Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue – 11 Ιουνίου 2021

(Απαλλακτική εξέταση πάνω σε όλη την ύλη – 17:00-19:00)

Καθένα από τα παρακάτω προβλήματα παίρνει 20 μονάδες.

1. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subseteq E$ τέτοιο ώστε: $\lambda(E \setminus F) < \varepsilon$ και η f είναι φραγμένη στο F.

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $C_1 > 0$ ώστε, για κάθε $t > 0$, $\lambda(\{x : |f(x)| \geq t\}) \leqslant \frac{C_1}{t^2}$. Αποδείξτε ότι: υπάρχει $C_2 > 0$ ώστε, για κάθε μετρήσιμο E με $0 < \lambda(E) < \infty$,

$$\int_E |f| \, d\lambda \leqslant C_2 \sqrt{\lambda(E)}.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την

$$\int_E |f| d\lambda = \int_0^\infty \lambda(\{x \in E : |f(x)| \geqslant t\}) dt.$$

3. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f(n^2 x)$ συγκλίνει λ-σχεδόν παντού. *Υπόδειξη:* Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την

$$\int |f(tx)| d\lambda(x) = \frac{1}{t} \int |f(x)| d\lambda(x), \qquad t > 0.$$

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο, με $\lambda(A) < \infty$. Αποδείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το σύνολο $D(x) = \{n \in \mathbb{N} : n^2 x \in A\}$ είναι πεπερασμένο.

4. Υπολογίστε τη σειρά Fourier της $f(x) = |\sin x|$ και αποδείξτε ότι

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

5. Για κάθε $\delta > 0$ ορίζουμε $\varphi_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\varphi_\delta(y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta^2}} e^{-y^2/4\delta^2}.$$

Αποδείξτε ότι η οικογένεια $(\varphi_\delta)_{\delta>0}$ είναι προσέγγιση της μονάδας. Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι $f * \varphi_\delta \longrightarrow f$ ομοιόμορφα, καθώς το $\delta \to 0^+$, για κάθε φραγμένη ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

6. (α) Έστω $f \in L_\infty(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $|k\widehat{f}(k)| \leqslant A$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι, για κάθε n και για κάθε $x \in \mathbb{T}$ ισχύει

$$|s_n(f, x)| \leqslant \|f\|_\infty + 2A.$$

(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f' \in L^2(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^\infty |\widehat{f}(k)| \leqslant \|f\|_1 + 2\|f'\|_2.$$