Προτάσεις για Εργασίες στις Σειρές Fourier
8 Νοεμβρίου 2009

1. Ισοκατανεμημένες ακολουθίες αριθμών Αν $x \in \mathbb{R}$ θέτουμε $\langle x \rangle = x - [x] \in [0, 1)$, όπου $[x]$ το ακέραιο μέρος του x. Έστω $a \notin \mathbb{Q}$. Στόχος: να δείξουμε ότι η ακολουθία

$$(x_n) = (\langle x \rangle, \langle 2x \rangle, \langle 3x \rangle, \dots)$$

είναι όχι μόνο πυκνή (γιατί;) στο $[0, 1]$ αλλά *ισοκατανεμημένη* με την ακόλουθη έννοια:

(α) Να δειχθεί ότι:

Για κάθε διάστημα $[a, b] \subseteq [0, 1]$, «το ποσοστό των όρων της (x_n) που βρίσκονται στο $[a, b]$ τείνει προς το μήκος του $[a, b]$». Ακριβέστερα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{m \in [1, n] : x_m \in [a, b]\} = b - a$$

όπου με $\#A$ συμβολίσαμε το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου A.

(β) Να δειχθεί ότι:

Αν $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής (εδώ, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$), τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} f(e^{2\pi imx}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})dt.$$

Υπόδειξη: Ίσως διευκολύνει να δείξει κανείς πρώτα το (β).

Βιβλιογραφία: [1, 1.7.6], [2, Κεφ. 3]

2. Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα Από όλες τις κλειστές απλές λείες καμπύλες στο επίπεδο με το ίδιο μήκος, ο κύκλος περικλείει την επιφάνεια με το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Ακριβέστερα: Αν $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ είναι μια C^1-καμπύλη που είναι:

- κλειστή, δηλ. $\gamma(0) = \gamma(1)$
- απλή (δεν τέμνει τον εαυτό της), δηλ. αν $\gamma(t) = \gamma(s)$ και $t \neq s$ τότε ή $t = 0$ και $s = 1$, ή $s = 0$ και $t = 1$
- μήκους 1, δηλ. $\displaystyle\int_0^1 (x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2} dt = 1$,

τότε το εμβαδόν E που περικλείει η γ ικανοποιεί $E \leq \frac{1}{4\pi}$ και ισότητα ισχύει αν και μόνον αν η γ είναι κύκλος.

Βιβλιογραφία: [1, 1.7.7], [2, Κεφ. 3]

3. Πουθενά παραγωγίσιμες συναρτήσεις Αν

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sin((n!)^2 t)$$

η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και άρα ορίζει συνεχή συνάρτηση. Όμως η f όχι μόνον δεν παραγωγίζεται σε *κανένα* σημείο, αλλά:

Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία (t_n) με

$$t_n \to t \quad \text{αλλά} \quad \lim_n \left| \frac{f(t_n) - f(t)}{t_n - t} \right| = \infty.$$

Βιβλιογραφία: [2, Κεφ. 11]

4. Το φαινόμενο Gibbs Υπάρχει θετικός αριθμός δ ώστε:
Αν $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ κατά τμήματα διαφορίσιμη και 2π-περιοδική και σε κάποιο $x \in (-\pi, \pi)$ η f έχει θετικό άλμα: $f(x_+) - f(x_-) = a \neq 0$,

τότε υπάρχουν ακολουθίες $(x_n), (y_n)$ με $x_n \nearrow x$ και $y_n \searrow x$ ώστε

$$\lim_n S_n(f, x_n) \leq f(x_-) - \delta a$$
$$\lim_n S_n(f, y_n) \leq f(x_+) + \delta a$$

ενώ, όπως γνωρίζουμε,

$$\lim_n S_n(f, x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}.$$

Όπως είπε ο Gibbs: Άλλο το γράφημα του ορίου (δηλ. της συνάρτησης $\lim_n S_n(f)$) κι άλλο το όριο των γραφημάτων (των συναρτήσεων $S_n(f)$).

Σχόλια: (1) Προσδιορείστε αριθμητικά την τιμή του δ. Είναι 1.17 ή 1.09;

(2) Δείτε το ενδιαφέρον άρθρο στην Wikipedia

`http://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs'_phenomenon`

(με κάθε επιφύλαξη για την ακρίβεια του περιεχομένου!)

Βιβλιογραφία: [1, 1.6], [2, Κεφ. 17].

5. Το πρόβλημα Dirichlet στον δίσκο του $\mathbb{R}^2$ Να λυθεί η διαφορική εξίσωση του Laplace σ' έναν δίσκο με δοθείσα συνεχή συνοριακή συνάρτηση.

Αναλυτικότερα, αν $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ και δοθεί μια συνεχής συνάρτηση $\phi : \partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \to \mathbb{R}$, να βρεθεί μια συνάρτηση $\psi : \bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \to \mathbb{R}$ ώστε

- Η ψ να είναι συνεχής στον κλειστό δίσκο $\bar{D}$ και C^2 στον ανοικτό δίσκο D
- Σε κάθε $(x, y) \in D$ να ικανοποιεί

$$\triangle\psi(x, y) \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

- Σε κάθε $(s, t) \in \partial D$ να ικανοποιεί $\psi(s, t) = \phi(s, t)$.

Σχόλιο: Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση του Laplace (π.χ. στο δίσκο) λέγονται *αρμονικές* (στο δίσκο). Το πρόβλημα Dirichlet διατυπώνεται ισοδύναμα και ως εξής: Να δειχθεί ότι κάθε *συνεχής* συνάρτηση ορισμένη στο ∂D δέχεται συνεχή επέκταση στο $\bar{D}$ που είναι αρμονική στο D.

Βιβλιογραφία: [2, Κεφ. 28].

Αναφορές

[1] H. Dym and H.P. McKean, *Fourier Series and Integrals,* Academic Press, New York (1972).

[2] T.W. Körner, *Fourier Analysis,* Cambridge University Press, UK (1992).