Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue – 4/6/2016

1. (1.5 μον.) Έστω $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Για κάθε $\varepsilon>0$ ορίζουμε

$$A(\varepsilon)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_n-\frac{\varepsilon}{2^n},q_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

Τέλος, θέτουμε $A=\bigcap_{m=1}^{\infty}A(1/m)$.

(α) Αποδείξτε ότι $\lambda(A(\varepsilon))\leqslant 2\varepsilon$ και συμπεράνατε ότι αν $\varepsilon<\frac{1}{2}$ τότε το $[0,1]\setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.

(β) Αποδείξτε ότι $A\subseteq[0,1]$ και $\lambda(A)=0$.

(γ) Αποδείξτε ότι $\mathbb{Q}\cap[0,1]\subseteq A$ και ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο. [*Υπόδειξη.* Για τον τελευταίο ισχυρισμό θα βοηθήσει το θεώρημα Baire.]

2. (1.5 μον.) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$, τότε η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $\left[\frac{1}{n},1\right]$ για $n=1,2,\ldots$

(β) Δεν ισχύει το αντίστροφο του (α).

(γ) Αν η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ ή αν η f είναι Lebesgue μετρήσιμη και $f\geq 0$, τότε ισχύει

$$\int_0^1 f\,d\lambda=\lim_n\int_{1/n}^1 f\,d\lambda.$$

3. (1.5 μον.) (α) Έστω $f\in L^{\infty}[a,b]$ με $\|f\|_{\infty}>0$. Αποδείξτε ότι:

$$\lim_{n\to\infty}\|f\|_n=\|f\|_{\infty}.$$

(β) Έστω $g_n;[0,1]\to\mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με τις ακόλουθες ιδιότητες: υπάρχει $M>0$ τέτοιος ώστε $|g_n(x)|\leqslant M$ για κάθε n και για κάθε $x\in[0,1]$, και

$$\int_E g_n(x)\,d\lambda(x)\longrightarrow 0$$

για κάθε μετρήσιμο $E\subseteq[0,1]$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $f\in L^1[0,1]$,

$$\int_0^1 f(x)g_n(x)\,d\lambda(x)\longrightarrow 0.$$

4. (2 μον.) Έστω $f\in L^{\infty}(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν η f είναι συνεχής στο 0 τότε

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n}{\pi(1+(nx)^2)}f(x)\,d\lambda(x)=f(0).$$

(β) Σχεδόν για κάθε $y\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n}{\pi(1+n^2(x-y)^2)}f(x)\,d\lambda(x)=f(y).$$

[*Υπόδειξη.* Χρησιμοποιήστε την $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi(1+u^2)}\,du=1$.]

5. (1.5 μον.) Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(α) Αποδείξτε ότι $\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+k^2)|\widehat{f}(k)|^2 < \infty$.

(β) Αποδείξτε ότι $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)| < +\infty$.

(γ) Αποδείξτε ότι $s_n(f) \to f$ ομοιόμορφα.

6. (1.5 μον.) (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$. Αν (k_n) είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και (t_n) είναι τυχούσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos^2(k_n x + t_n)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

(β) Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_1 = 0.$$

7. (1.5 μον.) Έστω $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{(\pi-x)^2}{4}$. Αποδείξτε ότι

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$$

για κάθε $x \in [0, 2\pi]$, και υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^3} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}.$$

8. (2 μον.) (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση με

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' δείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

(β) Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Ορίζουμε

$$F(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x)|^2}{n} \right)^{1/2}.$$

Δείξτε ότι $F \in L^2(\mathbb{T})$ και $\|F\|_2 \leqslant \|f\|_2$. Ειδικότερα, $F(x) < \infty$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

Καλή Επιτυχία!