Η συμβολή του Dirichlet στις τριγωνομετρικές σειρές

Δημήτρης Καρκαζής

Περίληψη

Περιγράφουμε τη δομή του κλασσικού άρθρου «*Sur la convergence des séries trigonométriques qui a représentes une fonction arbitraire entre des limites données*» του Dirichlet (1829) σχετικά με το πρόβλημα της σημειακής σύγκλισης της σειράς Fourier δοθείσης συνάρτησης. Στο δεύτερο μέρος της εργασίας κάνουμε μια σύντομη αναφορά στην επιρροή του έργου του Dirichlet στην μετέπειτα μελέτη των προβλημάτων σύγκλισης των σειρών Fourier.

1 Εισαγωγή: Λίγα λόγια για τη ζωή του Dirichlet

Ο Dirichlet (1805-1859) αποφοίτησε από το λύκειο της Κολωνίας στα 16 του χρόνια. Ήθελε να σπουδάσει μαθηματικά και πήγε στο Παρίσι το 1822. Στην αρχή εργαζόταν ως παιδαγωγός. Εκείνο το μικρό χρονικό διάστημα γνώρισε πολλούς επιφανείς μαθηματικούς της εποχής και εντυπωσιάστηκε ιδιαίτερα από τον Fourier.

Επέστρεψε στη Γερμανία το 1826, όπου του δόθηκε ο τίτλος του Λέκτορα στο Πανεπιστήμιο του Breslav, στο οποίο αποδείχτηκε εξαιρετικός καθηγητής. Έπειτα, μετέβη στο Βερολίνο. Το 1831 έγινε μέλος της Ακαδημίας Επιστημών του Βερολίνου και ταυτόχρονα δίδασκε στη στρατιωτική ακαδημία με μάλιστα αρκετά βεβαρυμένο πρόγραμμα (13 διαλέξεις την εβδομάδα μαζί με άλλα καθήκοντα). Όταν πέθανε ο Gauss, το 1855, έγινε ο διάδοχός του και εγκαταστάθηκε πλέον στο Gottingen.

Η ενασχόλησή του με τις σειρές Fourier οδήγησε σε πολλά κατορθώματα στη θεωρία αριθμών. Μπορεί να θεωρηθεί και ο θεμελιωτής της αναλυτικής θεωρίας αριθμών.

Όσον αφορά το θέμα μας τώρα. Ο Dirichlet, το 1829, έγραψε μια καθοριστική και διαφωτιστική εργασία με τίτλο "*Sur la convergence des séries trigonométriques qui a représentes une fonction arbitraire entre des limites données*", το οποίο σε ελεύθερη μετάφραση σημαίνει: «Για την σύγκλιση των τριγωνομετρικών σειρών που χρησιμεύουν στην αναπαράσταση μιας αυθαίρετης συνάρτησης μεταξύ δύο καθορισμένων ορίων». Κατά τον 18ο και κυρίως τον 19ο αιώνα, το πρόβλημα της ολοκλήρωσης ασυνεχών συναρτήσεων βασάνισε πολλούς μαθηματικούς (για παράδειγμα, τον Cauchy και τον Fourier). Ο Dirichlet ήταν ο πρώτος μαθηματικός ο οποίος τοποθετήθηκε με αυστηρότητα στην ύπαρξη συναρτήσεων που έχουν ασυνέχεια σε άπειρο σύνολο σημείων ενός πεπερασμένου διαστήματος. Ο στόχος του ήταν να δώσει μια σωστή και διαυγή απόδειξη για την σύγκλιση των σειρών Fourier. Το αποτέλεσμά του θεωρείται μέχρι και σήμερα παράδειγμα για την ορθότητα τοποθετήσεων στην ανάλυση, και γενικότερα για τον τρόπο προσέγγισής της.

2 Λεπτομερής παρουσίαση της ιστορικής εργασίας του Dirichlet

Η πρώτη φράση στο άρθρο του Dirichlet είναι μία *δήλωση* (σε ύφος ανάλογο με αυτό του Fourier):

> *Οι σειρές ημιτόνων και συνημιτόνων που αναπαριστούν οποιαδήποτε συνάρτηση σε δοσμένο διάστημα, έχουν μια αξιοσημείωτη ιδιότητα: το ότι είναι συγκλίνουσες.*

Έπειτα, αφού πρώτα αποδίδει φόρο τιμής στον Fourier, συνεχίζει με λίγη κριτική στον Cauchy, όσον αφορά την απόδειξή του για την σύγκλιση των τριγωνομετρικών σειρών. Το άρθρο στο οποίο αναφέρεται μελετούσε τις τιμές μιας συνάρτησης $\phi(x)$, όπου το x επιτρέπεται να παίρνει μιγαδικές τιμές. Ο Dirichlet είχε γενικά πολύ πιο αυστηρή άποψη, απ¨ ότι ο Cauchy, για το πότε ένα θεώρημα έχει αποδειχθεί: αντί να επιτρέπει μερικές εξαιρέσεις, επιζητούσε ένα επιχείρημα το οποίο να ισχύει για όλες τις περιπτώσεις τις οποίες αντιμετωπίζει. Οτιδήποτε άλλο, κατά τον Dirichlet, ήταν απλώς ένας εσφαλμένος ισχυρισμός.

Το σφάλμα το οποίο προσάπτει ο Dirichlet στον Cauchy είναι μια υπόθεση που είχε κάνει ο Cauchy σχετικά με την σύγκλιση σειρών: ότι αν για δύο σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (που οι όροι τους είναι μη μηδενικοί αλλά δεν διατηρούν πρόσημο) ο λόγος b_n/a_n συγκλίνει στο 1 όταν $n \to \infty$, τότε οι δύο σειρές έχουν ισοδύναμη συμπεριφορά: συγκλίνουν και οι δύο ή αποκλίνουν και οι δύο. Ο Dirichlet παρουσιάζει ένα αντιπαράδειγμα, όπου $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ και $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$. Πράγματι, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει, παρόλο που

$$\frac{b_n}{a_n} = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \to 1. \tag{2.1}$$

Ο σκοπός της εργασίας του Dirichlet ήταν να αποδείξει ότι η τριγωνομετρική σειρά που αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση συγκλίνει, να βρεί το όριό της, αλλά και τις συνθήκες που εξασφαλίζουν ότι συμβαίνει το παραπάνω. Ο Dirichlet ξεκινάει θεωρώντας το ολοκλήρωμα

$$\int_0^h \frac{\sin(kb)}{\sin b} f(b)\, db, \tag{2.2}$$

όπου $h \in [0, \pi/2]$ και για την f κάνει τις ακόλουθες υποθέσεισ:

(α) Η $f(b)$ είναι συνεχής.

(β) Η f παίρνει γνήσια θετικές τιμές στο $[0, h]$ και είναι φθίνουσα. Δηλαδή, η διαφορά $f(p) - f(q)$ έχει αντίθετο πρόσημο από το $p - q$ για κάθε $p.q \in [0, h]$.

Έπειτα, εξετάζει αυτό το ολοκλήρωμα για $k > 0$, το οποίο αυξάνει. Η μέθοδός του είναι να χωρίσει το ολοκλήρωμα σε επιμέρους ολοκληρώματα ως εξής:

$$\int_0^h = \int_0^{\pi/k} + \int_{\pi/k}^{2\pi/k} + \cdots + \int_{(r-1)\pi/k}^{r\pi/k} + \int_{r\pi/k}^{h}, \tag{2.3}$$

όπου r είναι ο μεγαλύτερος φυσικός για τον οποίο $\frac{r\pi}{k} \leqslant h$.

Ο Dirichlet ισχυρίζεται ότι:

(α) Τα ολοκληρώματα έχουν εναλλασσόμενα πρόσημα: το πρώτο είναι θετικό, το δεύτερο αρνητικό, το τρίτο θετικό, και ούτω καθεξής.

(β) Κατ¨ απόλυτη τιμή, τα ολοκληρώματα φθίνουν.

Η ορθότητα των ισχυρισμών του γίνεται ξεκάθαρη με τις παρακάτω εξηγήσεισ:

Προσδιορισμός του προσήμου. Έχουμε $f(b) > 0$ για κάθε $b \in [0, h]$ και $\sin b > 0$ διότι $0 < b < h < \pi/2$. Αυτό σημαίνει ότι το πρόσημο της προς ολοκλήρωση συνάρτησης προσδιορίζεται από τον όρο $\sin(kb)$, ο οποίος είναι θετικός στα υποδιαστήματα περιττής τάξης (τότε το kb βρίσκεται στο πρώτο μισό της περιόδου του ημιτόνου) και αρνητικός στα υποδιαστήματα άρτιας τάξης (τότε το kb βρίσκεται στο δεύτερο μισό της περιόδου του ημιτόνου). Έτσι, με τον τρόπο που χωρίστηκαν τα διαστήματα, είναι πλέον φανερό ότι αυτά που έχουν περιττή τάξη είναι θετικά, ενώ αυτά που έχουν άρτια τάξη είναι αρνητικά.

Μελέτη της απόλυτης τιμής. Ορίσαμε δύο διαδοχικά ολοκληρώματα της «ακολουθίας» στην (2.2) ως

$$\int_{(n-1)\pi/k}^{n\pi/k} \frac{\sin(kb)}{\sin b} f(b)\, db \tag{2.4}$$

και

$$\int_{n\pi/k}^{(n+1)\pi/k} \frac{\sin(kb)}{\sin b} f(b)\, db. \tag{2.5}$$

Με αλλαγή μεταβλητής $b \to b + \frac{\pi}{k}$ το (2.5) γίνεται

$$\int_{(n-1)\pi/k}^{n\pi/k} \frac{\sin(kb+\pi)}{\sin(b+\pi/k)} f(b+\pi/k)\, db = -\int_{(n-1)\pi/k}^{n\pi/k} \frac{\sin(kb)}{\sin(b+\pi/k)} f(b+\pi/k)\, db \tag{2.6}$$

Τώρα, το (2.5) έχει τα ίδια όρια ολοκλήρωσης με το (2.4) και έτσι μπορούμε να τα συγκρίνουμε. Παρατηρούμε ότι $\sin(b + \pi/k) > \sin b$ και $f(b + \pi/k) < f(b)$, άρα

$$\frac{f(b+\pi/k)}{\sin(b+\pi/k)} < \frac{f(b)}{\sin b}. \tag{2.7}$$

Ως εκ τούτου, η απόλυτη τιμή κάθε ολοκληρώματος είναι μικρότερη από την προηγούμενη. (Σημειώστε ότι αυτός ο συλλογισμός δεν βοηθάει για να βγεί συμπέρασμα για το τελευταίο ολοκλήρωμα, αλλά αφού αυτό το διάστημα ολοκλήρωσης είναι γνήσια μικρότερο από το «πλήρες» διάστημα οποιουδήποτε άλλου, ο ισχυρισμός αληθεύει και σε αυτήν την περίπτωση).

Ο Dirichlet εξετάζει τώρα το ολοκλήρωμα (2.4) πιο προσεκτικά. Επικαλείται ένα θεώρημα το οποίο ισχυρίζεται ότι, όταν ολοκληρώνουμε το γινόμενο δύο συνεχών συναρτήσεων, αν η μία από αυτές διατηρεί πρόσημο τότε μπορούμε να την αντικαταστήσουμε με μία σταθερά, έξω από το ολοκλήρωμα, η οποία είναι μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής της συνάρτησης σε αυτό το διάστημα. Έτσι, γράφει το ολοκλήρωμα (2.4) στη μορφή

$$\rho_n \int_{(n-1)\pi/k}^{n\pi/k} \frac{\sin(kb)}{\sin b}\, db \tag{2.8}$$

με την σταθερά ρ_n να ανήκει στο διάστημα $[f(n\pi/k), f((n-1)\pi/k)]$ αφού η f είναι φθίνουσα.

Συμβολίζουμε με U_n την απόλυτη τιμή του τελευταίου ολοκληρώματος και σημειώνουμε ότι το ολοκλήρωμα είναι θετικό αν ο n είναι άρτιος και αρνητικό αν ο n είναι περιττός.

Έπειτα, ο Dirichlet κάνει την αλλαγή μεταβλητής $\gamma = kb$, οπότε προκύπτει το ολοκλήρωμα

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin\gamma}{k\sin(k/\gamma)}\, d\gamma, \tag{2.9}$$

το οποίο συγκλίνει στο

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin\gamma}{\gamma}\, d\gamma \tag{2.10}$$

όταν $k \to \infty$. Συμβολίζοντας την απόλυτη τιμή αυτού του οριακού ολοκληρώματος με u_n, έχουμε $U_n \to u_n$ όταν $k \to \infty$. Σε αυτό το σημείο, ο Dirichlet επικαλείται ένα αποτέλεσμα το οποίο μπορεί να βρεθεί αλλού, χωρίς απόδειξη. Ισχύει ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\gamma}{\gamma}\, d\gamma = \frac{\pi}{2}. \tag{2.11}$$

Αυτή η ισότητα είναι κρίσιμη για τη συνέχεια του επιχειρήματός του. Διασπά το ολοκλήρωμα στη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin\gamma}{\gamma}\, d\gamma. \tag{2.12}$$

Τα ολοκληρώματα αυτά είναι θετικά και αρνητικά εναλλάξ και, κατ¨ απόλυτη τιμή, το n-οστό ολοκλήρωμα είναι ίσο με u_n. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots \to \frac{\pi}{2}. \tag{2.13}$$

Αφού $u_{n+1} < u_n$, μπορούμε να δείξουμε ότι το n-οστό μερικό άθροισμα S_n αυτής της σειράς ικανοποιεί την $|S_n - \pi/2| < u_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (πράγματι: αν ο n είναι άρτιος τότε $\frac{\pi}{2} - S_n < u_{n+1}$ και αν ο n είναι περιττός τότε $S_n - \frac{\pi}{2} < u_{n+1}$).

Τώρα, ο Dirichlet επιστρέφει στο αρχικό ολοκλήρωμα (2.2), έχοντας τον απαραίτητο εξοπλισμό για τον υπολογισμό του επίμαχου ορίου. Παρατηρώντας ότι οι τιμές, μεμονωμένα, των ολοκληρωμάτων ποικίλλουν και ότι το πλήθος τους θα αυξάνεται συνεχώς καθώς $k \to \infty$, οδηγείται στο να τα διασπάσει: επιλέγει έναν άρτιο φυσικό $m \in \mathbb{N}$ ο οποίος θα παραμείνει σταθερός καθώς το k θα αυξάνει. Αφού το πλήθος r των ολοκληρωμάτων θα ξεπεράσει κάποια στιγμή το m, μπορεί να χωρίσει το άθροισμα στα

$$U_1\rho_1 - U_2\rho_2 + U_3\rho_3 - U_4\rho_4 + \cdots - U_m\rho_m \tag{2.14}$$

και

$$U_{m+1}\rho_{m+1} - U_{m+2}\rho_{m+2} + \cdots , \tag{2.15}$$

όπου το δεύτερο άθροισμα θα συνεχίσει να «μεγαλώνει» καθώς το k αυξάνει.

Πρώτα, υπολογίζει το πρώτο μισό, παρατηρώντας ότι $\rho_n \in [f(n\pi/k), f((n-1)\pi/k)]$ και έτσι, όταν $k \to \infty$ θα ισχύει (στο όριο) $\rho_n = f(0)$ για κάθε $n \in \{1, \ldots, m\}$. Επίσης, ξέρουμε ότι $U_n \to u_n$, άρα

$$(u_1 - u_2 + u_3 - \cdots - u_m)f(0) = S_m f(0) \tag{2.16}$$

όταν $k \to \infty$, με την έννοια ότι για κάθε $\omega > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε k επαρκώς μεγάλο ώστε

$$|(u_1 - u_2 + u_3 - \cdots - u_m)f(0) - S_m f(0)| < \omega. \tag{2.17}$$

Πάμε τώρα και στο δεύτερο άθροισμα. Κάθε όρος είναι κατ¨ απόλυτη τιμή μικρότερος από τον προηγούμενό του, και τα πρόσημά τους είναι διαφορετικά. Άρα, μπορούμε να φράξουμε αυτά τα αθροίσματα, με άνω φράγμα το $U_{m+1}\rho_{m+1}$ και κάτω φράγμα το 0. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $U_{m+1}\rho_{m+1} \to u_{m+1}f(0)$ καθώς το $k \to \infty$: αυστηρά, για κάθε $\omega' > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε k επαρκώς μεγάλο ώστε

$$|U_{m+1}\rho_{m+1} - U_{m+2}\rho_{m+2} + \cdots| < \omega' + u_{m+1}f(0). \tag{2.18}$$

Έτσι, προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$|(U_1\rho_1 - U_2\rho_2 + U_3\rho_3 + \cdots) - S_m f(0)| < \omega + \omega' + u_{m+1}f(0). \tag{2.19}$$

Όμως τώρα, από την $|S_m - \pi/2| < u_{m+1}$ βλέπουμε ότι $|S_m f(0) - \frac{\pi}{2}f(0)| < u_{m+1}f(0)$, το οποίο μας δίνει

$$\left|(U_1\rho_1 - U_2\rho_2 + U_3\rho_3 + \cdots) - \frac{\pi}{2}f(0)\right| < \omega + \omega' + 2u_{m+1}f(0). \tag{2.20}$$

Επικαλούμενος τώρα ο Dirichlet το γεγονός ότι το άθροισμα $U_1\rho_1 - U_2\rho_2 + U_3\rho_3 + \cdots$ είναι ίσο με το αρχικό ολοκλήρωμα (2.2), και αφού τα ω, ω' και $2u_{m+1}$ μπορούν να γίνουν αυθαίρετα μικρά όταν $k \to \infty$, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι

$$\int_0^h \frac{\sin(kb)}{\sin b} f(b)\, db \to \frac{\pi}{2} f(0) \tag{2.21}$$

όταν $k \to \infty$.

Έχοντας αποδείξει αυτό το θεμελιώδες αποτέλεσμα, ο Dirichlet επεκτείνει τις υποθέσεις του ώστε να συμπεριλάβει περισσότερες περιπτώσεις. Πρώτα, αποδεικνύει ότι, αφού ο όρος του ημιτόνου εξασφαλίζει το ότι διαδοχικοί όροι φθίνουν, δεν χρειάζεται να υποθέσουμε ότι η f είναι φθίνουσα: αν είναι σταθερή το συμπέρασμα προκύπτει και πάλι. Μετά από αυτό, δεν είναι δύσκολο να επεκταθούμε σε συναρτήσεις που δεν είναι παντού θετικές: αρκεί να τους προσθέσουμε μια επαρκώς μεγάλη σταθερά πριν προχωρήσουμε στη διαδικασία. Ακόμα, αντί για μια αύξουσα συνάρτηση f μπορούμε να θεωρήσουμε μια φθίνουσα συνάρτηση (αντικαθιστούμε την f με την $-f$ και εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα γι¨ αυτήν). Αυτό είναι και το περιεχόμενο του πρώτου θεωρήματος του Dirichlet: αν f είναι μια μονότονη συνεχής συνάρτηση στο $[0, h]$ το όριο που βρήκαμε ισχύει.

Στη συνέχεια παρατηρεί ότι για τυχόν σημείο $g \in (0, h)$, αν θεωρήσουμε τα ολοκληρώματα από 0 ως g και από g ως h, τότε το ολοκλήρωμα μεταξύ του g και του h τείνει πάντα στο 0 όταν $k \to \infty$. Αν θέσουμε $g = h$ τότε το αποτέλεσμα είναι αυτό που έχουμε ήδη δείξει. Αυτή η παρατήρηση επιτρέπει στον Dirichlet να εξηγήσει ότι απλές ασυνέχειες της συνάρτησης στο g ή στο h δεν θα άλλαζαν το αποτέλεσμα.

Ό Dirichlet θέτει τώρα ως στόχο, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα, να αποδείξει τη σύγκλιση της τριγωνομετρικής σειράς μιας συνάρτησης ϕ (και να βρεί το όριό της). Έχουμε τις σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos x \cdot \frac{1}{\pi} \int \phi(a) \cos(ka)\, da \tag{2.22}$$

και

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos x \cdot \frac{1}{\pi} \int \phi(a) \sin(ka)\, da, \tag{2.23}$$

και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τριγωνομετρική ταυτότητα για το $\cos(A - B)$ για να συνδυάσουμε τους r-οστύς όρους αυτών των σειρών. Αν πάρουμε το άθροισμα μέχρι τον $(2n + 1)$-όρο, προκύπτει ένα άθροισμα με προσθετέους της μορφής $\cos r(a - x)$, όπου το r παίρνει τις τιμές από 1 ως n. Έτσι καταλήγουμε στο

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(a) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(a - x)}{2 \sin \frac{a-x}{2}}\, da, \tag{2.24}$$

και έπειτα χωρίζουμε αυτό το ολοκλήρωμα σε δύο μέρη, δηλαδή

$$\int_0^{\frac{\pi+x}{2}} \phi(x - 2b) \frac{\sin(2n + 1)b}{\sin b}\, db \quad \text{και} \quad \int_0^{\frac{\pi-x}{2}} \phi(x + 2b) \frac{\sin(2n + 1)b}{\sin b}\, db. \tag{2.25}$$

Μελετώντας το δεύτερο ολοκλήρωμα, ο Dirichlet βρίσκει το όριο για $x < \pi$ (για $x = \pi$ συγκλίνει στο 0). Μάλιστα, επιτρέπει μικρές ασυνέχειες πρώτου είδους. Επειδή τα πολλά λόγια είναι φτώχεια, με τη βοήθεια του θεωρήματος που συζητήσαμε προηγουμένως, καταλήγει στα εξής αποτελέσματα: αν $-\pi < x < \pi$ τότε

1. Το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει στο $\frac{\pi}{2}\phi(x+0)$, όπου $\phi(x+0)$ είναι το δεξιό πλευρικό όριο της ϕ στο x.

2. Το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει στο $\frac{\pi}{2}\phi(x-0)$, όπου $\phi(x-0)$ είναι το αριστερό πλευρικό όριο της ϕ στο x.

Τώρα, εφόσον τα δύο ολοκληρώματα (πολλαπλασιασμένα επί $1/\pi$) αθροίζουν στο αρχικό, ο Dirichlet καταλήγει στο ξακουστό συμπέρασμα, και συνάμα στολίδι της ανάλυσης όπως το χαρακτήρισαν μερικοί, ότι εν τέλει η σειρά Fourier της ϕ συγκλίνει στο

$$\frac{1}{2}[\phi(x-0)+\phi(x+0)] \tag{2.26}$$

για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$. Αυτό είναι το **θεώρημα του Dirichlet**, το πρώτο θεώρημα σύγκλισης για τις σειρές Fourier, ένα φημισμένο και υπέροχο θεώρημα της Ανάλυσης.

3 Σχολιασμός της επίμαχης σελίδας της εργασίας

Η τελευταία σελίδα είναι και η πιο πολυσυζητημένη, αποδείχτηκε όμως αυτή με τη μεγαλύτερη επιρροή.

Ο Dirichlet θέλει να απαλλαγεί από τις συνθήκες που όρισε προηγουμένως και να επιτρέψει άπειρα το πλήθος σημεία ασυνέχειας ή ακρότατα. Έτσι, έθεσε την ακόλουθη συνθήκη: κάθε διάστημα $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$ έχει υποδιαστήματα $[r, s]$ στα οποία η ϕ είναι συνεχής. Αυτή η συνθήκη, κατά την άποψή του, καθίσταται ικανή για να έχει νόημα το ολοκλήρωμα. Στη συνέχεια, ισχυρίστηκε ότι παίρνοντας την *συνάρτηση Dirichlet*, δηλαδή αν η ϕ παίρνει την τιμή a για $x \in \mathbb{Q}$ και την τιμή b για $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε το ολοκλήρωμα δεν ορίζεται. Άρα, ο παραπάνω περιορισμός για την ϕ μαζί με το ότι η ϕ δεν μπορεί να απειρίζεται, είναι οι μόνοι που πρέπει να επιβληθούν. Αλλά ο ισχυρισμός αυτός χρειάζεται κάποιες λεπτομέρειες για να γίνει βέλτιστος και καθαρός, και ο Dirichlet ανακοίνωσε ότι η απόδειξη του ισχυρισμού του προορίζεται για κάποια επόμενη εργασία του, η οποία βέβαια δεν εμφανίστηκε ποτέ.

Το πρώτο σχόλιο, λοιπόν, είναι ότι ο παραπάνω ισχυρισμός είναι λανθασμένος, αλλά εθεωρείτο πρόκληση για μισόν αιώνα. Δεύτερον, ο περιορισμός που τέθηκε από τον Dirichlet εξαρτάται από την έννοια του ολοκληρώματος. Ο ίδιος αναφέρει χαρακτηριστικά το ολοκλήρωμα Cauchy, ενώ για το ολοκλήρωμα Riemann και για το ολοκλήρωμα Lebesgue ο περιορισμός θα ήταν διαφορετικός.

Τελικά, υπάρχει μια εντυπωσιακή αντίθεση ανάμεσα στην αυστηρότητα και ακρίβεια του θεωρήματος του Dirichlet για την σύγκλιση σειρών, λόγω της ασαφούς γλώσσας που χρησιμοποιεί. Για παράδειγμα, η φράση «il faut seulement» σημαίνει «είναι απαραίτητο», «είναι έπαρκές» ή και τα δύο; Συνολικά, το μαθηματικό στύλ του Dirichlet ήταν απίστευτα μοντέρνο για την εποχή του. Αλλά, προφανώς, η γλώσσα πρέπει να φτιαχτεί για να ταιριάξουν λογικά μεταξύ τους οι έννοιες. Θα δανειστώ μια πολύ εύστοχη έκφραση του Kahane από το βιβλίο του «Fourier series and wavelets», ο οποίος απευθυνόμενος στους συναδέλφους του με αφορμή τον τρόπο έκφρασης του Dirichlet, γράφει:

> *Ίσως είναι κάτι που πρέπει να θυμόμαστε, μαζί με τα λάθη του Cauchy, όταν διδάσκουμε προπτυχιακούς φοιτητές: τα λάθη και οι ασάφειες είναι μέρος της μαθηματικής ζωής, και η προσπάθειά μας να τα διορθώσουμε είναι πραγματική πρόκληση!*

4 Η επιρροή του θεωρήματος σύγκλισης του Dirichlet στα επόμενα χρόνια μέχρι και σήμερα

Συγκλίνει η σειρά Fourier μιας αυθαίρετης συνάρτησης; Σύμφωνα με την έρευνα του Dirichlet, ένας περιορισμός είναι απαραίτητος, ότι δηλαδή τα ολοκληρώματα που εμπλέκονται στους τύπους του Fourier πρέπει να ορίζονται.

Όσον αφορά τις συνεχείς συναρτήσεις, είναι τοπικά ολοκληρώσιμες. Τι γίνεται όμως με τις ασυνεχείς, ιδιαίτερα πάνω στον κύκλο (τις 2π-περιοδικές);

Κατ¨ αρχήν, οι σειρές Fourier τους μπορούν να αποκλίνουν σε ένα σημείο. Το αντιπαράδειγμα για τη σύγκλιση δόθηκε από τον Paul du Bois-Reymond το 1873, στη μορφή μιας συνεχούς συνάρτησης που είναι τμηματικά μονότονη μακρυά από το 0, αλλά ταλαντώνεται άπειρα κοντά στο 0. Πιο απλά παραδείγματα δόθηκαν τα επόμενα χρόνια από τους Féjer και Lebesgue. Σε όλες, βέβαια, τις περιπτώσεις χρησιμοποιείται ο πυρήνας του Dirichlet

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{4.1}$$

O Féjer χρησιμοποίησε το γεγονός ότι τα ολοκληρώματα του πυρήνα $D_n(x)$ σε διαστήματα I μήκους $|I| < 2\pi$ είναι ομοιόμορφα φραγμένα, δηλαδή τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα

$$F_n(x) = \sin x + \frac{1}{2} sin2x + \cdots + \frac{1}{n}\sin nx \tag{4.2}$$

είναι ομοιόμορφα φραγμένα. Ακόμα, η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\sin(3^{n^2}x)F_{2^{n^2}}(x) \tag{4.3}$$

είναι μια συνεχής συνάρτηση, και μια μελέτη των συντελεστών Fourier της δείχνει ότι η σειρά Fourier της αποκλίνει για $x - 0$. O Lebesgue, απλώς, χρησιμοποίησε τις συναρτήσεις $\operatorname{sgn}(D_n(x))$ και το γεγονός ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\cdot \operatorname{sgn}(D_n(x))dx = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx \to \infty \tag{4.4}$$

όταν $n \to \infty$, δηλαδή έδωσε ένα βολικό γραμμικό συνδυασμό από συνεχείς προσεγγίσεις της $\mathrm{sgn}(D_n(x))$. Αυτό θα μπορούσε κάλλιστα να είναι ένα παράδειγμα για την αρχή ομοιόμορφου φράγματος που θεμελιώθηκε αργότερα από τους Banach-Steinhaus. Πράγματι, σύμφωνα με το θεώρημά τους, το γεγονός ότι τα γραμμικά συναρτησοειδή

$$f \mapsto s_n(f,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f \cdot D_n \tag{4.5}$$

ορίζονται στον $C(\mathbb{T})$ και η ακολουθία των νορμών τους δεν είναι φραγμένη, συνεπάγεται ότι η ακολουθία $\{s_n(f,0)\}_n$ είναι μη φραγμένη για κάποιες f. Αυτός είναι τώρα ο πιο εύκολος τρόπος για να μελετήσουμε το πρόβλημα.

Οι σειρές Fourier συνεχών συναρτήσεων μπορούν να αποκλίνουν πάνω σε οποιοδήποτε σύνολο Lebesgue μέτρου 0. Αυτό απεδείχθη πολύ αργότερα (από τους Kahane-Katznelson, το 1966) σαν ένα βήμα για να αποδειχθεί το παρακάτω αποτέλεσμα: είτε οι σειρές Fourier όλων των συνεχών συναρτήσεων f συγκλίνουν σχεδόν παντού είτε υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση f της οποίας η σειρά Fourier αποκλίνει παντού. Μέχρι το 1965 το ερώτημα αν οι σειρές Fourier όλων των συνεχών συναρτήσεων f συγκλίνουν σχεδόν παντού παρέμενε ανοιχτό. Απαντήθηκε όμως, το 1966, μέσω του φημισμένου θεωρήματος του Carleson: για κάθε συνάρτηση f που ανήκει στον L^2, η σειρά Fourier της f συγκλίνει σχεδόν παντού στην ίδια τη συνάρτηση. Το ίδιο ισχύει και για τον L^p, στην περίπτωση $p > 1$ (Hunt, 1967).

Τώρα, ποιά είναι η κατάσταση για τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις; Αν θεωρήσουμε γενικευμένα ολοκληρώματα Riemann (για παράδειγμα, $\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}$), οι συντελεστές δεν χρειάζεται κατ¨ ανάγκη να συγκλίνουν στο 0, ως εκ τούτου μπορούν να αποκλίνουν και παντού. Αν θεωρήσουμε μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f \in L^1$ τότε οι συντελεστές τείνουν στο 0: αυτό εξασφαλίζεται από το θεώρημα Riemann-Lebesgue. Παρόλα αυτά, όπως απέδειξε ο Kolmogorov το 1926, υπάρχει μια Lebesgue ολοκληρώσιμη f της οποίας η σειρά Fourier αποκλίνει παντού (το θέμα αυτό παρουσιάζεται στο βιβλίο του Katznelson: *An introduction to harmonic analysis*).

Αξίζει να αναφέρει κανείς το εξής σχετικό ανοικτό πρόβλημα για τα μερικά αθροίσματα $s_n(f,x)$ της σειράς Fourier μιας Lebesgue ολοκληρώσιμης συνάρτησησ: για ποιές ακολουθίες (λ_n) ισχύει ότι, για κάθε $f \in L^1$ έχουμε $s_n(f,x) = o(\lambda_n)$ σχεδόν παντού; Είναι γνωστό ότιη απάντηση είναι καταφατική για την $\lambda_n = \log n$ και αρνητική για την $\lambda_n = \log\log n$. Στο ίδιο πνεύμα, ο Rodin απέδειξε, το 1992, ότι αν $f \in L^1$ τότε

$$\sup_{n,m} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left| s_{n+k}(f,x) - \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} s_{n+j}(f,x)\right| < \infty \tag{4.6}$$

σχεδόν για κάθε x, δηλαδή τα μερικά αθροίσματα $s_n(f,x)$ έχουν *φραγμένη μέση ταλάντωση* σχεδόν παντού.

Όπως είπαμε, για τη σειρά Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^p(\mathbb{T})$ ($p > 1$) το πρόβλημα της σύγκλισης σχεδόν παντού έχει καταφατική απάντηση μέσω του θεωρήματος των Carleson-

Hunt. Ισχύει το ίδιο και στις παραπάνω διαστάσεις, δηλαδή για συναρτήσεις στον $L^p(\mathbb{T}^d)$, $d \geqslant 2$;

Η πρώτη δυσκολία που συναντάμε έγκειται στο ότι η σύγκλιση πολλαπλών σειρών Fourier δεν ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο. Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε το άθροισμα όλων των όρων των οποίων οι δείκτες βρίσκονται στον κύβο $[-R, R]^d$ και να αναζητήσουμε το όριο όταν $R \to \infty$ (αυτή είναι η *κυβική διαδικασία άθροισης*). Μπορούμε όμως να κάνουμε το ίδιο με τους όρους των οποίων οι δείκτες βρίσκονται μέσα στη μπάλα του $\mathbb{R}^d$ που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R και να αναζητήσουμε πάλι το όριο όταν $R \to \infty$ (αυτή είναι η *σφαιρική διαδικασία άθροισης*). Το ανάλογο του θεωρήματος των Carleson-Hunt ισχύει για την κυβική διαδικασία άθροισης (όπως απέδειξαν οι Ch. Fefferman, P. Sjolin) αλλά η κατάσταση είναι πολύ διαφορετική σε σχέση με την σφαιρική διαδικασία άθροισησ: υπάρχει f που ανήκει σε όλους τους $L^p(\mathbb{T}^d)$ ($p < 2$) της οποίας η σειρά Fourier αποκλίνει σχεδόν παντού (Mityagin-Nikishin, 1973). Το πρόβλημα δεν έχει επιλυθεί πλήρως για $p > 2$.

Η περίπτωση των σειρών Fourier στις πολλές μεταβλητές δείχνει ότι είναι πολύ φυσιολογικό να διευρύνουμε τη μελέτη του προβλήματος σύγκλισης, θεωρώντας διαδικασίες αθροισιμότητας διαφορετικές από τη συνήθη που αφορά τη σύγκλιση των μερικών αθροισμάτων. Σε πολλές από αυτές, για παράδειγμα στις κλασσικές διαδικασίες Abel-Poisson και Cesàro-Fejér, δεν εμφανίζεται παθολογική συμπεριφορά. Αν ακολουθήσουμε αυτές τις διαδικασίες, η σειρά Fourier μιας συνεχούς συνάρτησης συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση, η σειρά Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^p(\mathbb{T})$ συγκλίνει στην f ως προς τη νόρμα του $L^p(\mathbb{T})$ και ούτω καθεξής.

Το πρόβλημα της σύγκλισης και της αθροισιμότητας μελετήθηκε εκτεταμένα, στο γενικότερο πλαίσιο των ορθογώνιων σειρών, στη διάρκεια του 20ου αιώνα. Μπορεί κανείς να βρεί τα πιο σημαντικά πρόσφατα αποτελέσματα στα βιβλία των Olevskii (1975) και Kashin και Saakian (1984). Τα ερωτήματα της σύγκλισης και της αθροισιμότητας σχετίζονται με τη συμπεριφορά των L^1 νορμών μιας ακολουθίας πυρήνων (η κλασσική περίπτωση είναι οι πυρήνες D_n). Οι νόρμες αυτές ονομάστηκαν «σταθερές Lebesgue» από τον Fejér. Ακριβείς εκτιμήσεις γι¨ αυτές τις σταθερές εμφανίζονται σε διάφορες εργασίες στη διάρκεια του 20ου αιώνα, και συνεχίζουν να είναι αντικείμενο μελέτης μέχρι και σήμερα.

5 Επίλογος

Θα μπορούσε κανείς να γράψει αμέτρητες σελίδες για τη συμβολή του Dirichlet στις τριγωνομετρικές σειρές και γενικότερα στη μαθηματική ανάλυση. Ήταν ένας από τους πρώτους μαθημτικού που έδωσαν μια μοντέρνα έκφραση στην έννοια της συνάρτησης. Η εργασία του, το 1829, για τις τριγωνομετρικές σειρές Fourier και τη σύγκλισή τους ήταν για την εποχή κάτι το εντελώς πρωτοποριακό. Γι¨ αυτό και πολλοί μαθηματικοί ασχολήθηκαν με αυτό το πρόβλημα τα επόμενα χρόνια. Το μόνο σίγουρο είναι ότι ο Dirichlet διατύπωσε ένα θεώρημα το οποίο θεωρείται μέχρι και σήμερα εξέχον κομμάτι της ανάλυσης και της μαθηματικής αποδεικτικής ακρίβειας. Για όλους αυτούς τους λόγους, και για πολλούς άλλους βέβαια, τα έργα του θα αποτελούν παράδειγμα για τους νεότερους μαθηματικούς όσα χρόνια και αν περάσουν.

Αναφορές

[1] P. G. L. Dirichlet, *Sur la convergence des séries trigonométriques qui a représentes une fonction arbitraire entre des limites données*, Journal fur die reine und angewabdte Mathematik **4** (1829), 157-169.

[2] J.-P. Kahane and P.-G. Lemarié-Rieusset, *Fourier series and wavelets*.

[3] Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*.