσω της έννοιας του  $n$ -διάστατου πλάτους αποκτούμε κάτω φράγματα για το πόσο καλά γίνεται να προσεγγίσουμε κλάσεις συναρτήσεων από  $n$ -διάστατους υπόχωρους (ανεξάρτητα από την επιλογή των υπόχωρων που προσεγγίζουμε).

Αλλά υπάρχουν πολλά ακόμα αποτελέσματα αυτού του κλάδου της ανάλυσης που μπορεί κανείς να μελετήσει. Απλά τα αρνητικά αποτελέσματα, όπως τα είδαμε παραπάνω, μας εφοδιάζουν με σημαντικές πληροφορίες ώστε να μπορέσουμε να κατανοήσουμε καλύτερα τι δεν είναι εφικτό, ώστε να δοκιμάσουμε κάποιον διαφορετικό τρόπο για να πετύχουμε, αν όχι το καλύτερο αποτέλεσμα, ένα τουλάχιστον πολύ καλό - ικανοποιητικό αποτέλεσμα. Αξίζει να σημειώσουμε, για χάρη της επιστήμης μας, πως τα μαθηματικά είναι από τις λίγες επιστήμες στις οποίες μπορεί κανείς να συναντήσει την παραπάνω «ιδιοτροπία», ότι δηλαδή, ο μαθηματικός χρησιμοποιεί την γνώση με τέτοιο τρόπο που τα αρνητικά αποτελέσματα να έχουν εν τέλει θετική απόχρωση.

## 8 Βιβλιογραφία - Παραπομπές

Τέλος παραθέτω τις διάφορες πηγές και βιβλία που χρησιμοποίησα σε αυτήν την εργασία, είτε για διάφορες αποδείξεις - ορισμούς, είτε για να κατανοήσω καλύτερα τις διάφορες έννοιες και τις τεχνικές αυτού του κλάδου των μαθηματικών.

- (i) Το άρθρο *Negative Theorems in Approximation Theory*, του Allan Pinkus.
- (ii) Το βιβλίο *Introduction to Approximation Theory*, του Elliot W. Cheney.
- (iii) Το βιβλίο *A Short Course on Approximation Theory*, του N. L. Carothers.
- (iv) Τις σημειώσεις «*Θεωρία Προσέγγισης και Εφαρμογές*», του Μιχάλη Κολουτζάκη.
- (v) Το βιβλίο *Constructive Approximation*, των Ronald A. DeVore και George G. Lorentz.