Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue – 14/9/2016

1. (1.5 μον.) Έστω A και B δύο μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

(α) Υποθέτουμε ότι για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$ ισχύει $\lambda(A \cap (a,b)) \leqslant \frac{b-a}{2}$. Αποδείξτε ότι $\lambda(A) = 0$.

(β) Υποθέτουμε ότι $\lambda(B) = 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο $C \subseteq B$ με $\lambda(C) = \frac{1}{2}$.

2. (1.5 μον.) (α) Βρείτε μια αύξουσα ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $\phi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ η οποία να συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f(x) = x$, $x \in [0,1]$.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο $L = \{x \in A : \text{ η ακολουθία } (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνει } \}$ είναι μετρήσιμο.

3. (1.5 μον.) (α) Σωστό ή λάθος; Αν $f, g \in L_1(0,\infty)$ τότε $fg \in L_1(0,\infty)$.

(β) Έστω $f \in L_1(\mathbb{R})$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $E_n = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \geqslant n\}$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \lambda(E_n) = 0$.

4. (1.5 μον.) Έστω $f \in L_\infty[a,b]$ με $\|f\|_\infty > 0$. Αποδείξτε ότι:

(α) $\lim\limits_{n\to\infty} \|f\|_n = \|f\|_\infty$.

(β) Αν $\gamma_n = \int_a^b |f(x)|^n d\lambda(x)$ τοτε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \|f\|_\infty$.

[*Υπόδειξη*. Για το (β) ίσως βοηθήσει να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα Holder ξεκινώντας από το ολοκλήρωμα γ_n.]

5. (1 μον.) Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $f(x+\pi) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε περιττό ακέραιο k.

(β) Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

6. (2 μον.) (α) Έστω $0 < \alpha \leqslant 1$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-περιοδική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε, για κάθε $k \geqslant 1$,

$$|a_k(f)| \leqslant \frac{C}{k^\alpha} \qquad \text{και} \qquad |b_k(f)| \leqslant \frac{C}{k^\alpha}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

7. (1.5 μον.) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση και έστω $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συναρτήσεων $K_n \in L_1(\mathbb{R})$ με τις εξής ιδιότητες:

1. Υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|K_n\|_1 \leqslant M$ για κάθε $n \geqslant 1$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \int K_n(x)\, d\lambda(x) = 1$.
3. Για κάθε $\delta > 0$ ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\{x:|x|>\delta\}} |K_n(x)|\, d\lambda(x) = 0$.

Αποδείξτε ότι $K_n * f \xrightarrow{\text{ομ}} f$ καθώς το $n \to \infty$.

8. (1.5 μον.) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x + k\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\, dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [*Υπόδειξη*. Αποδείξτε πρώτα το ζητούμενο για την $f_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$.]

Καλή Επιτυχία!