Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue – 11 Ιουνίου 2021

(Απαλλακτική εξέταση πάνω σε όλη την ύλη – 14:00-16:00)

Καθένα από τα παρακάτω προβλήματα παίρνει 20 μονάδες.

1. (α) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$. Αποδείξτε ότι για κάθε $B \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq B$ ισχύει

$$\lambda^*(B \setminus A) = \lambda^*(B) - \lambda(A).$$

(β) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B) < \infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα E, F τέτοια ώστε $A \subseteq E$, $B \subseteq F$ και $\lambda(E \cap F) = 0$.

2. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ώστε $f_n \to 0$ κατά σημείο. Με κάθε μία από τις παρακάτω τρεις συνθήκες, εξετάστε αν ισχύει $\int f_n \, d\lambda \to 0$.

(i) $|f_n| \leqslant 1$ και $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}) \leqslant 1$ για κάθε n.

(ii) $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε n.

(iii) $f_n \geqslant 0$ και $\int f_n \, d\lambda \leqslant 1$ για κάθε n.

3. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $[0, 1]$ με $\lambda(E) > 0$.

(α) Αποδείξτε ότι η $\chi_E * \chi_E$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|x| < \varepsilon$ τότε $\lambda(E \cap (E + x)) > 0$.

4. Υπολογίστε τη σειρά Fourier της $f(x) = |\sin x|$ και αποδείξτε ότι

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Lipschitz συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση. Αποδείξτε ότι:

(α) Υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε $|k\widehat{f}(k)| \leqslant \alpha$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(β) Υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|s_n(f)\|_\infty \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

6. Ορίζουμε $Q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $Q_n(x) = \frac{1}{\gamma_n}(1 - x^2)^n \, \chi_{[-1,1]}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, όπου $\gamma_n = \int_{-1}^{1}(1 - t^2)^n dt$. Αποδείξτε πλήρως ότι η $\{Q_n\}_{n \geqslant 1}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων και ότι $f * Q_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα για κάθε φραγμένη ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.