Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue
Ενδιάμεση Εξέταση – Δευτέρα 6 Μαΐου 2019

---

1. (2μ) (α) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$. Αποδείξτε ότι για κάθε $B \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq B$ ισχύει
$$\lambda^*(B \setminus A) = \lambda^*(B) - \lambda(A).$$
(β) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B) < \infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα E, F τέτοια ώστε $A \subseteq E$, $B \subseteq F$ και $\lambda(E \cap F) = 0$.

2. (2μ) (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα.

(β) Δώστε παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που απεικονίζει κάποιο μετρήσιμο σύνολο σε μη μετρήσιμο σύνολο.

3. (2μ) (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε: για κάθε $Z \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ το σύνολο $\phi^{-1}(Z)$ είναι μετρήσιμο. Αποδείξτε ότι η $f \circ \phi$ είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$, και $f : A \to [0, \infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $G : (0, \infty) \to [0, \infty)$ με
$$G(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} k\varepsilon \cdot \lambda(\{x \in A : k\varepsilon \leqslant f(x) < (k+1)\varepsilon\}).$$
Αποδείξτε ότι
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} G(\varepsilon) = \int_A f \, d\lambda.$$

4. (2μ) (α) Έστω $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, d\lambda < \infty$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν παντού και ότι η συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ είναι ολοκληρώσιμη, με
$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda.$$
(β) Έστω $1 \leqslant p \leqslant \infty$ και $f \in L^p[0, \infty)$. Αποδείξτε ότι
$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-nx} \, dx \longrightarrow 0$$
όταν $n \to \infty$. [*Υπόδειξη:* Εξετάστε τις περιπτώσεις $p = 1$ και $1 < p < \infty$ χωριστά.]

5. (2.5μ) (α) Έστω $f_n, f \in L^1(\mathbb{R})$ τέτοιες ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο και $\|f_n\|_1 \longrightarrow \|f\|_1$. Αποδείξτε ότι $\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$ όταν $n \to \infty$.
(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Υπολογίστε το
$$\lim_{t \to \infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) + f(x)| \, d\lambda(x).$$
[*Υπόδειξη:* Προσεγγίστε την f με συνεχείς συναρτήσεις που έχουν συμπαγή φορέα.]

6. (2μ) (α) Έστω $p > 1$ και $f_n \in L^p[0, 1]$ τέτοιες ώστε $\|f_n\|_p \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $E \subseteq [0, 1]$ μετρήσιμο και $\lambda(E) < \delta$ τότε $\int_E |f_n| d\lambda < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Έστω $f \in L^1((0, 1))$. Για $x \in (0, 1)$ ορίζουμε $g(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t} \, dt$. Αποδείξτε ότι $g \in L^1((0, 1))$ και $\int_0^1 g \, d\lambda = \int_0^1 f \, d\lambda$.

Καλή Επιτυχία!