Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue – 10 Μαΐου 2021

Μέρος Α

Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση παίρνει 3 μονάδες. Απόδειξη ή αντιπαράδειγμα, ανάλογα με την περίπτωση, παίρνει 7 μονάδες. Σύνολο: 60 μονάδες. Χρόνος: 70 λεπτά.

Α-1. Αν (A_n) είναι μια ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ τέτοια ώστε $\lambda(A_n) \leqslant \frac{1}{2}$ για κάθε $n \geqslant 1$, τότε $\lambda(\limsup A_n) \leqslant \frac{1}{2}$.

Α-2. Υπάρχει ανοικτό $G \subseteq [0,1]$ με (όλες) τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Το G είναι πυκνό στο $[0,1]$.

(ii) $\lambda(G) < 1$.

(iii) Για κάθε $a < b$ στο $[0,1]$ ισχύει $\lambda(G \cap (a,b)) > 0$.

Α-3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in A\}$ είναι μετρήσιμο.

Α-4. Υπάρχει ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to [0,+\infty)$ με την ιδιότητα ότι $f_n \longrightarrow 0$ σχεδόν παντού αλλά $\int_0^1 f_n \, d\lambda \longrightarrow +\infty$.

Α-5. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε ανοικτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει

$$\left| \int_I f \, d\lambda \right| \leqslant \big(\lambda(I)\big)^2.$$

Τότε $f(x) = 0$ λ-σχεδόν παντού.

Α-6. Έστω $1 \leqslant p < \infty$ και $f \in L^p(\mathbb{R})$. Τότε,

$$\lim_{t \to +\infty} t^p \lambda(\{x : |f(x)| > t\}) = 0.$$