Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue – 11 Ιουνίου 2021

(Απαλλακτική εξέταση στην Ανάλυση Fourier – 14:00-16:00)

Καθένα από τα παρακάτω προβλήματα παίρνει 20 μονάδες.

1. Υπολογίστε τη σειρά Fourier της $f(x) = |\sin x|$ και αποδείξτε ότι

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

2. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\alpha/\pi \notin \mathbb{Z}$. Ορίζουμε $f(t) = e^{i\alpha t/\pi}$, $t \in [-\pi, \pi)$ και επεκτείνουμε 2π-περιοδικά. Αποδείξτε ότι

$$\widehat{f}(k) = \frac{\sin(\alpha - k\pi)}{\alpha - k\pi}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και στη συνέχεια ότι

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\alpha - k\pi)^2}.$$

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Lipschitz συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση. Αποδείξτε ότι:

(α) Υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε $|k\widehat{f}(k)| \leqslant \alpha$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(β) Υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|s_n(f)\|_\infty \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4. Ορίζουμε $Q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $Q_n(x) = \frac{1}{\gamma_n}(1-x^2)^n\,\chi_{[-1,1]}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, όπου $\gamma_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt$. Αποδείξτε πλήρως ότι η $\{Q_n\}_{n\geqslant 1}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων και ότι $f * Q_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα για κάθε φραγμένη ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

5. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} n\|\sigma_n(f) - f\|_1 = 0.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

6. Έστω $E \subseteq [0, 2\pi]$ με $\lambda(E) > 0$. Έστω $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$a_n\cos nx + b_n\sin nx \longrightarrow 0$$

για κάθε $x \in E$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

[*Υπόδειξη:* Αποδείξτε αρχικά ότι υπάρχουν $\vartheta_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $a_n\cos nx + b_n\sin nx = r_n\cos(nx - \vartheta_n)$, όπου $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.]