Ασκήσεις ΙΙΙ: Ολοκλήρωμα Lebesgue
13 Ιανουαρίου 2010

Άσκηση 20 Δείξτε ότι αν $f_n : [0,1] \to [0,1]$ είναι συνεχείς και το όριο $f(t) = \lim_n f_n(t)$ υπάρχει, τότε $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$ και $\lim_n \int f_n = \int \lim_n f$.

Άσκηση 21 Ένα υποσύνολο A του $[a,b]$ θα λέγεται *μετρήσιμο*[1] αν $\chi_A \in \mathcal{L}^1([a,b])$ (γράφουμε $A \in \mathcal{M}[a,b]$). Δείξτε ότι
(α) αν $A \in \mathcal{M}[a,b]$ τότε $A^c \in \mathcal{M}[a,b]$.
(β) Αν $A_n \in \mathcal{M}[a,b]\,(n = 1,2,\dots)$ τότε $\cup_n A_n \in \mathcal{M}[a,b]$ και $\cap_n A_n \in \mathcal{M}[a,b]$. Μπορούμε να συμπεράνουμε το ίδιο για υπεραριθμήσιμο πλήθος συνόλων;
(γ) Αν $A \subseteq [a,b]$ είναι ανοικτό ή κλειστό, τότε $A \in \mathcal{M}[a,b]$.

Άσκηση 22 Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ θα λέγεται *μετρήσιμο* αν για κάθε $a \le b$, το σύνολο $A \cap [a,b]$ ανήκει στο $\mathcal{M}[a,b]$ (γράφουμε $A \in \mathcal{M}$). Δείξτε ότι
(α) αν $A \in \mathcal{M}$ τότε $A^c \in \mathcal{M}$.
(β) Αν $A_n \in \mathcal{M}\,(n = 1,2,\dots)$ τότε $\cup_n A_n \in \mathcal{M}$ και $\cap_n A_n \in \mathcal{M}$.
(γ) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό ή κλειστό, τότε $A \in \mathcal{M}$.

Άσκηση 23 (α) Δείξτε ότι $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και ότι $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.
(β) Δείξτε ότι $\mathcal{L}^2([a,b]) \subseteq \mathcal{L}^1([a,b])$ αλλά ότι $\mathcal{L}^1([a,b]) \not\subseteq \mathcal{L}^2([a,b])$.
(γ) Αν $\mathcal{BL} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ φραγμένη και $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})\}$, δείξτε ότι ο χώρος $\mathcal{BL}$ περιέχεται στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ και είναι πυκνός και στους δύο, δηλαδή αν $f_i \in \mathcal{L}^i(\mathbb{R})\,(i = 1,2)$ και $\epsilon > 0$, υπάρχουν $g_i \in \mathcal{BL}$ με $\|f_i - g_i\|_i < \epsilon$.

Άσκηση 24 Αν $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και $x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι η συνάρτηση $f_x = \chi_{(-\infty,x]} f$ ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Δείξτε επίσης ότι η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

$$F(x) = \int f_x \equiv \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

είναι συνεχής.

Άσκηση 25 Αν $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ να δειχθεί ότι

$$\lim_{x \to 0} \int |f(t-x) - f(t)|\, dt = 0.$$

Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα την περίπτωση που η f είναι συνεχής με συμπαγή φορέα.

Άσκηση 26 Αν $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και $\xi \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι η συνάρτηση $h_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με $h(t) = \exp(it\xi)f(t)$ ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Δείξτε επίσης ότι η συνάρτηση $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

$$\hat{f}(\xi) = \int f(t) \exp(-it\xi)dt$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (η $\hat{f}$ ονομάζεται ο *μετασχηματισμός Fouier* της f). Τέλος, δείξτε ότι αν η g με $g(x) = xf(x)$ ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, τότε η $\hat{f}$ είναι παραγωγίσιμη. !

Άσκηση 27 Λέμε ότι μια $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *μηδενίζεται στο άπειρο* αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $K_\epsilon \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές ώστε για κάθε $t \in K_\epsilon^c$ να ισχύει $|f(t)| < \epsilon$. Αποδείξτε ότι ο χώρος $C_o(\mathbb{R})$ των *συνεχών* συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που μηδενίζονται στο άπειρο είναι πυκνός υπόχωρος του $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και του $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ (με την έννοια της Άσκησης 23). **ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ!**

[1] Ο ορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με τον συνηθισμένο μόνο για *φραγμένα* υποσύνολα του $\mathbb{R}$.