**Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue – 10 Μαΐου 2021**

**Μέρος Β**

**Καθένα από τα παρακάτω προβλήματα παίρνει 20 μονάδες. Σε ερωτήματα τύπου «σωστό ή λάθος» ζητείται πλήρης αιτιολόγηση: απόδειξη ή αντιπαράδειγμα. Σύνολο: 120 μονάδες. Χρόνος: 80 λεπτά.**

**Α-1.** Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: υπάρχει ανοικτό $G \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq G$ και $G \cap B = \varnothing$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποδείξτε ότι: αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\mathrm{dist}(A, B) > 0$ τότε

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

[*Υπόδειξη*: Θεωρήστε το $G_t := \{x : \mathrm{dist}(x, A) < t\}$ για $0 < t < \mathrm{dist}(A, B)$.]

**Α-2.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Αποδείξτε ότι η $f$ απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα. [Μπορείτε να θεωρήσετε γνωστό το ότι μια Lipschitz συνεχής συνάρτηση απεικονίζει σύνολα μηδενικού μέτρου σε σύνολα μηδενικού μέτρου.]

**Α-3.** Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} |f(n+x)| d\lambda(x) < \infty$ και στη συνέχεια αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f(n+x) = 0$ σχεδόν για κάθε $x \in [0,1]$. Ισχύει το ίδιο σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

**Α-4.** Έστω $p \geqslant 1$ και $f_n : (0,1) \to (0,+\infty)$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε (α) $f_n(x) \longrightarrow 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ και (β) $x^{1/p} f_n(x) \leqslant 1$ για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε $x \in (0,1)$. Αποδείξτε ότι αν κάνουμε την ισχυρότερη υπόθεση ότι $p > 1$ τότε

$$\int_0^1 f_n d\lambda \longrightarrow 0$$

όταν $n \to \infty$. Ισχύει το ίδιο αν $p = 1$;

**Α-5.** Έστω $f_n, f : [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες, τέτοιες ώστε $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$ και

$$\int_0^1 |f_n|^2 \, d\lambda \leqslant 1$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 |f_n - f| \, d\lambda \to 0.$$

**Α-6.** Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη και συνεχής. Αποδείξτε ότι η συνέλιξη $f * \varphi$ των $f$ και $\varphi$ είναι φραγμένη και συνεχής.