Ασκήσεις IV: Ολοκλήρωμα Lebesgue
12 Ιανουαρίου 2010

Άσκηση 28 (Συνέχεια της Ασκ. 21) Αν $A \in \mathcal{M}[a,b]$ ορίζουμε $m(A) = \|\chi_A\|_1$. Αν $A_n \in \mathcal{M}[a,b]$, $n = 1, 2, \ldots$ είναι ξένα ανά δύο, δείξτε ότι

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Άσκηση 29 Δεν είναι αλήθεια ότι ο χώρος $C_0(\mathbb{R})$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Για παράδειγμα (Ε.Ν.) η συνάρτηση που ισούται με 1 στο $[-1,1]$ και με $\frac{1}{|x|}$ στο $[-1,1]^c$ πάει στο 0 καθώς $|x| \to \infty$, αλλά δεν ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Αντίθετα, η $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ είναι εντάξει (γιατί;). Δείξτε ότι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που τείνουν στο 0 καθώς $|x| \to \infty$ «αρκετά γρήγορα» (ορισμός: μια f τείνει στο 0 καθώς $|x| \to \infty$ «αρκετά γρήγορα» όταν $\sup_{x\in\mathbb{R}} |p(x)f(x)| < \infty$ για κάθε πολυώνυμο p) είναι πυκνός υπόχωρος του $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και του $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Άσκηση 30 Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ και $t \in \mathbb{R}$, ορίζω $f_t(x) = f(x-t)$. Δείξτε ότι αν $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ τότε $f_t \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και $\|f_t\|_1 = \|f\|_1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. (Λέμε ότι η ομάδα $\mathbb{R}$ δρα ισομετρικά στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.) Δείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για τον $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Άσκηση 31 Ορίζουμε πρόσθεση (mod 1) στο $[0,1)$ ως εξής:

$$a \dot{+} b = \begin{cases} a+b, & \text{αν } a+b < 1 \\ a+b-1, & \text{αν } a+b \geq 1 \end{cases}$$

(Παρατήρησε ότι $\exp(2\pi i(a \dot{+} b)) = \exp(2\pi i a)\exp(2\pi i b)$. Έτσι το $([0,1), \dot{+})$ αποκτά τη δομή αβελιανής ομάδας ισόμορφης με τον κύκλο S^1.)

(*i*) Αν $A \subseteq [0,1)$ και $x \in [0,1)$, θέτουμε $A_x = \{a \dot{+} x : a \in A\}$.

Δείξτε ότι το A είναι μετρήσιμο (δηλαδή $\chi_A \in \mathcal{L}^1([0,1))$) αν και μόνον αν κάθε A_x είναι μετρήσιμο και ότι $\|\chi_A\|_1 = \|\chi_{A_x}\|_1$. [Υπόδειξη: αν $A_1 = A \cap [0, 1-x)$ και $A_2 = A \cap [1-x, 1)$ τότε τα A_1, A_2 είναι ξένα και $A_x = (A_1 + x) \cup (A_2 + (x-1))$.]

(*ii*) Έστω $F \subseteq [0,1)$ με τις ιδιότητες:

(α) Αν $p, q \in \mathbb{Q}_1 \equiv \mathbb{Q} \cap [0,1)$ και $p \neq q$ τότε $F_q \cap F_p = \emptyset$ και

(β) $\bigcup\limits_{q\in\mathbb{Q}_1} F_q = [0,1)$.

Δείξτε ότι η χ_F δεν ανήκει στον $\mathcal{L}^1([0,1))$.

Άσκηση 32 Μια *μη αρνητική συνάρτηση* f ανήκει στον $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ αν και μόνον αν η f^2 ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Υπάρχει όμως $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ ώστε $f^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ αλλά $f \notin \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$: θεωρείστε για παράδειγμα την $f = 2\chi_F - 1$ για κατάλληλο $F \subseteq \mathbb{R}$.