Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue – 11 Ιουνίου 2021

(Απαλλακτική εξέταση στην Ανάλυση Fourier – 17:00-19:00)

Καθένα από τα παρακάτω προβλήματα παίρνει 20 μονάδες.

1. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αντίστροφα, αν η f είναι συνεχής και $\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, αποδείξτε ότι η f παίρνει πραγματικές τιμές.

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$. Αν (k_n) είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και (t_n) είναι τυχούσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos^4(k_n x + t_n)\, dx.$$

3. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\alpha/\pi \notin \mathbb{Z}$. Ορίζουμε $f(t) = e^{i\alpha t/\pi}$, $t \in [-\pi, \pi)$ και επεκτείνουμε 2π-περιοδικά. Αποδείξτε ότι

$$\widehat{f}(k) = \frac{\sin(\alpha - k\pi)}{\alpha - k\pi}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και στη συνέχεια ότι

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha - k\pi)^2}.$$

4. (α) Έστω $f \in L_\infty(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $|k\widehat{f}(k)| \leqslant A$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι, για κάθε n και για κάθε $x \in \mathbb{T}$ ισχύει

$$|s_n(f, x)| \leqslant \|f\|_\infty + 2A.$$

(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f' \in L^2(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| \leqslant \|f\|_1 + 2\|f'\|_2.$$

5. Για κάθε $\delta > 0$ ορίζουμε $\varphi_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\varphi_\delta(y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta^2}} e^{-y^2/4\delta^2}.$$

Αποδείξτε ότι η οικογένεια $(\varphi_\delta)_{\delta>0}$ είναι προσέγγιση της μονάδας. Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι $f * \varphi_\delta \longrightarrow f$ ομοιόμορφα, καθώς το $\delta \to 0^+$, για κάθε φραγμένη ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

6. Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $f_t(x) = f(x - t)$, $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\|f_t - f\|_2^2 = 4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sin^2\left(\frac{kt}{2}\right) |\widehat{f}(k)|^2.$$

Στη συνέχεια αποδείξτε ότι αν η f δεν είναι σχεδόν παντού σταθερή τότε

$$\liminf_{t\to 0} \frac{\|f_t - f\|_2}{|t|} > 0.$$