Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue – 30/6/2016

1. (1.5 μον.) (α) Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε $\lambda(E \cap I) \geqslant \alpha\,\lambda(I)$ για κάθε διάστημα $I \subseteq [0,1]$. Αποδείξτε ότι $\lambda(E) = 1$.

(β)* Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \mathrm{dist}(x, E) = \inf\{|x - t| : t \in E\}.$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \to y} \frac{g(x)}{|x - y|} = 0$$

σχεδόν για κάθε $y \in E$.

2. (1 μον.) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Αποδείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα.

(β) Αποδείξτε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subset [a,b]$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει $\lambda(f(A)) = 0$.

3. (1.5 μον.) (α) Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, και ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda.$$

Αποδείξτε ότι $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

(β) Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) < \infty$, και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $M > 0$ και $p > 1$ τέτοιοι ώστε, για κάθε $t > 0$,

$$\lambda(\{x \in E : |f(x)| \geqslant t\}) \leqslant \frac{M}{t^p}.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

4. (1 μον.) Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 < p < \infty$ και q ο συζυγής εκθέτης του p. Αν $f_n \to f$ στον $L_p(E)$ και $g_n \to g$ στον $L_q(E)$, δείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ στον $L_1(E)$.

5. (1 μον.) Έστω A, B μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$ και $\lambda(B) > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\lambda(A \cap (x + B)) > 0.$$

[*Υπόδειξη.* Μπορείτε να υποθέσετε ότι τα A και B είναι φραγμένα. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini «υπολογίστε» το ολοκλήρωμα της $\chi_A * \chi_{-B}$ με δύο τρόπους.]

6. (1 μον.) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$S(f,x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

7.* (1 μον.) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\phi(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & |x| \leqslant 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι: αν $f \in L_1(\mathbb{R})$ τότε

$$f_n(x) := n \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\phi(ny)\, d\lambda(y) \longrightarrow 0$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

8. (1.5 μον.) (α) Ορίζουμε $K_n(x) = 2F_{2n}(x) - F_n(x)$, όπου F_m είναι ο m-οστός πυρήνας του Féjer. Αποδείξτε ότι:

$$\widehat{K_n}(k) = \begin{cases} 1 & , \text{ αν } |k| \leqslant n-1 \\ 2 - \frac{|k|}{n} & , \text{ αν } n \leqslant |k| \leqslant 2n-1 \\ 0 & , \text{ αν } |k| \geqslant 2n. \end{cases}$$

(β) Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι τα πολυώνυμα $p_n(f) := f * K_n$ έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\|p_n\|_1 \leqslant 3\|f\|_1, \qquad \widehat{p_n}(k) = \widehat{f}(k) \text{ αν } |k| \leqslant n-1, \qquad \widehat{p_n}(k) = 0 \text{ αν } |k| \geqslant 2n.$$

(γ) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι $\|f - p_n(f)\|_\infty \to 0$.

9. (1.5 μον.) (α) Δίνονται $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k e^{ikx}$. Δείξτε ότι

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [0, 2\pi]\} \geq \sqrt{n}.$$

(β) Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$.

10. (1 μον.) Έστω C ένα συμπαγές υποσύνολο του $L_2(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$|\widehat{g}(k)| \leqslant \varepsilon \text{ για κάθε } g \in C \text{ και για κάθε } k \in \mathbb{Z} \text{ με } |k| \geqslant n.$$

[*Υπόδειξη*. Το C είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του $L_2(\mathbb{T})$: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $N \in \mathbb{N}$ και $f_1, \ldots, f_N \in L_2(\mathbb{T})$ τέτοιες ώστε για κάθε $g \in C$ να ισχύει $\min_{1 \leqslant i \leqslant N} \|g - f_i\|_2 \leqslant \varepsilon/2$.]

Καλή Επιτυχία!