Ο μετασχηματισμός Fourier και η κυματική εξίσωση

Δημήτριος Γαζούλης

Περίληψη

Περιγράφουμε τον μετσχηματισμό Fourier για την κλάση του Schwartz στον $\mathbb{R}^d$ και αποδεικνύουμε τις πιο βασικές του ιδιότητες. Μεταξύ αυτών, τον τύπο αντιστροφής του Foourier. Βασικός σκοπός της εργασίας είναι να παρουσιάσει την χρήση του μετασχηματισμού Fourier στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, και πιο συγκεκριμένα, στην επίλυση της κυματικής εξίσωσης στον $\mathbb{R}^d$.

1 Εισαγωγή

Η μελέτη των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων προέκυψε τον 18ο αιώνα, στο πλαίσιο ερευνών κάποιων μοντέλων Φυσικής. Όλα ξεκίνησαν το 1747, όταν ο D' Alembert παρουσίασε στο Βερολίνο μία εργασία στην οποία εισήγαγε και ανέλυσε τη μονοδιάστατη κυματική εξίσωση ως μοντέλο για την παλλόμενη χορδή. Αν η συνάρτηση $u(x,t)$ αντιπροσωπεύει τη μετατόπιση, την χρονική στιγμή t, του σημείου επί της χορδής που βρίσκεται στην θέση x, τότε η εξίσωση είναι η εξής:

$$u_{xx} = u_{tt}, \tag{1.1}$$

όπου u_{xx} είναι η δεύτερη μερική παράγωγος της $u(x,t)$ ως προς x και u_{tt} είναι η αντίστοιχη μερική παράγωγος ως προς t. Ο D' Alembert παρατήρησε ότι μια γενική λύση της εξίσωσης αυτής είναι η

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t), \tag{1.2}$$

όπου F και G είναι αυθαίρετες δύο φορές διαφορίσιμες συναρτήσεις μιας μεταβλητής και οι $F(x+t)$ και $G(x-t)$ αντιπροσωπεύουν τα κύματα που κινούνται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος της χορδής προς τα αριστερά και προς τα δεξιά αντίστοιχα.

Ο Daniel Bernoulli, με βάση φυσικά πειράματα, ισχυρίστηκε ότι το σχήμα της παλλόμενης χορδής θα μπορούσε να περιγραφεί με τη βοήθεια τριγωνομετρικών σειρών. Ο ισχυρισμός αυτός επικυρώνεται από την εργασία του Fourier για την εξίσωση της θερμότητας.

Διάφορες μέθοδοι έχουν χρησιμοποιηθεί για την επίλυση της κυματικής εξίσωσης, ανάμεσα σε αυτές και η μέθοδος του μετασχηματισμού Fourier. Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι να παρουσιάσει τον μετασχηματισμό Fourier και την άμεση εφαρμογή του στην κυματική εξίσωση.

2 Ο μετασχηματισμός Fourier στο $\mathbb{R}$ και η μονοδιάστατη κυματική εξίσωση

Θα ορίσουμε κατάλληλο χώρο συναρτήσεων, στον οποίο θα μπορούμε να εξασφαλίσουμε κάποιες «καλές» ιδιότητες για τον μετασχηματισμό Fourier.

Ορισμός 2.1 (ο χώρος του Schwartz)**.** Η κλάση $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ λέγεται *χώρος του Schwartz* και αποτελείται από όλες τις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ οι οποίες είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες και φθίνουν πολύ γρήγορα με την εξής έννοια: για κάθε $k, \ell \geqslant 0$ υπάρχει σταθερά $A_{k,\ell} > 0$ ώστε

$$|x^k||f^{(\ell)}(x)| \leqslant A_{k,\ell} \tag{2.1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο χώρος του Schwartz είναι γραμμικός χώρος. Επίσης, η κλάση $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι κλειστή ως προς την παραγώγιση και τον πολλαπλασιασμό με πολυώνυμα:

1. Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
2. Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε $p \cdot f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, όπου $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $n \in \mathbb{N}$ και $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 2.2 (μετασχηματισμός Fourier)**.** Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε ο μετασχηματισμός Fourier της f είναι η συνάρτηση

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i y x} dx. \tag{2.2}$$

Δίνουμε πρώτα μερικές από τις βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier. Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Τότε:

(α) Αν $\xi \in \mathbb{R}$ και $g(x) = f(x+\xi)$ τότε $\widehat{g}(y) = \widehat{f}(y) e^{2\pi i \xi y}$.

(β) Αν $\xi \in \mathbb{R}$ και $g(x) = f(x) e^{-2\pi i x \xi}$ τότε $\widehat{g}(y) = \widehat{f}(y+\xi)$.

(γ) Αν $\delta > 0$ και $g(x) = f(\delta x)$ τότε $\widehat{g}(y) = \delta^{-1} \widehat{f}(\delta^{-1} y)$.

(δ) Αν $g(x) = f'(x)$ τότε $\widehat{g}(y) = 2\pi i y \widehat{f}(y)$.

(ε) Αν $g(x) = -2\pi i x f(x)$ τότε $\widehat{g}(y) = \frac{d\widehat{f}}{dy}(y)$.

Ακόμα, ισχύουν τα εξής θεωρήματα:

(α΄) Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(β') Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) e^{2\pi i y x} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-2\pi i y z} dz \right) e^{2\pi i y x} dy. \tag{2.3}$$

Αυτός είναι ο *τύπος αντιστροφής του Fourier*.

(γ') Αν $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \widehat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) g(y) dy. \tag{2.4}$$

(δ') Ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι ένα προς ένα και επί, με αντίστροφο τον $\mathcal{F}^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ με

$$\mathcal{F}^*(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{2\pi i y x} dy. \tag{2.5}$$

3 Εφαρμογή στη μονοδιάστατη κυματική εξίσωση

Έχουμε την εξίσωση $u_{xx} = u_{tt}$, όπου $u = u(x,t)$. Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ισχύει ότι

$$\mathcal{F}(f')(y) = 2iy\pi \mathcal{F}(f)(y), \tag{3.1}$$

άρα

$$\mathcal{F}(u_{xx}) = 2iy\pi \mathcal{F}(u_x) = (2iy\pi)^2 \mathcal{F}(u) = -4y^2\pi^2 \mathcal{F}(u), \tag{3.2}$$

δηλαδή

$$\mathcal{F}(u_{xx})(y) = -4y^2\pi^2 \widehat{u}(y,t). \tag{3.3}$$

Ακόμα,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u_t)(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t) e^{-2\pi i y x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h\to 0} \frac{u(x,t+h) - u(x,t)}{h} e^{-2\pi i y x} dx \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t+h) e^{-2\pi i y x} dx - \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-2\pi i y x} dx \right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} [\widehat{u}(y,t+h) - \widehat{u}(y,t)] \\
&= \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(y,t).
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\mathcal{F}(u_{tt}) = \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}. \tag{3.4}$$

Από την $u_{xx} = u_{tt}$ παίρνουμε $\mathcal{F}(u_{xx}) = \mathcal{F}(u_{tt})$, και χρησιμοποιώντας τις (3.3) και (3.4) γράφουμε την τελευταία ισότητα στη μορφή

$$-4y^2\pi^2\widehat{u}(y,t) = \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}(y,t), \tag{3.5}$$

η οποία είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση 2ης τάξης.

Οπότε,

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}(y,t) + 4\pi^2 y^2 \widehat{u}(y,t) = 0, \tag{3.6}$$

δηλαδή

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}(y,t) - 2i\pi y \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(y,t) + 2i\pi y \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(y,t) + 4\pi^2 y^2 \widehat{u}(y,t) = 0, \tag{3.7}$$

δηλαδή

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}(y,t) - 2i\pi y \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(y,t) + 2i\pi y \left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(y,t) - 2i\pi y \widehat{u}(y,t) \right) = 0, \tag{3.8}$$

δηλαδή

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-2\pi i y t} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(y,t) + 2i\pi y e^{-2i\pi y t} \widehat{u}(y,t) \right] = 0, \tag{3.9}$$

δηλαδή

$$e^{-2\pi i y t} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(y,t) + 2i\pi y e^{-2i\pi y t} \widehat{u}(y,t) = \widehat{g}(y), \tag{3.10}$$

δηλαδή

$$e^{2\pi i y t} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(y,t) + 2i\pi y e^{2i\pi y t} \widehat{u}(y,t) = e^{4i\pi y t}\widehat{g}(y), \tag{3.11}$$

δηλαδή

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{2i\pi y t} \widehat{u}(y,t) \right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{4i\pi y}}{4i\pi y} \widehat{g}(y) \right), \tag{3.12}$$

και αν θέσουμε $4iy\pi\widehat{h}(y) = \widehat{g}(y)$ παίρνουμε

$$e^{2iy\pi}\widehat{u}(y,t) = e^{4iy\pi}\widehat{h}(y) + \widehat{\phi}(y), \tag{3.13}$$

ή αλλιώς,

$$\widehat{u}(y,t) = e^{2i\pi y}\widehat{h}(y) + \widehat{\phi}(y)e^{-2i\pi y}. \tag{3.14}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u}(y,t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(y,t)e^{2\pi iyx}dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{2i\pi y}\widehat{h}(y) + \widehat{\phi}(y)e^{-2i\pi yt}\right) e^{2\pi iyx}dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(y)e^{2i\pi(x+t)}dy + \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(y)e^{-2i\pi y(x-t)}dy \\ &= h(x+t) + \phi(x-t). \end{aligned}$$

<u>Μια άλλη λύση</u>: Έχουμε την εξίσωση $u_{xx} = u_{tt}$.

Έστω $f(x,t) = u_x(x,t) + u_t(x,t)$. Τότε,

$$f_x(x,t) = u_{xx}(x,t) +_{tx} (x,t) = u_{xx}(x,t) + u_{xt}(x,t), \tag{3.15}$$

άρα

$$f_x(x,t) = u_{tt}(x,t) + u_{xt}(x,t) = f_t(x,t). \tag{3.16}$$

Δηλαδή, $f_x = f_t$. Αυτή είναι μια πολύ απλή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, που η γενική της λύση είναι

$$f(x,t) = g(x+t), \tag{3.17}$$

όπου g είναι αυθαίρετη συνάρτηση μιας μεταβλητής. Επομένως, έχουμε την εξίσωση

$$u_x + u_t = g(x+t), \tag{3.18}$$

η οποία είναι επίσης πολύ απλή διαφορική εξίσωση. Η λύση της ομογενούς είναι $h(x-t)$, άρα παίρνουμε

$$u(x,t) = h(x-t) + G(x+t), \tag{3.19}$$

όπου h αυθαίρετη συνάρτηση μιας μεταβλητής, και G συνάρτηση που ικανοποιεί την $2G'(t) = g(t)$ (αυθαίρετη κι αυτή, αφού η g είναι αυθαίρετη).

Υπάρχουν κι άλλοι απλοί τρόποι για την επίλυση της εξίσωσης $u_{xx} = u_{tt}$, οι οποίοι, όπως παρατηρούμε με χαρακτηριστικό παράδειγμα το παραπάνω, είναι αρκετά πιο «εύκολοι» σε σχέση με αυτόν που χρησιμοποιεί το μετασχηματισμό Fourier. Ωστόσο, υπάρχουν εξισώσεις στις οποίες δεν συμβαίνει αυτό, και ο μετασχηματισμός Fourier είναι (πιθανόν) ο μοναδικός τρόπος επίλυσής τους.

Επιπροσθέτως, ένας ακόμα λόγος για την χρησιμότητα του μετασχηματισμού Fourier είναι οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους στις d μεταβλητές, όπου άλλοι τρόποι επίλυσης (όπως, για παράδειγμα, η αλλαγή μεταβλητής) είναι πολύ πιο δύσκολοι.

4 Ο μετασχηματισμός Fourier στον $\mathbb{R}^d$

Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^d$ των d-άδων $x = (x_1, \dots, x_d)$ πραγματικών αριθμών (με $d \geqslant 2$, $d \in \mathbb{N}$). Η πρόσθεση διανυσμάτων και ο πολλαπλασιασμός διανύσματος με πραγματικό αριθμό ορίζονται κατά συντεταγμένες. Ορίζουμε

$$\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}, \tag{4.1}$$

δηλαδή το $\|x\|$ είναι απλώς το μήκος του διανύσματος x με την συνήθη Ευκλείδεια νόρμα. Ακόμα, εφοδιάζουμε τον $\mathbb{R}^d$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από την

$$x \cdot y = \langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_dy_d \tag{4.2}$$

(για $x = (x_1, \dots, x_d)$ και $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$) έτσι ώστε

$$\|x\|^2 = x \cdot x = \langle x, x\rangle. \tag{4.3}$$

Δοθέντος $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ όπου $\alpha_i \in \mathbb{N}$, το μονώνυμο x^α ορίζεται από την

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}. \tag{4.4}$$

Ομοίως, ορίζουμε τον διαφορικό τελεστή $(\partial/\partial x)^\alpha$ από την

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}, \tag{4.5}$$

όπου $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$.

Από την στιγμή που θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^d$, θα πρέπει να συζητήσουμε ορισμένες λεπτομέρειες για την ολοκλήρωση αυτών των συναρτήσεων.

Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ συνεχής. Λέμε ότι η f *φθίνει πολύ γρήγορα* αν για οποιονδήποτε *πολυδείκτη* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ η συνάρτηση $|x^\alpha f(x)|$ είναι φραγμένη. Ισοδύναμα, μια συνεχής συνάρτηση φθίνει πολύ γρήγορα αν

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x|^k |f(x)| < \infty \tag{4.6}$$

για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots$.

4.1 Στοιχειώδης θεωρία του μετασχηματισμού Fourier

Όπως και στον $\mathbb{R}$, θα μελετήσουμε τον μετασχηματισμό Fourier των συναρτήσεων που ανήκουν στον χώρο του Schwartz. Ο χώρος του Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ που είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες στον $\mathbb{R}^d$ και ικανοποιούν την

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta f(x) \right| < \infty \tag{4.7}$$

για όλους τους πολυδείκτες α, β.

Με άλλα λόγια, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ αν και μόνο αν η f και όλες οι παράγωγοί της φθίνουν πολύ γρήγορα. Ένα σημαντικό παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ είναι η d-διάστατη Gaussian $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ με $g(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Ορισμός 4.1. Ο μετασχηματισμός Fourier μιας f που ανήκει στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ορίζεται ως εξής:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{4.8}$$

Γράφουμε και

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \widehat{f}(\xi). \tag{4.9}$$

Ορισμένες βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier είναι οι εξής:

(α) $f(x+h) \longrightarrow \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \langle \xi, h \rangle}$, $h \in \mathbb{R}^d$.

(β) $f(x) e^{-2\pi i \langle x, h \rangle} \longrightarrow \widehat{f}(\xi + h)$, $h \in \mathbb{R}^d$.

(γ) $f(\delta x) \longrightarrow \delta^{-d} \widehat{f}(\delta^{-1}\xi)$, $\delta > 0$.

(δ) $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \longrightarrow (2\pi i \xi)^{\alpha} \widehat{f}(\xi)$.

(ε) $(-2\pi i \xi)^{\alpha} f(x) \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \widehat{f}(\xi)$.

(στ) $f(Rx) \longrightarrow \widehat{f}(R\xi)$, όπου R στροφή.

Παρατήρηση 4.2. Μια *στροφή* στον $\mathbb{R}^d$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός $R : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ που διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο. Με άλλα λόγια,

(i) $R(ax + by) = aR(x) + bR(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$ και $a, b \in \mathbb{R}$.

(ii) $\langle R(x), R(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Ισοδύναμα, η τελευταία συνθήκη μπορεί να αντικατασταθεί από την $\|R(x)\| = \|x\|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$, ή $R^t = R^{-1}$, όπου R^t και R^{-1} είναι ο ανάστροφος και ο αντίστροφος του R αντίστοιχα. Ειδικότερα, έχουμε $\det(R) = \pm 1$, όπου $\det(R)$ είναι η ορίζουσα του R. Αν $\det(R) = 1$ τότε λέμε ότι η R είναι καθαρή στροφή, αλλιώς λέμε ότι είναι μη-καθαρή.

Στο $\mathbb{R}$ υπάρχουν μόνο δύο στροφέσ: η καθαρή $R(x) = x$ και η μη-καθαρή $R(x) = -x$. Αυτό είναι άμεσο, αφού η R πρέπει να είναι της μορφής $R(x) = cx$ και να ικανοποιεί την $|R(x)| = |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $R(x) = x$ ή $R(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Στο $\mathbb{R}^2$ οι στροφές μπορούν να περιγραφούν από μιγαδικούς αριθμούς. Ταυτίζουμε το $\mathbb{R}^2$ με το $\mathbb{C}$ θεωρώντας το σημείο (x, y) ως τον μιγαδικό αριθμό $x + iy$. Στο πλαίσιο αυτό, όλες οι καθαρές στροφές είναι της μορφής $R(z) = ze^{i\phi}$ για κάποιον $\phi \in \mathbb{R}$, και όλες οι μη-καθαρές στροφές είναι της μορφής $R(z) = \overline{z}e^{i\phi}$ για κάποιον $\phi \in \mathbb{R}$ (όπου $\overline{z} = x - iy$).

Δύο άμεσα πορίσματα των ιδιοτήτων (α)-(στ) του μετασχηματισμού Fourier είναι τα εξής:

Πρόταση 4.3. *Ο μετασχηματισμός Fourier απεικονίζει τον χώρο του Schwartz στον εαυτό του.*

Αυτό είναι άμεση συνέπεια των ιδιοτήτων (δ) και (ε) του μετασχηματισμού Fourier.

Πρόταση 4.4. *Ο μετασχηματισμός Fourier μιας ακτινικής συνάρτησης είναι ακτινική συνάρτηση,*

Πράγματι, αν η f είναι ακτινική, δηλαδή $f_R(x) := f(Rx) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ και κάθε στροφή R, τότε

$$\widehat{f}(R\xi) = \widehat{f_R}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \tag{4.10}$$

για κάθε στροφή R και κάθε $\xi \in \mathbb{R}^d$, από την ιδιότητα (στ) του μετασχηματισμού Fourier.

Το επόμενο θεώρημα δίνει τον *τύπο αντιστροφής* για τον μετασχηματισμό Fourier και τον τύπο του Plancherel.

Θεώρημα 4.5. *Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Τότε,*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{4.11}$$

Δηλαδή,

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\xi. \tag{4.12}$$

Επιπλέον,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx. \tag{4.13}$$

Η απόδειξη θα βασιστεί στα επόμενα τρία λήμματα.

Λήμμα 4.6. *Αν $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \widehat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi. \tag{4.14}$$

Απόδειξη. Η (4.14) προκύπτει άμεσα από το θεώρημα Fubini. Πρέπει λοιπόν να διαπιστώσουμε πρώτα αν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Fubini. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \, |\widehat{g}(x)| \, dx &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} g(\xi) d\xi \right| dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(\xi)| \, d\xi \right) dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \, \|g\|_1 \, dx = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Fubini. Άρα,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{g}(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} g(\xi)d\xi\right)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi)\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} g(\xi)\,dx\right)d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi)\widehat{f}(\xi)\,d\xi.\end{aligned}$$

□

Λήμμα 4.7. *Για κάθε* $s>0$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi s\|x\|^2} e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx = s^{-d/2}e^{-\pi\|\xi\|^2/s}. \tag{4.15}$$

Απόδειξη. Υπολογίζουμε πρώτα το αντίστοιχο ολοκλήρωμα στο $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi s x^2} e^{-2\pi i x\xi}dx &= e^{-\pi\xi^2/s}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi}{s}(xs+i\xi)^2}dx\\ &= \frac{1}{s}e^{-\pi\xi^2/s}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi}{s}(y+i\xi)^2}dy\\ &= \frac{1}{s}e^{-\pi\xi^2/s}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u^2/s}du\\ &= \frac{1}{s}e^{-\pi\xi^2/s}\cdot\sqrt{s} = \frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\pi\xi^2/s},\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\pi/a}$, $a>0$, και το θεώρημα του Cauchy για να δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi}{s}(y+i\xi)^2}dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u^2/s}du, \tag{4.16}$$

μεταφέροντας το ολοκλήρωμα από την ευθεία $\mathrm{Im}(z)=\xi$ στην ευθεία $\mathrm{Im}(z)=0$.

Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi s\|x\|^2} e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx &= \prod_{i=1}^{d}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi s x_i^2} e^{-2\pi i x_i\xi_i}dx_i\right)\\ &= \prod_{i=1}^{d}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\pi\xi_i^2/s}\right) = s^{-d/2}e^{-\pi\|\xi\|^2/s}.\end{aligned}$$

□

Λήμμα 4.8. *Έστω $t>0$ και $x\in\mathbb{R}^d$. Θέτουμε*

$$P_t(x)=\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}. \tag{4.17}$$

Τότε, για κάθε $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^d}P_t(x-y)f(y)dy=\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}}f(y)dy\to f(x) \tag{4.18}$$

όταν $t\to 0^+$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 4.7 με $s=\frac{1}{4\pi t}$ και $\xi=0$, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^d}P_t(y)dy=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}dy=1. \tag{4.19}$$

Γράφουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}}f(y)dy-f(x)&=\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}(f(y)-f(x))e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}}dy\\&=\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\Big(\int_{B(x,1)}(f(y)-f(x))e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}}dy\\&+\int_{[B(x,1)]^c}(f(y)-f(x))e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}}dy\Big)\\&=\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}(I_1+I_2),\end{aligned}$$

όπου

$$I_1=\int_{B(x,1)}(f(y)-f(x))e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}}dy \tag{4.20}$$

και

$$I_2=\int_{[B(x,1)]^c}(f(y)-f(x))e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}}dy. \tag{4.21}$$

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες γράφουμε

$$\begin{aligned}|I_2|&\leqslant\int_{[B(x,1)]^c}|f(y)-f(x)|e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}}f(y)dy\\&\leqslant 2\|f\|_\infty\int_{[B(x,1)]^c}e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}}f(y)dy\\&\leqslant 2c_d\|f\|_\infty\int_1^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}}r^{d-1}dr.\end{aligned}$$

Από την στοιχειώδη ανισότητα $e^{-x} \leqslant \frac{C(m)}{x^m}$, η οποία ισχύει για κάθε $x > 0$ και $m > 0$, για $m > d/2$ έχουμε ότι

$$\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}|I_2| \leqslant \frac{C_1(m)}{(4\pi t)^{d/2}}\|f\|_\infty \int_1^\infty \left(\frac{2t}{r^2}\right)^m r^{d-1} dr$$
$$= C_2(m,d)\|f\|_\infty t^{m-d/2} \to 0$$

όταν $t \to 0$. Τώρα, για το I_1, έχουμε (για τυχόν $0 < \varepsilon < 1$)

$$\begin{aligned} |I_1| &\leqslant \int_{B(x,1)} |f(y) - f(x)| e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}} dy \\ &= \int_{B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)| e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}} dy + \int_{B(x,1)\setminus B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)| e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}} dy. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)| e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}} dy &\leqslant \sup_{y\in B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)| \cdot \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{B(x,\varepsilon)} e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}} dy \\ &\leqslant \sup_{y\in B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)| \cdot \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}} dy \\ &= \sup_{y\in B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon', \end{aligned}$$

όπου το ε' μπορούμε να το «μικρύνουμε» όσο θέλουμε μικραίνοντας κατάλληλα το ε που ήταν τυχόν.

Επίσης,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{B(x,1)\setminus B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)| e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}} dy &\leqslant C_1(d) t^{-d/2}\|f\|_\infty \int_{B(x,1)\setminus B(x,\varepsilon)} e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}} dy \\ &\leqslant C_1(d) t^{-d/2}\|f\|_\infty \lambda(B(x,1)) e^{-\frac{\varepsilon^2}{4t}} \to 0 \end{aligned}$$

όταν $t \to 0$, διότι $\lim_{t\to 0} t^{-d/2} e^{-\frac{\varepsilon^2}{4t}} = 0$.

Άρα τελικά,

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}} f(y) dy - f(x) \right| \\ &\qquad = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} |I_1 + I_2| \leqslant \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} |I_1| + \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} |I_2| \\ &\leqslant \varepsilon' + \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} |I_2| \to \varepsilon' \end{aligned}$$

και αφού το ε' ήταν τυχόν,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}} f(y)dy = f(x) \tag{4.22}$$

όπως θέλαμε. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.5. Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} d\xi, \tag{4.23}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} \lim_{t\to 0} e^{-4\pi t\|x\|^2} d\xi \\ &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} e^{-4\pi t\|x\|^2} d\xi, \end{aligned}$$

από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y) e^{-2\pi i\langle y,\xi\rangle} dy &= \int_{\mathbb{R}^d} f(w) e^{-2\pi i\langle w-x,\xi\rangle} dw \\ &= e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\int_{\mathbb{R}^d} f(w) e^{-2\pi i\langle w,\xi\rangle} dw \\ &= e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\widehat{f}(\xi), \end{aligned} \tag{4.24}$$

άρα αν $F(y) = f(x+y)$ τότε $\widehat{F}(\xi) = e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\widehat{f}(\xi)$.

Θέτουμε $G_t(\xi) = e^{-4\pi t\|\xi\|^2}$, και από το Λήμμα 4.7 έχουμε

$$\widehat{G_t}(y) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}}. \tag{4.25}$$

Από το Λήμμα 4.6 και την (4.24) έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} e^{-4\pi t\|x\|^2} d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{F}(\xi) G_t(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} F(y)\widehat{G_t}(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}} dy. \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 4.8 έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\widehat{f}(\xi)e^{-4\pi t\|\xi\|^2}d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}}dy \to f(x) \tag{4.26}$$

όταν $t \to 0$. Άρα τελικά

$$f(x) = \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}}dy = \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi. \tag{4.27}$$

□

Μια πράξη που «ταιριάζει» με τον μετασχηματισμό Fourier είναι η *συνέλιξη*. Αν $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, τότε η συνέλιξη $f * g$ των f και g ορίζεται από την

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy. \tag{4.28}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι αν $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ τότε $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Επίσης, $g * f = f * g$.

Η συνέλιξη είναι μια πολύ σημαντική πράξη για την Ανάλυση σε Ευκλείδειους χώρους. Μία βασική ιδιότητά της είναι ότι ο μετασχηματισμός Fourier μετατρέπει την συνέλιξη σε γινόμενο:

Πρόταση 4.9. *Αν $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\,d\xi \tag{4.29}$$

και

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi). \tag{4.30}$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\overline{\widehat{g}(\xi)} = \overline{\int_{\mathbb{R}^d} g(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx} = \int_{\mathbb{R}^d}\overline{g(x)}e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx = \mathcal{F}^{-1}(\overline{g})(\xi), \tag{4.31}$$

οπότε, από το Λήμμα 4.6,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\,d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\xi)\mathcal{F}^{-1}(\overline{g})(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\overline{g}))(x)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\,dx.\end{aligned}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y-x)g(x)\,dx \right) e^{-2\pi i \langle y,\xi\rangle} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y-x) e^{-2\pi i \langle y,\xi\rangle} dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z) e^{-2\pi i \langle z+x,\xi\rangle} dz \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{-2\pi i \langle x,\xi\rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z) e^{-2\pi i \langle z,\xi\rangle} dz \right) dx \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{-2\pi i \langle x,\xi\rangle} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z) e^{-2\pi i \langle z,\xi\rangle} dz \right) \\
&= \widehat{g}(\xi)\widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

□

5 Η κυματική εξίσωση στον $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$

Ο επόμενος στόχος μας είναι να εφαρμόσουμε αυτά που μάθαμε για τον μετασχηματισμό Fourier στη μελέτη της κυματικής εξίσωσης. Εδώ, για άλλη μια φορά, απλοποιούμε τα πράγματα μένοντας περιορισμένοι στις συναρτήσεις που ανήκουν στο χώρο του Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Σημειώνουμε ότι κάθε περαιτέρω ανάλυση της κυματικής εξίσωσης είναι σημαντικό να επιτρέπει συναρτήσεις που έχουν πολύ πιο γενική συμπεριφορά, και ιδίως που μπορεί να είναι ασυνεχείς. Ωστόσο, αυτό που χάνουμε σε γενικότητα θεωρώντας μόνο την κλάση $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, το κερδίζουμε σε σαφήνεια. Η μελέτη μας σε αυτό το περιορισμένο πλαίσιο θα μας επιτρέψει να εξηγήσουμε ορισμένες βασικές ιδέες στην απλούστερή τους μορφή.

Όπως είδαμε, η μονοδιάστατη κυματική εξίσωση είναι

(5.1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Μια φυσιολογική γενίκευση αυτής της εξίσωσης στον d-διάστατο χώρο είναι η

(5.2) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Σημειώνουμε ότι για $d = 3$ αυτή η εξίσωση καθορίζει την συμπεριφορά των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό (με c την ταχύτητα του φωτός).

Μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c = 1$, καθώς μπορούμε να επαναπροσδιορίσουμε (κάνοντας, για παράδειγμα, την αλλαγή μεταβλητής $t = \sqrt{c}s$) την μεταβλητή t. Επίσης, αν ορίσουμε την *d-διάστατη Λαπλασιανή* μέσω της

(5.3) $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2},$$

τότε η κυματική εξίσωση μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{5.4}$$

Ο στόχος τώρα είναι να βρούμε λύση αυτής της εξίσωσης υπό τις αρχικές συνθήκες $u(x,0) = f(x)$ και $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, όπου $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Προτού λύσουμε το πρόβλημα, σημειώνουμε ότι παρόλο που σκεφτόμαστε την μεταβλητή t σαν χρόνο, δεν περιοριζόμαστε στα $t > 0$. Όπως θα δούμε, οι λύσεις που βρίσκουμε έχουν νόημα για όλα τα $t \in \mathbb{R}$. Αυτό αντανακλά το γεγονός ότι η κυματική εξίσωση μπορεί να αντιστραφεί στο χρόνο.

Η τεχνική που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι παρόμοια με αυτήν της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης. Θα εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό Fourier πάνω στην εξίσωση και θα προκύψει (όπως θα δούμε) μια συνήθης διαφορική εξίσωση την οποία θα μπορούμε εύκολα να λύσουμε.

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t) e^{-2\pi i \langle x,\xi\rangle} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t) e^{-2\pi i \langle x,\xi\rangle} dx_i\right) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_d \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-2\pi i (x_1\xi_1 + \cdots + x_{i-1}\xi_{i-1} + x_{i+1}\xi_{i+1} + \cdots + x_d\xi_d)}\right) \\
&\qquad \times \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t) e^{-2\pi i x_i \xi_i} dx_i\right) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-2\pi i (x_1\xi_1 + \cdots + x_{i-1}\xi_{i-1} + x_{i+1}\xi_{i+1} + \cdots + x_d\xi_d)}\right) \\
&\qquad \times \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,t)(-2\pi i \xi_i) e^{-2\pi i x_i \xi_i} dx_i\right) \\
&= -2\pi i \xi_i \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \langle x,\xi\rangle} dx \\
&= -2\pi i \xi_i \widehat{f}(\xi,t),
\end{aligned}$$

οπότε

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x,t)\right) = -2\pi i \xi_i \mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right) = (-2\pi i \xi_i)^2 \widehat{f}(\xi,t) = -4\pi^2 \xi_i^2 \widehat{f}(\xi,t). \tag{5.5}$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω και εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Fourier στην κυματική εξίσωση έχουμε:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{5.6}$$

άρα

$$\mathcal{F}(\Delta u) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}, \tag{5.7}$$

άρα

$$\mathcal{F}(u_{x_1,x_1}) + \cdots + \mathcal{F}(u_{x_d,x_d}) = \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}, \tag{5.8}$$

άρα

$$-4\pi^2\xi_1^2\widehat{u}(\xi,t) - \cdots - 4\pi^2\xi_d^2\widehat{u}(\xi,t) = \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}. \tag{5.9}$$

Δηλαδή,

$$-4\pi^2\|\xi\|^2\widehat{u}(\xi,t) = \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}. \tag{5.10}$$

Όπως αναφέραμε, η εξίσωση που προέκυψε είναι μια απλή συνήθης διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξησ:

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2} + 4\pi^2\|\xi\|^2\widehat{u}(\xi,t) = 0, \tag{5.11}$$

οπότε, όπως και πριν (στην περίπτωση του $\mathbb{R}$) έχουμε

$$\widehat{u}(\xi,t) = A(\xi)\cos(2\pi\|\xi\|t) + B(\xi)\sin(2\pi\|\xi\|t), \tag{5.12}$$

όπου, για κάθε ξ, οι $A(\xi)$ και $B(\xi)$ είναι άγνωστες συναρτήσεις του ξ που θα προσδιοριστούν με βάση τις αρχικές συνθήκες

$$\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi) \quad \text{και} \quad \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi,0) = \widehat{g}(\xi), \tag{5.13}$$

οπότε έχουμε

$$A(\xi) = \widehat{f}(\xi) \quad \text{και} \quad 2\pi\|\xi\|B(\xi) = \widehat{g}(\xi). \tag{5.14}$$

Έπεται ότι

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi)\cos(2\pi\|\xi\|t) + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi\|\xi\|t)}{2\pi\|\xi\|}. \tag{5.15}$$

και η λύση βρίσκεται αν εφαρμόσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier για τη μεταβλητή $\xi \in \mathbb{R}^d$. Με βάση τα παραπάνω έχουμε ότι: μια λύση για την εξίσωση $\Delta u = u_{tt}$ είναι η

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d}\left[\widehat{f}(\xi)\cos(2\pi\|\xi\|t) + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi\|\xi\|t)}{2\pi\|\xi\|}\right]e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi. \tag{5.16}$$

Αυτό το συμπέρασμα μπορούμε να το «ξαναααποδείξουμε» δείχνοντας ότι πράγματι επαληθεύει την εξίσωση. Έχουμε

$$\Delta u(x,t) = -4\pi^2\|\xi\|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left[\widehat{f}(\xi)\cos(2\pi\|\xi\|t) + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi\|\xi\|t)}{2\pi\|\xi\|}\right] d\xi \tag{5.17}$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= -4\pi^2\|\xi\|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left[\widehat{f}(\xi)\cos(2\pi\|\xi\|t) + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi\|\xi\|t)}{2\pi\|\xi\|}\right] e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} d\xi \\ &= -4\pi^2\|\xi\|^2 u(x,t) = \Delta u(x,t),\end{aligned}$$

και αφού

$$u(x,0) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} d\xi = f(x) \tag{5.18}$$

και $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, η u είναι πράγματι λύση.

Έχοντας αποδείξει την ύπαρξη λύσεων της κυματικής εξίσωσης, προκύπτουν δύο ερωτήματα:

(α) Είναι αυτές οι μοναδικές λύσεις στο χώρο $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$;

(β) Αν ναι, μπορούμε να τις επεκτείνουμε στην γενικότερη κλάση των συναρτήσεων που μπορεί να επαληθεύουν την εξίσωση, δηλαδή στο χώρο $C^2(\mathbb{R}^d)$; Συμβολίζουμε με $C^2(\mathbb{R}^d)$ τον χώρο των συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ για τις οποίες υπάρχουν οι $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, $i = 1, \dots, d$, και είναι συνεχείς.

Οι απαντήσεις και στα δύο ερωτήματα είναι καταφατικές. Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα προκύπτει από το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 5.1. *Έστω ότι $u(x,t) \in C^2(A)$, όπου $A = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^d, t \geqslant 0\}$. Υποθέτουμε ότι η u είναι λύση της $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$ και ότι $u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ για όλα τα $x \in B(x_0, r_0) \subseteq A$. Τότε, $u(x,t) = 0$ για κάθε $(x,t) \in \{(x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : |x - x_0| \leqslant r_0 - t, 0 \leqslant t \leqslant r_0\}$.*

Μια σύντομη απόδειξη του θεωρήματος είναι η εξής: έστω ότι η u παίρνει πραγματικές τιμές. Για κάθε $0 \leqslant t \leqslant r_0$ θέτουμε $B_t(x_0, r_0) = \{x : |x - x_0| \leqslant r_0 - t\}$ και $\nabla u(x,t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d}, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$. Θεωρούμε την

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{B_t(x_0,r_0)} |\nabla u|^2 dx = \frac{1}{2}\int_{B_t(x_0,r_0)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right] dx. \tag{5.19}$$

Παρατηρούμε ότι $E(t) \geqslant 0$ και $E(0) = 0$. Αποδεικνύεται με πράξεις ότι

$$E'(t) = \frac{1}{2}\int_{B_t(x_0,r_0)} \left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right] dx - \frac{1}{2}\int_{\partial B_t(x_0,r_0)} |\nabla u|^2 d\sigma(v). \tag{5.20}$$

Ακόμα έχουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}\right]\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{5.21}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο, το θεώρημα απόκλισης του Gauss και το γεγονός ότι η u επαληθεύει την κυματική εξίσωση, μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$E'(t)=\int_{\partial B_t(x_0,r_0)}\left[\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}v_i\right]d\sigma(v)-\frac{1}{2}\int_{\partial B_t(x_0,r_0)}|\nabla u|^2 d\sigma(v), \tag{5.22}$$

όπου v_i υποδηλώνει την i-οστή συντεταγμένη του $v \in \partial B_t(x_0, r_0)$. Τέλος, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}v_i \leqslant \frac{1}{2}|\nabla u|^2, \tag{5.23}$$

οπότε έχουμε ότι $E'(t) \leqslant 0$, δηλαδή η $E(t)$ είναι φθίνουσα. Αφού $E(t) \geqslant 0$ και $E(0) = 0$, έχουμε ότι $E(t) = 0$, άρα $u = 0$.

Το θεώρημα αυτό δείχνει ότι οι λύσεις στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ που βρήκαμε με τον μετασχηματισμό Fourier είναι μοναδικές στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Τώρα μπορούμε να δούμε και την απάντηση στο ερώτημα (β), η οποία είναι όπως είπαμε καταφατική. Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε θεωρήματα πυκνότητας και το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι ισομετρία από τον L^2 στον L^2 (θεώρημα Plancherel) αφού πρώτα αποδείξουμε ότι ο $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ είναι πυκνός στον L^2.