Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue – 2/9/2015

1. (1.5 μον.) (α) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο περιέχει διάστημα. Δείξτε ότι $\lambda(A) > 0$.

(β) Έστω $\theta \in (0,1)$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με τη διαφορά ότι στο n-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοιχτό διάστημα μήκους $\theta/3^n$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα. Καταλήγουμε σε ένα σύνολο C_θ «τύπου Cantor». Δείξτε ότι το C_θ είναι μετρήσιμο, δεν περιέχει διάστημα και $\lambda(C_\theta) = 1 - \theta > 0$.

2. (1.5 μον.) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα.

(β) Δείξτε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $Z \subset [a,b]$ με $\lambda(Z) = 0$ ισχύει $\lambda(f(Z)) = 0$.

Υπόδειξη. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι κάθε μετρήσιμο $E \subseteq [0,1]$ γράφεται στη μορφή $E = A \cup Z$, όπου το A είναι F_σ-σύνολο και $\lambda(Z) = 0$.

3. (1.5 μον.) (α) Έστω $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = \int f \, d\lambda < \infty.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\lambda = \int_E f \, d\lambda$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο E.

(β) Έστω $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t) - f_n(t)| \, d\lambda(t) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Δείξτε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού.

4. (1 μον.) Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < q < r < \infty$. Δείξτε ότι κάθε $f \in L_q(E)$ γράφεται στην μορφή $f = g + h$ για κάποιες $g \in L_p(E)$ και $h \in L_r(E)$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε το σύνολο $B = \{|f| > 1\}$ και τις $g = f\chi_B$, $h = f - g$.

5. (1 μον.) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι, για κάποιους $\alpha_n > 0$, ισχύουν οι

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda(x) = \alpha_n^2 \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty.$$

Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $E_n = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > \alpha_n\}$ τότε $\lim\limits_{N\to\infty} \lambda\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\right) = 0$.

(β) Η ακολουθία $\frac{f_n(x)}{\alpha_n}$ είναι φραγμένη σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

6. (1 μον.) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$f(x) = f(x+1) = f(x + 2\pi)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

7. (1.5 μον.) Έστω (x_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Για κάθε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ισχύει

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\, d\lambda(t).$$

(β) Για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ισχύει

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{ikx_n} = 0.$$

8. (1.5 μον.) Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} n\|\sigma_n(f) - f\|_1 = 0.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Δείξτε πρώτα ότι για κάθε $k \neq 0$ και $n \geqslant |k|$ ισχύει

$$(\sigma_n \widehat{(f) -} f)(k) = -\frac{|k|}{n} \widehat{f}(k).$$

9. (1.5 μον.) Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f) > 0$ ώστε $|k\widehat{f}(k)| \leqslant C(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(β) Εξετάστε αν $\lim\limits_{|k|\to\infty} |k\widehat{f}(k)| = 0$.

(γ) Εξετάστε αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$.

10. (1 μον.) Χρησιμοποιώντας την 2π-περιοδική περιττή συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x(\pi - x)$ στο $[0, \pi]$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Καλή Επιτυχία!