Αριθμοί Liouville

Ιωάννης Μπαρμπαγιάννης

1 Εισαγωγή

Η θεωρία των υπερβατικών αριθμών έχει ως αφετηρία μια φημισμένη εργασία του Liouville, το 1844, ο οποίος περιέγραψε μια κλάση πραγματικών αριθμών οι οποίοι δεν επαληθεύουν καμία πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές (οι πραγματικοί αριθμοί που είναι ρίζες πολυώνύμων με ακεραίους συντελεστές λέγονται *αλγεβρικοί αριθμοί*). Κάποια μεμονωμένα προβλήματα, σχετικά με αυτό το θέμα, είχαν διατυπωθεί πολύ νωρίτερα, και η μελέτη των άρρητων αριθμών απασχολούσε πολλούς μαθηματικούς επί έναν αιώνα νωρίτερα. Ήδη το 1744, ο Euler είχε αποδείξει ότι ο e είναι άρρητος, και το 1761 ο Lambert απέδειξε ότι ο π είναι άρρητος. Την ίδια περίοδο, η μελέτη των συνεχών κλασμάτων είχε οδηγήσει σε αρκετά συμπεράσματα σχετικά με την προσέγγιση των άρρητων αριθμών από ρητούς. Ήταν, για παράδειγμα, γνωστό ότι για κάθε άρρητο αριθμό α υπάρχει μια άπειρη ακολουθία ρητών αριθμών p/q (με $q>0$) που ικανοποιούν την $|\alpha - p/q| < 1/q^2$. Ήταν επίσης γνωστό ότι το συνεχές κλάσμα ενός τετραγωνικού άρρητου αριθμού α είναι τελικά περιοδικό, άρα υπάρχει μια θετική σταθερά $c(\alpha)$ τέτοια ώστε $|\alpha - p/q| > c(\alpha)/q^2$ για κάθε ρητό αριθμό p/q (με $q>0$). Περιγράφουμε κάποια από αυτά τα αποτελέσματα στις Παραγράφους 2 και 3.

Ο Liouville παρατήρησε ότι ένα αποτέλεσμα αυτού του είδους ισχύει γενικότερα, και ότι στην πραγματικότητα υπάρχει κάποιο όριο στον βαθμό ακρίβειας με τον οποίο ένας άρρητος αλγεβρικός αριθμός μπορεί να προσεγγιστεί από ρητούς αριθμούς. Αυτή η παρατήρηση του έδωσε ένα πρακτικό κριτήριο με βάση το οποίο θα μπορούσε να κατασκευάσει υπερβατικούς αριθμούς:

> *Για κάθε αλγεβρικό αριθμό α βαθμού $n>1$, υπάρχει σταθερά $c(\alpha)>0$ τέτοια ώστε $|\alpha - p/q| > c(\alpha)/q^n$ για κάθε ρητό αριθμό p/q με $q>0$.*

Ξεκινώντας από αυτήν την παρατήρηση, ο Liouville απέδειξε ότι ο αριθμός

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

είναι υπερβατικός αριθμός. Στην πραγματικότητα, μπορεί κανείς χρησιμοποιώντας την ίδια ιδέα να αποδείξει την υπερβατικότητας πολλών άλλων αριθμών: κάθε αριθμός που το δεκαδικό του ανάπτυγμα περιέχει οσοδήποτε μεγάλες ακολουθίες διαδοχικών μηδενικών ψηφίων είναι υπερβατικός, επίσης κάθε συνεχές κλάσμα του οποίου τα μερικά πηλίκα αυξάνουν πολύ γρήγορα είναι υπερβατικός. Οι αριθμοί αυτού του είδους, δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί ξ για τους οποίους υπάρχει μια άπειρη ακολουθία ρητών προσεγγίσεων p_n/q_n τέτοιων ώστε $|\xi - p_n/q_n| < 1/q_n^{\omega_n}$ με $\limsup \omega_n = \infty$, ονομάστηκαν *αριθμοί Liouville*, και είναι όλοι υπερβατικοί. Περιγράφουμε αυτά τα αποτελέσματα στις Παραγράφους 4 και 5, όπου δείχνουμε επίσης ότι το σύνολο των αριθμών Liouville έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue.

Από την άλλη πλευρά, ένας έμμεσος τρόπος απόδειξης της ύπαρξης υπερβατικών αριθμών είναι μέσω της έννοιας της αριθμησιμότητας, η οποία εισήχθη από τον Cantor το 1874. Μπορεί κανείς να αποδείξει ότι το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο, άρα «σχεδόν όλοι» οι πραγματικοί αριθμοί είναι υπερβατικοί. Στην Παράγραφο 5 δίνουμε ένα παράδειγμα υπερβατικού αριθμού ο οποίος δεν είναι αριθμός Liouville.

Τέλος, στην Παράγραφο 6 δίνουμε μια σύντομη περιγραφή της απόδειξης της υπερβατικότητας των αριθμών e και π.

2 Ρητές προσεγγίσεις

Θεώρημα 2.1 (Dirichlet)**.** *Αν ξ είναι ένας πραγματικός και άρρητος αριθμός, τότε υπάρχουν άπειροι το πλήθος ρητοί αριθμοί p/q τέτοιοι ώστε*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}. \tag{2.1}$$

Απόδειξη. Έστω $Q \geqslant 1$. Για κάθε πραγματικό αριθμό $a \in \mathbb{R}$, συμβολίζουμε με $[a]$ τον μεγαλύτερο ακέραιο που δεν ξεπερνάει τον a, και τον ονομάζουμε *ακέραιο μέρος* του a, και θέτουμε $\{a\} = a - [a]$, το *κλασματικό μέρος* του a. Θεωρούμε τα κλασματικά μέρη $\{0\xi\}, \{\xi\}, \{2\xi\}, \{3\xi\}, \dots, \{Q\xi\}$ και τα διαστήματα $[i/Q, (i+1)/Q]$, $0 \leqslant i \leqslant Q?1$. Υπάρχουν $Q+1$ κλασματικά μέρη που διανέμονται μεταξύ των Q διαστημάτων. Συνεπώς, πρέπει να υπάρχει κάποιο διάστημα που περιέχει τουλάχιστον δύο από τα κλασματικά μέρη, δηλαδή τα $\{a\xi\}$ και $\{b\xi\}$, $0 \leqslant a < b \leqslant Q$, βρίσκονται στο $[j/Q, (j+1)/Q]$ για κάποιο j. Το γεγονός ότι βρίσκονται στο ίδιο διάστημα σημαίνει ότι $|\{b\xi\} - \{a\xi\}| \leqslant 1/Q$. Γράφουμε $a\xi = m + \{a\xi\}$ και $b\xi = n + \{b\xi\}$ για κατάλληλους ακεραίους m και n. Τότε,

$$\{b\xi\} - \{a\xi\} = (b\xi - n) - (a\xi - m) = (b-a)\xi - (n-m).$$

Γράφοντας $q = b - a$ (οπότε $0 \leqslant q \leqslant Q$) και $p = n - m$ βλέπουμε ότι

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qQ}$$

για κάποιο $0 \leqslant q \leqslant Q$. Δεδομένου ότι αυτό ισχύει για όλα τα Q έχουμε άπειρες λύσεις της (2.1) (παρατηρήστε ότι $\frac{1}{qQ} \leqslant \frac{1}{q^2}$ όταν $q \leqslant Q$). □

Το επόμενο θεώρημα του Hurwitz βελτιώνει το θεώρημα του Dirichlet.

Θεώρημα 2.2 (Hurwitz)**.** *Αν ξ είναι ένας πραγματικός και άρρητος αριθμός, τότε υπάρχουν άπειροι το πλήθος ρητοί αριθμοί p/q τέτοιοι ώστε*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.2 χρησιμοποιεί την θεωρία των συνεχών κλασμάτων. Η σταθερά $\sqrt{5}$ είναι η καλύτερη δυνατή, με την έννοια ότι το αποτέλεσμα δεν ισχύει, αν αντικαταστήσουμε την $\sqrt{5}$ από έναν μεγαλύτερο αριθμό. Δηλαδή, αν $c > \sqrt{5}$ τότε υπάρχουν άρρητοι ξ για τους οποίους υπάρχουν μόνο πεπερασμένοι το πλήθος ρητοί p/q που ικανοποιούν την σχέση $|\xi - p/q| < \frac{1}{cq^2}$. Ειδικότερα, ο $\xi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ είναι μια τέτοια εξαίρεση. Ωστόσο, μπορεί κανείς να αποδείξει ότι ο αριθμός των εξαιρέσεων είναι σχετικά μικρός.

Θεώρημα 2.3. *Αν η $f(q)/q$ είναι αύξουσα συνάρτηση του q και η σειρά*

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{f(q)}$$

είναι αποκλίνουσα, τότε για όλα σχεδόν τα ξ μπορούμε να βρούμε μια άπειρη ακολουθία ρητών p/q, $q > 0$ έτσι ώστε

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qf(q)}.$$

Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει επίσης ότι τάξεις προσέγγισης όπως οι

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2 \log q} \quad \text{και} \quad < \frac{1}{q^2 \log q \log\log q}$$

είναι εφικτές, για σχεδόν όλα τα ξ. Δεν θα δώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3, στην επόμενη όμως παράγραφο αποδεικνύουμε ένα μερικό αντίστροφό του.

3 Λήμμα Borel-Cantelli

Παρατήρηση 3.1. Έστω $(A_i), i \geqslant 1$ μια ακολουθία συνόλων. Ένα στοιχείο x θα ανήκει σε πεπερασμένα από τα A_i, αν και μόνο αν υπάρχει $N \geqslant 1$ ώστε: για κάθε $n \geqslant N$ το x δεν ανήκει στο A_n.

Έτσι, το στοιχείο x θα ανήκει σε άπειρα από τα A_i αν και μόνο αν για κάθε $N \geqslant 1$ υπάρχει $n \geqslant N$ ώστε το x να ανήκει στο A_n, δηλαδή αν και μόνο αν

$$x \in \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k.$$

Θεώρημα 3.2 (λήμμα Borel-Cantelli)**.** *Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αν $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ και $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \infty$, τότε*

$$\mu(\{x : \text{ το } x \text{ ανήκει σε άπειρα από τα } A_i\}) = 0.$$

Απόδειξη. Από την παρατήρηση αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$\mu\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k\right) = 0.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση ότι η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ συγκλίνει έχουμε ότι υπάρχει $M \geqslant 1$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{i=M}^{\infty} \mu(A_i) < \varepsilon.$$

Για αυτό το M έχουμε επίσης

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k=M}^{\infty} A_k.$$

Άρα, χρησιμοποιώντας διαδοχικά τη μονοτονία και την υποπροσθετικότητα του μ, έχουμε

$$\mu\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}A_k\right)\leqslant\mu\left(\bigcup_{k=M}^{\infty}A_k\right)\leqslant\sum_{i=M}^{\infty}\mu(A_i)<\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, έχουμε το ζητούμενο. □

Το λήμμα Borel-Cantelli έχει πολλές εφαρμογές στην Θεωρία Πιθανοτήτων, αλλά εδώ δίνουμε μία εφαρμογή στην Θεωρία Αριθμών, σχετικά με τις προσεγγίσεις από ρητούς αριθμούς.

Θεώρημα 3.3. *Έστω $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Ορίζουμε $D\subseteq[0,1]$ ως εξής: $\alpha\in D$ αν και μόνο αν υπάρχουν άπειροι p/q, $p,q\in\mathbb{Z}$, $q>0$ τέτοιοι ώστε*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{qf(q)}.$$

Τότε, αν

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{f(q)}<\infty$$

έχουμε ότι το μέτρο Lebesgue του D είναι μηδέν.

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$A_q=\bigcup_{0\leqslant p\leqslant q}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{qf(q)},\frac{p}{q}+\frac{1}{qf(q)}\right).$$

Τότε, $\alpha\in D$ αν και μόνο αν $\alpha\in A_q\cap[0,1]$ για άπειρα q, έτσι αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mu\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}(A_k\cap[0,1])\right)=0.$$

Ακόμα,

$$\mu(A_q\cap[0,1])\leqslant\mu(A_q)\leqslant 2\sum_{p=0}^{q}\frac{1}{qf(q)}\leqslant\frac{2(q+1)}{qf(q)}\leqslant\frac{4}{f(q)}.$$

Άρα,

$$\sum_{q=1}^{\infty}\mu(A_q\cap[0,1])\leqslant\sum_{q=1}^{\infty}\frac{4}{f(q)}<\infty.$$

Έτσι, τα $A_q\cap[0,1]$ ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.2 και άρα

$$\mu\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}(A_k\cap[0,1])\right)=0,$$

δηλαδή $\mu(D)=0$. □

Σημείωση 3.4. Αυτό το θεώρημα δείχνει ότι το αποτέλεσμα του Dirichlet δεν μπορεί να πάρει την ισχυρότερη μορφή

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2(\log q)^2},$$

για παράδειγμα, για πολλά ξ.

Είναι προφανές ότι αυτό το αποτέλεσμα είναι το αντίστροφο του Θεωρήματος 2.3 όπου χρειάζεται επίσης η $f(q)/q$ να είναι αύξουσα συνάρτηση του q. Για μια τέτοια f, βλέπουμε ότι υπάρχουν δύο περιπτώσεις για τη σειρά

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{f(q)},$$

είτε θα αποκλίνει όπως στο Θεώρημα 2.3, και η ιδιότητα ισχύει για όλους σχεδόν τους αριθμούς, είτε θα συγκλίνει όπως στο Θεώρημα 3.3, και η ιδιότητα δεν ισχύει σχεδόν για κανένα αριθμό. Λέμε ότι η ιδιότητα ικανοποιεί τον $0-1$ νόμο.

Όπως παρατηρήσαμε πιο πάνω, αυτό αποδεικνύει ότι το αποτέλεσμα του Dirichlet για ρητές προσεγγίσεις δεν μπορεί να βελτιωθεί ουσιαστικά για όλα τα ξ. Ωστόσο, υπάρχουν αριθμοί ξ που έχουν εξαιρετικά καλές προσεγγίσεις.

4 Αριθμοί Liouville

Θεώρημα 4.1. *Για κάθε αλγεβρικό αριθμό α βαθμού $n > 1$, υπάρχει $M = M(\alpha) > 1$ τέτοιος ώστε*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Mq^n}$$

για όλους τους ακεραίους p, q με $q > 0$.

Απόδειξη. Αν υπάρχει p/q τέτοιος ώστε

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > 1$$

τότε το αποτέλεσμα ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο, οπότε υποθέτουμε ότι για κάθε ρητό p/q ικανοποιείται η $|\alpha q - p| \leqslant q$.

Υποθέτουμε ότι ο α είναι μια ρίζα του

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

όπου $a_i \in \mathbb{Z}$. Δεδομένου οποιουδήποτε p/q, πρέπει να έχουμε $f(p/q) \neq 0$ γιατί αλλιώς (δηλαδή, αν το p/q είναι ρίζα του f) θα μπορούσαμε να γράψουμε το f στη μορφή $f(x) = (xq - p)g(x)$ για κάποιο πολυώνυμο g με ακέραιους συντελεστές, αλλά με $\deg(g) = n - 1$. Επίσης, δεδομένου ότι α είναι αλγεβρικός βαθμού αυστηρά μεγαλύτερου από 1, θα είχαμε ότι $g(\alpha) = 0$ οπότε το α θα ήταν αλγεβρικός αριθμός βαθμού $\leqslant n - 1$. Το οποίο είναι άτοπο.

Έτσι,

$$0 \neq f(p/q) = \frac{a_0 q^n a a_1 p q^{n-1} + a_2 p^2 q^{n-2} + \cdots + a_n p^n}{q^n}.$$

Κατά συνέπεια, ο $a_0q^n aa_1pq^{n-1} + a_2p^2q^{n-2} + \cdots + a_np^n$ είναι ακέραιος δεδομένου ότι $p, q, a_i \in \mathbb{Z}$ και δεν είναι ίσος με 0. Άρα, θα πρέπει να έχουμε

$$|a_0q^n + a_1pq^{n-1} + a_2p^2q^{n-2} + \cdots + a_np^n| \geqslant 1$$

και έπεται ότι

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqslant \frac{1}{q^n}.$$

Για έναν πραγματικό αριθμό x κοντά στο α μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για να πάρουμε

$$|f(x)| = |f(x) - f(\alpha)| = |f'(\zeta)|\,|x - \alpha|$$

για κάποιο ζ τέτοιο ώστε $|\zeta - \alpha| \leqslant |\alpha - x|$. Επιλέγουμε $x = p/q$ το οποίο από την παραπάνω υπόθεση ικανοποιεί την $|p/q - \alpha| \leqslant 1$, και έτσι για το ζ έχουμε ότι $|\zeta - \alpha| \leqslant |p/q - \alpha| \leqslant 1$. Θέτουμε

$$M = \sup\{1, |f'(\zeta)| : |\zeta - \alpha| \leqslant 1\}.$$

Τότε, συνδυάζοντας τις τρεις προηγούμενες σχέσεις έχουμε

$$\frac{1}{q^n} \leqslant \left| f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = |f'(\zeta)| \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \leqslant M \left|\frac{p}{q} - \alpha\right|,$$

το οποίο είναι και το ζητούμενο. □

Παράδειγμα 4.2. Μπορούμε να ακολουθήσουμε την μέθοδο της απόδειξης του παραπάνω θεωρήματος όταν $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Τότε $f(x) = x^2 - x - 1$ και $f'(x) = 2x - 1$. Καθώς παίρνουμε όλο και καλύτερες προσεγγίσεις p/q του α, το ζ, το οποίο βρίσκεται μεταξύ των α και p/q πρέπει να προσεγγίζει όλο και καλύτερα τον α, δηλαδή, η $|f'(\zeta)|$ πρέπει να προσεγγίζει όλο και καλύτερα την $|f'(\alpha)| = \sqrt{5}$. Έτσι, δεν μπορούμε να πάρουμε M μεγαλύτερο από $\sqrt{5}$, και αυτό επιβεβαιώνοντας το γεγονός ότι η σταθερά του θεωρήματος του Hurwitz είναι βέλτιστη.

Το θεώρημα του Liouville έχει βελτιωθεί: για οποιονδήποτε αλγεβρικό αριθμό α (οποιουδήποτε βαθμού) και για κάθε $\kappa > 2$ υπάρχει μια σταθερά $c = c(\alpha, \kappa)$ τέτοια ώστε

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^\kappa}$$

για όλους τους ρητούς p/q. Από το θεώρημα του Dirichlet φαίνεται ότι αυτό είναι το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα, αφού δεν μπορούμε να πάρουμε $\kappa \leqslant 2$. Παραδόξως, δεν υπάρχουν γνωστοί τύποι ή μέθοδος υπολογισμού της σταθεράς $c(\alpha, \kappa)$ εν γένει. Υπάρχουν μόνο για συγκεκριμένους α και συγκεκριμένες τιμές του κ. Για παράδειγμα, $c(\sqrt[3]{2}, 2.955) \geqslant 10^{-6}$, δηλαδή,

$$\left|\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{10^{-6}}{q^{2.955}}$$

για όλους τους ρητούς p/q.

Ορισμός 4.3. Ένας πραγματικός αριθμός α λέγεται *αριθμός Liouville* αν ο α είναι άρρητος και για κάθε $n \geqslant 1$ υπάρχουν ακέραιοι p, q με $q > 0$ τέτοιοι ώστε

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

Παράδειγμα 4.4. Ο

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$$

είναι αριθμός Liouville.

Απόδειξη. Έστω α_N το άθροισμα των N πρώτων όρων της σειράς. Τότε,

$$\begin{aligned}\alpha_N &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{N!}} \\ &= \frac{10^{N!-1} + 10^{N!-2} + \cdots + 10^N + 1}{10^{N!}} \\ &= \frac{10n_1}{10^{N!}} = \frac{p}{10^{N!}},\end{aligned}$$

για κάποιον ακέραιο p, ο οποίος είναι της μορφής $10n+1$, άρα είναι σχετικά πρώτος προς τον $10^{N!}$. Τότε,

$$\begin{aligned}\left|\alpha - \frac{p}{10^{N!}}\right| &= \frac{1}{10^{(N+1)!}} + \frac{1}{10^{(N+2)!}} + \frac{1}{10^{(N+3)!}} + \cdots \\ &< \frac{2}{10^{(N+1)!}} < \frac{1}{(10^{N!})^N}.\end{aligned}$$

Έτσι, για κάθε N μπορούμε να βρούμε μια πολύ καλή προσέγγιση του α από ρητούς, και έτσι ο α είναι αριθμός Liouville. □

Θεώρημα 4.5. *Κάθε αριθμός Liouville είναι υπερβατικός.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει, δηλαδή υπάρχει ένας αριθμός Liouville α ο οποίος είναι αλγεβρικός βαθμού n, για κάποιο n. Παρατηρήστε ότι $n > 1$ αφού ο α είναι άρρητος. Τότε, από το Θεώρημα 4.1 έπεται ότι υπάρχει $M \geqslant 1$ τέτοιος ώστε

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Mq^n}$$

για όλους τους ακέραιους $p, q > 0$. Επιλέγουμε έναν ακέραιο $k \geqslant n$ τέτοιον ώστε $q^k > q^n M$. Τότε, αφού ο α είναι αριθμός Liouville, μπορούμε να βρούμε ακέραιους $p, q > 0$ τέτοιους ώστε

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^k} < \frac{1}{Mq^n}$$

λόγω της επιλογής του k. Το οποίο είναι άτοπο. Άρα κάθε αριθμός Liouville είναι υπερβατικός. □

Έστω E το σύνολο όλων των αριθμών Liouville.

Θεώρημα 4.6. *Το σύνολο E έχει μέτρο Lebesgue μηδέν στο* $[0, 1]$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό έχουμε $\alpha \in E$ αν και μόνο αν $\alpha \in \mathbb{Q}^c$ και για κάθε $k \geqslant 1$ υπάρχουν ακέραιοι $p, q > 0$ τέτοιοι ώστε

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^k}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} E &= \mathbb{Q}^c \cap \left[\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} \bigcup_{q=2}^{\infty} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^k}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^k}\right)\right] \\ &= \mathbb{Q}^c \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k, \end{aligned}$$

όπου $G_k = \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} \bigcup_{q=2}^{\infty} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^k}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^k}\right)$. Παρατηρούμε ότι

$$G_k \cap [0,1] \subseteq \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=0}^{q} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^k}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^k}\right).$$

Έστω μ το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$. Τότε

$$\begin{aligned} \mu(G_k \cap [0,1]) &\leqslant \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=0}^{q} \mu\left(\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^k}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^k}\right)\right) \\ &= \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=0}^{q} \frac{2}{q^k} \\ &= \sum_{q=2}^{\infty} \frac{2(q+1)}{q^k} \\ &\leqslant 4 \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^{k-1}}. \end{aligned}$$

Για να φράξουμε αυτό το άθροισμα παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{q^{k-1}} < \int_{q-1}^{q} \frac{dt}{t^{k-1}}$$

επειδή $t^{k-1} \leqslant q^{k-1}$ για $t \in [q-1, q]$. Έτσι,

$$\sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^{k-1}} < \int_{1}^{\infty} \frac{dt}{t^{k-1}} = \frac{1}{k-2}.$$

Άρα, $\mu(G_k \cap [0,1]) \leqslant 4/(k-2)$. Αλλά $E \cap [0,1] \subseteq G_k \cap [0,1]$ για κάθε k, άρα

$$\mu(E \cap [0,1]) \leqslant \frac{4}{k-2}$$

για κάθε $k \geqslant 2$. Συνεπώς, $\mu(E \cap [0,1]) = 0$. $\square$

5 Η αρχή της θεωρίας των υπερβατικών αριθμών

Θεώρημα 5.1. *Υπάρχουν υπερβατικοί αριθμοί.*

Η πρώτη απόδειξη ύπαρξης υπερβατικών αριθμών δόθηκε από τον Liouville. Πριν δώσουμε την απόδειξή του, θα δούμε την απόδειξη του Cantor.

Η απόδειξη του Cantor: Η ιδέα αυτής της απόδειξης είναι ότι οι πραγματικοί αλγεβρικοί αριθμοί είναι αριθμήσιμοι, ενώ το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο, οπότε θα πρέπει να υπάρχουν πραγματικοί υπερβατικοί αριθμοί. Ορίζουμε

$$P(n) = \left\{ f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{Z}[x] : 1 \leqslant \sum_{j=0}^{n} |a_j| \leqslant n \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι τα $P(n)$ είναι πεπερασμένα σύνολα. Επίσης, κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο στο $\mathbb{Z}[x]$ ανήκει σε κάποιο από τα $P(n)$. Θεωρώντας τις ρίζες των πολυωνύμων των $P(1), P(2), \ldots$ (στο k-οστό στάδιο συλλέγουμε τις πραγματικές ρίζες των πολυωνύμων του $P(k)$ που δεν είναι ρίζες πολυωνύμων του $P(j)$ για $j < k$) έχουμε ότι το σύνολο των ριζών (και κατ' επέκταση των αλγεβρικών αριθμών) είναι αριθμήσιμο. □

Η απόδειξη του Liouville δόθηκε στο Θεώρημα 4.5 που ισχυρίζεται ότι κάθε αριθμός Liouville είναι υπερβατικός. Βέβαια, χρειάζεται να αποδειχθεί και η ύπαρξη αριθμών Liouville η οποία έπεται από το Παράδειγμα 4.4.

Παράδειγμα 5.2. Θα δείξουμε ότι ο

$$\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j!}}$$

είναι αριθμός Liouville.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι το δυαδικό ανάπτυγμα του α περιέχει οσοδήποτε μεγάλες ακολουθίες διαδοχικών μηδενικών ψηφίων, άρα ο α δεν μπορεί να είναι ρητός. Σταθεροποιούμε έναν θετικό ακέραιο n και θεωρούμε τον

$$\frac{p}{q} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^{j!}},$$

με $p, q \in \mathbb{Z}$ και $q = 2^{n!} > 1$. Τότε,

$$0 < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j!}} < \sum_{j=(n+1)!}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{(n+1)!-1}} \leqslant \frac{1}{2^{n(n!)}} = \frac{1}{q^n}.$$

Άρα, ο α είναι αριθμός Liouville. Έπεται μάλιστα από τα παραπάνω ότι είναι υπερβατικός.

Παρατήρηση 5.3. Υπάρχει και πιο ισχυρή έκδοση του Θεωρήματος 4.1:

Θεώρημα 5.4 (Thue-Siegel-Roth). *Έστω α αλγεβρικός και άρρητος. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχουν το πολύ πεπερασμένα το πλήθος ζεύγη ακεραίων (p, q) με $q > 0$ τέτοια ώστε*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}.$$

Δεν είναι γνωστό αν στην παραπάνω ανισότητα μπορούμε να αντικαταστήσουμε το δεξί της μέλος με το A/q^2 όπου $A = A(\alpha)$ μία θετική σταθερά που εξαρτάται μόνο από το α.

Με αφορμή το Παράδειγμα 5.2 ας υποθέσουμε ότι μας δίνουν μια ακολουθία θετικών ακεραίων $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ με $a_1 < a_2 < \ldots$. Η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{a_k}}$ είναι υπερβατικός αριθμός αν η ακολουθία $\{a_k\}$ αυξάνει αρκετά γρήγορα, δηλαδή

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \infty.$$

Από την άλλη πλευρά, κάποιες ακολουθίες που αυξάνουν πολύ πιο αργά ενδέχεται να οδηγούν κι αυτές σε υπερβατικούς αριθμούς, μια παρατήρηση που έκανε πρώτος ο Erdos. Το επόμενο θεώρημα επιβεβαιώνει ότι η παρατήρηση του Erdos ισχύει. Και ο παρακάτω αριθμός δεν είναι αριθμός Liouville.

Θεώρημα 5.5. *Ο αριθμός* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k}}$ *είναι υπερβατικός.*

Για να αποδείξουμε το θεώρημα, για θετικούς ακεραίους k και m, ορίζουμε $c(k,m)$ να είναι το πλήθος των m-άδων $(j_1, j_2, \ldots, j_m)$ μη αρνητικών ακεραίων για τους οποίους

$$k = 2^{j_1} + 2^{j_2} + \cdots + 2^{j_m}.$$

Λήμμα 5.6. $c(k,m) \leqslant m^{2m}$.

Απόδειξη. Κάνουμε επαγωγή στο m. Για $m = 1$ έχουμε $c(k,m) \in \{0,1\}$ για κάθε k, άρα το συμπέρασμα ισχύει.

Υποθέτουμε ότι $m > 1$. Αν ο k έχει περισσότερα από m μη μηδενικά δυαδικά ψηφία, τότε έπεται ότι $c(k,m) = 0$. Αν ο k έχει ακριβώς m μη μηδενικά δυαδικά ψηφία, τότε $c(k,m) = m! \leqslant m^m \leqslant m^{2m}$ (j_1 αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε από τα m μη μηδενικά ψηφία, j_2 αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα $m-1$ μη μηδενικά ψηφία, και ούτω καθεξής). Αν ο k έχει λιγότερα από m μη μηδενικά δυαδικά ψηφία, τότε για κάποιους ακεραίους r και s με $1 \leqslant r < s \leqslant m$, έχουμε $j_r = j_s$. Στην περίπτωση αυτή, $2^{j_r} + 2^{j_s} = 2^{j_r+1}$, και συμπεραίνουμε ότι

$$c(k,m) \leqslant \binom{m}{2} c(k,m-1) \leqslant m^2(m-1)^{2m-2} \leqslant m^{2m},$$

συνεπώς η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

;

Λήμμα 5.7. *Έστω t και m θετικοί ακέραιοι. Τότε, $c(k,m) = 0$ για κάθε ακέραιο $k \in (2^{t+1} + 2^{t+2} + \cdots + 2^{t+m}, 2^{t+m+1})$.*

Απόδειξη. Αυτό προκύπτει από την απόδειξη του Λήμματος 5.6 αφού ο k έχει $> m$ μη μηδενικά δυαδικά ψηφία. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.5. Έστω $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k}}$. Έστω m θετικός ακέραιος. Τότε από τον ορισμό του $c(k,m)$ έπεται ότι

$$\alpha^m = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k}}\right)^m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c(k,m)}{2^k}.$$

Έστω t θετικός ακέραιος. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.7 και στη συνέχεια το Λήμμα 5.6, έχουμε

$$\begin{aligned}\left\{2^{2^{t_1}+\cdots+2^{t+m}}\alpha^m\right\} &\leqslant 2^{2^{t+1}+\cdots+2^{t+m}} \sum_{k=2^{t+1}+\cdots+2^{t+m}+1}^{\infty} \frac{c(k,m)}{2^k} \\ &\leqslant 2^{2^{t+1}+\cdots+2^{t+m}} \sum_{k=2^{t+m+1}}^{\infty} \frac{c(k,m)}{2^k} \\ &\leqslant 2^{2^{t+1}+\cdots+2^{t+m}} m^{2m} \sum_{k=2^{t+m+1}}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &\leqslant 2^{2^{t+1}+\cdots+2^{t+m}} m^{2m} 2^{-2^{t+m+1}+1} = 2^{1-2^{t+1}} m^{2m}.\end{aligned}$$

Αν σταθεροποιήσουμε το m και αφήσουμε το t να τείνει στο άπειρο, βλέπουμε ότι το δυαδικό ανάπτυγμα του α^m περιέχει οσοδήποτε μεγάλες ακολουθίες διαδοχικών μηδενικών ψηφίων. Με την ίδια λογική, βλέπουμε ότι, γενικότερα, αν $b_0, b_1, \ldots, b_m$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι, τότε το δυαδικό ανάπτυγμα του $b_0 + b_1\alpha + \cdots + b_m\alpha^m$ περιέχει οσοδήποτε μεγάλες ακολουθίες διαδοχικών μηδενικών ψηφίων. Μάλιστα, εάν $b_0, b_1, \ldots, b_m$ και $c_0, c_1, \ldots, c_m$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και αν έχουμε τα δυαδικά αναπτύγματα

$$\{b_0 + b_1\alpha + \cdots + b_m\alpha^m\} = (0.d_1d_2d_3\ldots)_2$$

και

$$\{c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_m\alpha^m\} = (0.d_1'd_2'd_3'\ldots)_2,$$

τότε για κάθε θετικό ακέραιο N, υπάρχει ένας θετικός ακέραιος j για τον οποίο

$$d_{j+1} = d_{j+2} = \cdots = d_{j+N} = d_{j+1}' = d_{j+2}' = \cdots = d_{j+N}' = 0.$$

Επιπλέον, μπορούμε να επιλέξουμε τους N και j έτσι ώστε

$$N = 2^t \quad \text{και} \quad j = 2^{t+1} + \cdots + 2^{t+m}$$

με τον t ακέραιο όσο μεγάλο (αλλά ίσως όχι όσο μικρό) θέλουμε.

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι ο α είναι ρίζα του $f(x) = \sum_{j=0}^n a_jx^j \in \mathbb{Z}[x]$ με $a_n > 0$ (το οποίο ισχύει αν ο α είναι αλγεβρικός). Τότε μπορούμε να γράψουμε το $f(x)$ στη μορφή

$$f(x) = \sum_{j=0}^n b_jx^j - \sum_{j=0}^n c_jx^j,$$

όπου οι b_j και c_j είναι μη αρνητικοί ακέραιοι με $b_jc_j = 0$ για κάθε j. Ειδικότερα, $b_n = a_n > 0$ και $c_n = 0$. Παίρνουμε $m = n-1$, και ορίζουμε $N = 2^t$, όπου t είναι ένας θετικός ακέραιος και ο $j = j(t)$ είναι όπως παραπάνω. Τότε, οι

$$2^{j+2^{t-2}} \sum_{j=0}^{n-1} b_i\alpha^i \quad \text{και} \quad 2^{j+2^{t-2}} \sum_{j=0}^{n-1} c_i\alpha^i$$

διαφέρουν και οι δύο από έναν ακέραιο απόσταση $\leqslant 1/2^{N-2^{t-2}} = 1/2^{2^{t-1}+2^{t-2}}$. Αν γράψουμε

$$2^{j+2^{t-2}} \sum_{i=0}^{n-1} b_i\alpha^i = m_1 + \theta_1 \quad \text{και} \quad 2^{j+2^{t-2}} \sum_{i=0}^{n-} c_i\alpha^i = m_2 + \theta_2,$$

όπου m_1 και m_2 είναι οι μεγαλύτεροι ακέραιοι στις παραπάνω εκφράσεις, τότε βλέπουμε ότι αφού $f(a) = 0$,

$$2^{j+2^{t-2}} b_n \alpha^n = m_3 + \theta_3 \quad \text{με } m_3 \in \mathbb{Z} \text{ και } |\theta_3| = |\theta_1 - \theta_2| \leqslant \frac{1}{2^{2^{t-1}+2^{t-2}}}. \tag{5.1}$$

Από την άλλη πλευρά, δεδομένου ότι το j έχει την παραπάνω μορφή, από τον ορισμό του $c(k, m)$ παίρνουμε $c(j + 2^{t-1}, n) \geqslant 1$ και $c(k, n) = 0$ για κάθε $k \in (j + 2^{t-2}, j + 2^{t-1})$. Για t αρκετά μεγάλο, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 2^{j+2^{t-2}} b_n \sum_{k=j+2^{t-2}+1}^{\infty} \frac{c(k,n)}{2^k} &= 2^{j+2^{t-2}} b_n \sum_{k=j+2^{t-1}}^{\infty} \frac{c(k,n)}{2^k} \\ &\leqslant 2^{j+2^{t-2}} b_n n^{2n} 2^{-j-2^{t-1}+1} \\ &= 2^{1-2^{t-2}} b_n n^{2n} < \frac{1}{2^{2^{t-3}}} \end{aligned}$$

και

$$2^{j+2^{t-2}} b_n \sum_{k=j+2^{t-2}+1}^{\infty} \frac{c(k,n)}{2^k} \geqslant 2^{j+2^{t-2}} b_n 2^{-j-2^{t-1}} = 2^{-2^{t-2}} b_n \geqslant \frac{1}{2^{2^{t-2}}}.$$

Έπεται ότι η (5.1) δεν ισχύει, άρα έχουμε άτοπο και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □