1 Τριγωνομετρικές Σειρές

Τριγωνομετρική Σειρά:

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

Τριγωνομετρικό πολυώνυμο:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin kx$$

$a_k = b_k = 0$ όταν $k > N$. Βαθμός N αν $|a_N| + |b_N| \neq 0$.

Ισοδύναμη μορφή

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx)$$

όπου

$$\exp(it) \equiv \cos t + i \sin t$$

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2}, & k \geq 1 \\ \frac{a_0}{2}, & k = 0 \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2}, & k \leq -1 \end{cases}$$

Παράδειγμα 1.1 *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx \\ &= \begin{cases} \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}, & x \neq 2m\pi \\ 0, & x = 2m\pi \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} c_n(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx \\ &= \begin{cases} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}, & x \neq 2m\pi \\ n + \frac{1}{2}, & x = 2m\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Σύγκλιση: Έστω $x \in [-\pi, \pi]$ σταθερό. Αν $x = 0, \pm\pi$ η ακολουθία $(s_n(x))_n$ είναι σταθερά ίση με 0 ενώ η $(c_n(x))_n$ τείνει στο $+\infty$ όταν $x = 0$ και είναι $\frac{(-1)^n}{2}$ όταν $x = \pm\pi$.

Για κάθε άλλη τιμή του x και οι δυο ακολουθίες αποκλίνουν.

Πράγματι αν η $(s_n(x))_n$ συγκλίνει, τότε πρέπει $\lim_n \sin nx = 0$. Τότε όμως, εφόσον $x \neq 0, \pm\pi$,

$$\begin{aligned} & \sin(n+1)x \to 0 \\ & \Rightarrow \sin nx \cos x + \cos nx \sin x \to 0 \\ & \stackrel{\sin x \neq 0}{\Longrightarrow} \qquad \cos nx \to 0 \end{aligned}$$

άτοπο, αφού $\cos^2 nx + \sin^2 nx = 0$.

Ομοίως αν η $(c_n(x))_n$ συγκλίνει, τότε πρέπει $\lim_n \cos nx = 0$, οπότε $\cos 2nx \to 0$, δηλαδή $2\cos^2 nx - 1 \to 0$, οπότε $|\cos nx| \to \frac{1}{\sqrt{2}}$, άτοπο.

Μολονότι οι δύο ακολουθίες δεν συγκλίνουν, είναι φραγμένες (όταν $x \neq 2k\pi$).

Παρατήρηση 1.2 *Αν $x \in (0, 2\pi)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε*

$$\left|\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leq \frac{1}{2\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \tag{2}$$
$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}.$$

Επιπλέον για κάθε $\delta > 0$ οι δύο ακολουθίες είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο διάστημα $[\delta, 2\pi - \delta]$: Αν $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\left|\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leq \frac{1}{2\sin \frac{\delta}{2}} \tag{3}$$
$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

Οι ανισότητες (2) προκύπτουν άμεσα από τις (1) και οι (3) από τις (2), εφόσον $|\sin \frac{x}{2}| \geq \sin \frac{\delta}{2}$ όταν $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$.

Παρατήρηση 1.3 *Οι δύο ακολουθίες δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο διάστημα $(0, 2\pi)$. Δεν υπάρχει δηλαδή αριθμός $M < +\infty$ ώστε $|c_n(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in (0, 2\pi)$.*

Για παράδειγμα, αν θέσουμε $x_m = \frac{\pi}{2m+1}$ έχουμε από την (1)

$$c_m(x_m) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2\sin\frac{\pi}{4m+2}} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4m+2}}$$

που τείνει στο ∞ καθώς $m \to \infty$. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι η ακολουθία (s_n) δεν είναι ομοιόμρφα φραγμένη στο $(0, 2\pi)$.

Παρατήρηση 1.4 *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όλα τα σημεία $\{e^{2\pi i n x} : n \in \mathbb{N}\}$ βρίσκονται στη μοναδιαία περιφέρεια $\mathbb{T}$ του $\mathbb{C}$. Αν $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, το σύνολο αυτό είναι πεπερασμένο: $e^{2\pi i q x} = e^{2\pi i q \frac{p}{q}} = 1$, $e^{2\pi i (q+1)x} = e^{2\pi i x}, \ldots$. Αν $x \notin \mathbb{Q}$ το σύνολο αυτό είναι όχι μόνον άπειρο, αλλά είναι πυκνό στην $\mathbb{T}$. Έπεται ότι το σύνολο $\{\sin(2\pi n x) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο $[-1, 1]$, όταν $x \notin \mathbb{Q}$.*

Απόδειξη Έστω $z = e^{2\pi i x}$. Αν υπάρχουν διαφορετικοί $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε $z^m = z^n$, τότε $z^{(m-n)} = 1$, οπότε ο αριθμός $2\pi(m-n)x$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο $2\pi k$ του 2π, άρα $x = \frac{k}{m-n} \in \mathbb{Q}$.

Επομένως αν ο x είναι άρρητος, τα σημεία του συνόλου

$$D = \{z, z^2, z^3 \ldots\}$$

είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Έστω $\epsilon \in (0, 1)$. Θα δείξω ότι οποιοδήποτε ανοικτό τόξο της περιφέρειας με χορδή μήκους 2ϵ αναγκαστικά θα περιέχει ένα από τα σημεία αυτά.

Πράγματι, αφού η ακολουθία (z^n) είναι φραγμένη, υπάρχουν $n, m \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < |z^n - z^m| < \epsilon$, άρα $0 < |z^{(n-m)} - 1| < \epsilon$.

Θέτοντας τώρα $w = z^{(n-m)}$, έχουμε

$$0 < |w^{k+1} - w^k| = |w - 1| < \epsilon \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς τα σημεία $w, w^2, \ldots \in D$ είναι όλα διαφορετικά σημεία της περιφέρειας $\mathbb{T}$ και σχηματίζουν τόξα με χορδές μήκους μικρότερου από ϵ. Επομένως οποιοδήποτε ανοικτό τόξο C της περιφέρειας με χορδή μήκους 2ϵ αναγκαστικά θα περιέχει κάποιο από αυτά.

Παράδειγμα 1.5

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\sin kx = \sin x + \frac{1}{4}\sin 2x + \ldots + \frac{1}{n^2}\sin nx$$

$$c_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\cos kx = \cos x + \frac{1}{4}\cos 2x + \ldots + \frac{1}{n^2}\cos nx$$

Αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n \geq m$

$$\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2} \sin kx\right| \leq \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

επειδή $|\sin(kx)| \leq 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αλλά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$, άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq m \geq n_o$ να ισχύει $\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2} < \epsilon$ οπότε

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } n \geq m \geq n_o, \quad \left|\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2} \sin kx\right| < \epsilon$$

πράγμα που σημαίνει η ακολουθία των συναρτήσεων (s_n) (είναι βασική, άρα) συγκλίνει *ομοιόμορφα ως προς* x και συνεπώς το όριό της, έστω s, είναι συνεχής συνάρτηση.

Ίδιες παρατηρήσεις ισχύουν και για την ακολουθία (c_n).

Χρησιμοποιήσαμε εδώ το γνωστό (δες [Ru, 7.8, 7.12] ή [Απ, 27.11, 27.12])

Θεώρημα 1.6 *Αν μια ακολουθία (f_n) συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{C}$ (όπου $X \subseteq \mathbb{R}$) είναι* ομοιόμορφα βασική[1]*, τότε συγκλίνει ομοιόμορφα στο X.*

Αν επί πλέον οι f_n είναι συνεχείς στο X, τότε και το όριό τους είναι συνεχής συνάρτηση.

Παράδειγμα 1.7

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin kx = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \ldots + \frac{1}{n} \sin nx$$
$$c_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cos kx = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \ldots + \frac{1}{n} \cos nx$$

Θα δείξουμε ότι και οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν για κάθε $x \neq 2k\pi$ και ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις. Αρκεί να περιορισθούμε στο $(0, 2\pi)$, εφόσον οι δύο ακολουθίες είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα, άρα 2π-περιοδικές συναρτήσεις.

Υπενθυμίζουμε:

[1] δηλαδή ικανοποιεί: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n, m \geq n_o$ να ισχύει *για κάθε* $x \in X$ η ανισότητα $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$

Λήμμα 1.8 (άθροιση κατά μέρη, [Ru 3.41]) *Αν* $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$ *και* $a_k \in \mathbb{C}$, *τότε θέτοντας* $s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ *και* $s_0 = 0$, *έχουμε για κάθε* $m, n \in \mathbb{N}$ *με* $n > m \geq 1$,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m$$

Απόδειξη Έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=m}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m}^{n} s_{k-1} b_k \\
&\overset{(j=k-1)}{=} \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{j=m-1}^{n-1} s_j b_{j+1} \\
&= \left(\sum_{k=m}^{n-1} s_k b_k + s_n b_n \right) - \left(s_{m-1} b_m + \sum_{j=m}^{n-1} s_j b_{j+1} \right) \\
&\overset{(k=j)}{=} \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_k + s_n b_n - s_{m-1} b_m - \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_{k+1} \\
&= \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m.
\end{aligned}$$

Λήμμα 1.9 (κριτήριο Dirichlet, [Απ 6.25])
Έστω $(a_k), (b_k)$ *ακολουθίες (πραγματικών ή μιγαδικών) αριθμών. Αν τα μερικά αθροίσματα της σειράς* $\sum a_k$ *είναι φραγμένα και η* (b_k) *φθίνει προς το* 0, *δηλαδή*

$$\begin{aligned}
&(i)\ \text{υπάρχει } M < \infty \text{ ώστε } \forall n \in \mathbb{N},\ : \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq M, \\
&(ii)\ b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0 \\
\text{και}\ \ &(iii)\ b_n \to 0,
\end{aligned}$$

τότε η σειρά $\sum_k b_k a_k$ *συγκλίνει.*

Γενίκευση:

Πρόταση 1.10 (Dirichlet, [Απ 27.32])
Έστω (a_k) ακολουθία συναρτήσεων $a_k : X \to \mathbb{C}$ και (b_k) ακολουθία αριθμών. Αν τα μερικά αθροίσματα της σειράς συναρτήσεων $\sum a_k$ είναι ομοιόμορφα φραγμένα και η (b_k) φθίνει προς το 0, δηλαδή

$$(i) \text{ υπάρχει } M < \infty \text{ ώστε } \forall t \in X, \forall n \in \mathbb{N}, : \left|\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\right| \leq M,$$

$$(ii)\ b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$$

$$\text{και } (iii)\ b_n \to 0,$$

τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_k b_k a_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα *στο X.*

Απόδειξη Αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n > m$, για κάθε $t \in X$ έχουμε από το Λήμμα

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(t) b_k\right| &= \left|\sum_{k=m}^{n-1} s_k(t)(b_k - b_{k+1}) + s_n(t) b_n - s_{m-1}(t) b_m\right| \\
&\leq \sum_{k=m}^{n-1} |s_k(t)|(b_k - b_{k+1}) + |s_n(t)| b_n + |s_{m-1}(t)| b_m \quad (\text{γιατί } b_n, b_m, b_k - b_{k+1} \geq 0) \\
&\leq \sum_{k=m}^{n-1} M(b_k - b_{k+1}) + M b_n + M b_m \\
&= M(b_m - b_n) + M b_n + M b_m = 2M b_m.
\end{aligned}$$

Επομένως, αν δοθεί $\epsilon > 0$, αφού $b_n \to 0$, βρίσκουμε $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $b_m < \frac{\epsilon}{2M}$ όταν $m \geq n_o$, οπότε, για κάθε $t \in X$ και κάθε $n > m \geq n_o$ έχουμε από την προηγούμενη ανισότητα

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(t) b_k\right| < \epsilon$$

και άρα η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) όπου $f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) b_k$ είναι ομοιόμορφα βασική και συνεπώς (Θεώρημα 1.6) ομοιόμορφα συγκλίνουσα. □

(Το κριτήριο Dirichlet για σειρές αριθμών είναι βέβαια ειδική περίπτωση.)

Ολοκλήρωση του Παραδείγματος 1.7 Θεωρούμε τώρα την ακολουθία (s_n) όπου

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin kx.$$

Εδώ έχουμε $a_k(x) = \sin kx$ και $b_k = \frac{1}{k}$. Η (b_k) φθίνει προς το 0, αλλά τα μερικά αθροίσματα δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένα στο $(0, 2\pi)$ (Παρατήρηση 1.3). Είναι όμως κατά σημείο φραγμένα, άρα το Λήμμα 1.9 του Dirichlet εφαρμόζεται: Για κάθε $x \in (0, 2\pi)$, η σειρά αριθμών $\sum_k \frac{1}{k} \sin kx$ συγκλίνει.

Θέτουμε $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx$ και δείχνουμε ότι η f είναι συνεχής:

Αν δοθεί οποιοδήποτε $x_o \in (0, 2\pi)$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $x_o \in [\delta, 2\pi - \delta]$. Ξέρουμε ότι για κάθε $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ ισχύει

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

Άρα η Πρόταση 1.10 του Dirichlet εφαρμόζεται στο σύνολο $X_\delta = [\delta, 2\pi - \delta]$ και επομένως η σειρά αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα στο X_δ. Επειδή τα μερικά αθροίσματα είναι συνεχείς συναρτήσεις, έπεται ότι και η f θα είναι συνεχής στο ίδιο διάστημα και ειδικότερα στο x_o. Επειδή το x_o είναι αυθαίρετο σημείο του $(0, 2\pi)$, δείξαμε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, 2\pi)$.

Ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν για τις σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos kx \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{ikx}.$$

2 Σειρές Fourier

Αν f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, πώς να βρώ τους συντελεστές;

Παρατήρηση 2.1 *Αν* $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin kx$, *τότε*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx dx \end{aligned}$$

Για την απόδειξη, χρησιμοποιούμε την εύκολη

Παρατήρηση 2.2 *Αν* $n, m \in \mathbb{N}$, *έχουμε*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 1 & n = m \neq 0 \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 1 & n = m \neq 0 \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx dx = 0$$

Έχουμε λοιπόν, αν $1 \leq n, m \leq N$,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = 2\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos kx dx + \sum_{k=1}^{N} b_k \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin kx dx = a_0$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx =$$
$$\frac{a_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos nx dx + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos kx \cos nx dx + \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin kx \cos nx dx = a_n$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin mx dx =$$
$$\frac{a_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin mx dx + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos kx \sin mx dx + \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx dx = b_m$$

Παρατήρηση 2.3 (Μιγαδική μορφή) *Αν*

$$f(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp ikx$$

τότε

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \exp(-imx) dx.$$

Απόδειξη Παρατηρούμε πρώτα ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(ikx) dx = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Πράγματι,

$$\text{αν } k \neq 0, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(ikx)dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\exp(ikx)}{ik}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Επομένως, αν $-N \leq m \leq N$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-imx)dx &= \sum_{k=-N}^{N} \frac{c_k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp ikx \exp(-imx)dx \\ &= \sum_{k=-N}^{N} \frac{c_k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp i(k-m)xdx = c_m.\end{aligned}$$

Γενίκευση: Αν δοθεί 2π-περιοδική συνάρτηση f, ορίζω

$$\begin{aligned} a_n = a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \\ b_m = b_m(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mxdx, \quad (m = 1, 2, \ldots) \\ \hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-ikx)dx, \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

αρκεί τα ολοκληρώματα να υπάρχουν.

Παρατήρηση 2.4 *Εφόσον η f είναι 2π-περιοδική, οι συντελεστές Fourier δεν αλλάζουν, είτε υπολογίσει κανείς τα ολοκληρώματα στο $[0, 2\pi]$ ή στο $[-\pi, \pi]$ (ή σε οποιοδήποτε άλλο διάστημα μήκους 2π) -δες την Άσκηση 6.*

Με αυτούς τους συντελεστές σχηματίζω τη **σειρά Fourier** $S(f)$ της f:

$$\begin{aligned} S(f, x) &\equiv \frac{a_o(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f)\sin kx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} \end{aligned}$$

Παρατήρηση 2.5 (Άσκηση 2) *Δείξτε ότι τα μερικά αθροίσματα των δύο αυτών σειρών ταυτίζονται.*

Δεν εξετάζουμε αυτή τη στιγμή πότε η σειρά Fourier $S(f)$ μιας συνάρτησης συγκλίνει και πού. Απλώς αντιστοιχούμε στην f τη σειρά $S(f)$, δηλαδή τις α-κολουθίες $(a_n),(b_n)$ των συντελεστών ή ισοδύναμα την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $S(f)$.

Γράφουμε

$$f \sim \frac{a_o(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f)\sin kx \qquad \text{ή} \quad f \sim (a_n(f), b_n(f))$$

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} \qquad \text{ή} \quad f \sim (\hat{f}_k)$$

Παράδειγμα 2.6 (Η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(t) = t,\ t \in (-\pi, \pi)$)

$$(n = 0) \qquad \hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t dt = 0.$$

$$\begin{aligned}
(n \neq 0) \qquad \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-int}dt = \frac{1}{-2\pi in}\int_{-\pi}^{\pi} t(e^{-int})'dt \\
&= \frac{i}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} t(e^{-int})'dt = \frac{i}{2\pi n}\left(\left[te^{-int}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}dt\right) \\
&= \frac{i}{2\pi n}(\pi e^{-in\pi} - (-\pi)e^{in\pi}) = \frac{i}{n}\frac{e^{in\pi}+e^{-in\pi}}{2} = \frac{i}{n}\cos(n\pi) = \frac{i(-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

Άρα η μιγαδική μορφή της $S(f)$ είναι

$$f \sim \sum_{n\neq 0} \frac{i(-1)^n}{n} e^{int}.$$

Επίσης

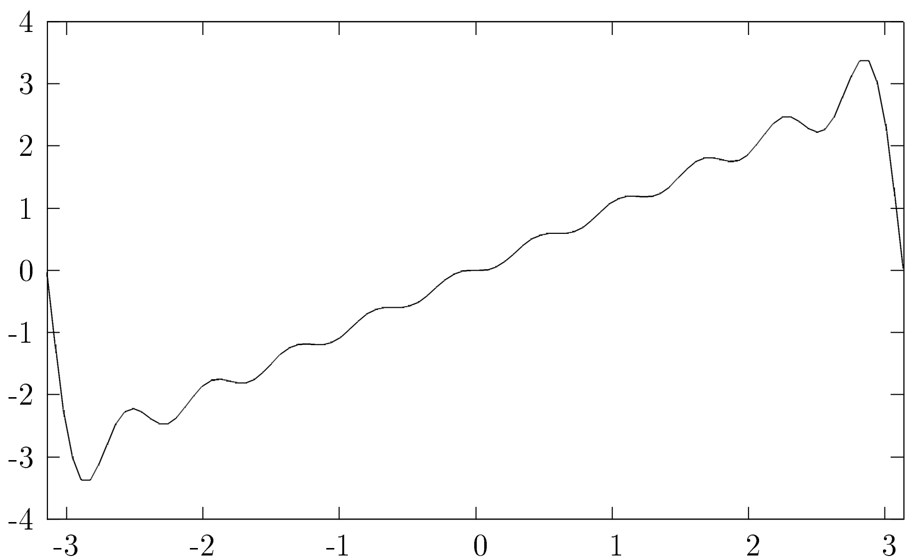
$$a_n(f) = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n) = \frac{i(-1)^n}{n} + \frac{i(-1)^{-n}}{-n} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$\text{και} \;\; b_m(f) = \frac{\hat{f}(-m) - \hat{f}(m)}{i} = \frac{(-1)^{-m}}{-m} - \frac{(-1)^m}{m} = -2\frac{(-1)^m}{m}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

(γιατί;) επομένως η πραγματική μορφή της $S(f)$ είναι

$$\begin{aligned} f \sim \; &= -2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m \sin mt}{m} \\ &= 2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t + \dots\right) \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi - nt) \quad (\text{γιατί;}). \end{aligned}$$

Από την τελευταία αυτή ισότητα φαίνεται (Παράδειγμα 1.7) ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς αυτής σχηματίζουν βασική ακολουθία και επομένως η σειρά συγκλίνει. *Συγκλίνει όμως άραγε στην f;*



Το μερικό άθροισμα της σειράς μέχρι τον 10ο όρο.

Παρατήρηση 2.7 *Αν μια τριγωνομετρική σειρά $f(x) = \sum_k c_k e^{ikx}$ συγκλίνει* ***ομοιόμορφα****, τότε οι συντελεστές Fourier της f είναι οι c_k, δηλαδή η σειρά Fourier της f είναι η ίδια η f (δες και την Άσκηση 9).*

Δεν είναι όμως αλήθεια εν γένει ότι κάθε συγκλίνουσα τριγωνομετρική σειρά είναι σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης (βλ. π.χ. [Απ 30.21]).

Πρόταση 2.8 (Γραμμικότητα) *Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[0, 2\pi]$*

και $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$a_n(f+\lambda g) = a_n(f) + \lambda a_n(g), \quad b_n(f+\lambda g) = b_n(f) + \lambda b_n(g)\ (n, m \in \mathbb{N})$$
$$\textit{ισοδύναμα} \quad \widehat{f+\lambda g}(k) = \hat{f}(k) + \lambda \hat{g}(k)\ (k \in \mathbb{Z})$$
$$\textit{ή}\ \ S_n(f+\lambda g) = S_n(f) + \lambda s_n(g)\ (n \in \mathbb{N}).$$

Απόδειξη Έπεται άμεσα από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος.

Πρόταση 2.9 *Αν f συνεχής, 2π-περιοδική με ολοκληρώσιμη παράγωγο,*

$$S(f', x) = \sum_{k=1}^{\infty} (k b_k \cos kx - k a_k \sin kx).$$

Μιγαδική μορφή:

$$\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k) \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Απόδειξη Αποδεικνύουμε τη μιγαδική μορφή: Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \exp(-ikx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[f(x) e^{ikx} \right]_0^{2\pi} - \frac{-ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx) dx = ik\hat{f}(k) \end{aligned}$$

διότι $\left[f(x) e^{ikx} \right]_0^{2\pi} = f(2\pi) e^{2\pi i} - f(0) e^0 = 0$, αφού η f είναι 2π-περιοδική.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$a_k(f') = k b_k(f), \qquad b_k(f') = -k a_k(f), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Παρατήρηση 2.10 (Άσκηση 3) *Αν μια ολοκληρώσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι άρτια, τότε η σειρά Fourier της είναι σειρά συνημιτόνων (δηλαδή $b_n(f) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Αν είναι περιττή, τότε η σειρά Fourier της είναι σειρά ημιτόνων (δηλαδή $a_n(f) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές, τότε $\hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.*

Παρατηρήσεις 2.11 (Περιοδικότητα) (i) Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα, και γενικότερα οι συγκλίνουσες τριγωνομετρικές σειρές, είναι 2π-περιοδικές συναρτήσεις. Για το λόγο αυτό εξετάζουμε σειρές Fourier 2π-περιοδικών συναρτήσεων. Αν μια συνάρτηση f μας δοθεί ορισμένη στο $[0, 2\pi]$ ή στο $[-\pi, \pi]$, και ικανοποιεί $f(0) = f(2\pi)$ (αντίστοιχα $f(-\pi) = f(\pi)$) την επεκτείνουμε περιοδικά σ'όλο το $\mathbb{R}$. Αν όμως $f(0) \neq f(2\pi)$, πριν την επεκτείνουμε πρέπει να την αλλάξουμε ώστε να μπορεί να επεκταθεί περιοδικά. Διαλέγουμε λοιπόν μια τιμή c και ορίζουμε μια νέα συνάρτηση g στο $[0, 2\pi]$ θέτοντας $g(t) = f(t)$ για κάθε $t \in (0, 2\pi)$ και $g(0) = c = g(2\pi)$. Βεβαίως οι συντελεστές Fourier της g θα είναι οι ίδιοι με τους συντελεστές Fourier της f.

(ii) Όταν λέμε ότι μια 2π-περιοδική συνάρτηση f είναι π.χ. συνεχής ή συνεχώς παραγωγίσιμη, ακόμα κι'αν έχει δοθεί αρχικά στο $(0, 2\pi)$, εννοούμε ότι έχει αυτήν την ιδιότητα *αφού επεκταθεί περιοδικά* σ'ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(t) = t$, $(t \in (0, 2\pi))$ δεν έχει συνεχή περιοδική επέκταση στο $\mathbb{R}$, διότι η περιοδική επέκτασή της παρουσιάζει ασυνέχειες στα σημεία $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$.

(iii) Αν μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι περιοδική με περίοδο $\omega > 0$, τότε η σειρά Fourier της ορίζεται ως εξής:

$$f \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{\omega}x\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{\omega}x\right)$$

όπου

$$\begin{aligned} a_n = a_n(f) &= \frac{2}{\omega}\int_0^{\omega} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{\omega}x\right)dx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \\ b_m = b_m(f) &= \frac{2}{\omega}\int_0^{\omega} f(x)\sin\left(\frac{2m\pi}{\omega}x\right)dx, \quad (m = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

3 Απλές περιπτώσεις σύγκλισης

Πρόταση 3.1 *Αν f είναι συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση και $\sum |\hat{f}(k)| < \infty$ (ισοδύναμα $\sum(|a_k(f)| + |b_k(f)| < \infty$) τότε $S_N(f) \to f$ ομοιόμορφα.*

Απόπειρα απόδειξης Αν

$$S_n(f, x) = \frac{a_o(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k(f)\sin kx = A_n(x) + B_n(x)$$

τότε για κάθε $n \geq m$ έχουμε

$$\left|\sum_{k=m}^{n} b_k(f)\sin kx\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |b_k(f)| \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

επειδή $|\sin kx| \leq 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k(f)| < \infty$, η ακολουθία των συναρτήσεων (B_n) (είναι ομοιόμορφα βασική, άρα) συγκλίνει *ομοιόμορφα ως προς x σε κάποια συνάρτηση* και συνεπώς η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής (δες και την απόδειξη του Παραδείγματος 1.5). Για τον ίδιο λόγο η ακολουθία των συναρτήσεων (A_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε συνεχή συνάρτηση.

Επομένως υπάρχει *κάποια συνεχής συνάρτηση, έστω g*, ώστε η ακολουθία $(S_n(f))$ να συγκλίνει ομοιόμορφα στην g, η οποία μάλιστα είναι 2π-περιοδική (αφού οι $(S_n(f))$ είναι 2π-περιοδικές).

Έστω τώρα $m \in \mathbb{Z}$. Πάλι *λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης* έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(f,x) e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-imx} dx = \hat{g}(m).$$ [2]

Από την Άσκηση 2 όμως γνωρίζουμε ότι

$$S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

και συνεπώς $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(f,x) e^{-imx} dx = \hat{f}(m)$ όταν $n \geq |m|$.

Συμπέρασμα Η ακολουθία $(S_n(f))$ συγκλίνει σε μια συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση g με $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Πώς όμως θα συμπεράνουμε ότι $f = g$;

Το γεγονός αυτό έπεται από το ακόλουθο βασικό Θεώρημα, που ολοκληρώνει και την απόδειξη της Πρότασης 3.1:

Θεώρημα 3.2 (Θεώρημα Μοναδικότητας) *Αν f και g είναι* συνεχείς *και 2π-περιοδικές συναρτήσεις με $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ (ισοδύναμα $a_n(f) = a_n(g)$ και $b_n(f) = b_n(g)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$), τότε $f = g$.*

---

[2] Πράγματι,

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(f,x) e^{-imx} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-imx} dx \right| \\ \leq &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f,x) - g(x)| dx \leq \sup_{-\pi \leq x \leq \pi} |S_n(f,x) - g(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Ας σημειώσουμε από τώρα ότι *το Θεώρημα δεν αληθεύει ως έχει χωρίς την υπόθεση της συνέχειας*. Για παράδειγμα αν η f είναι διαφορετική απο το 0 μόνο σε πεπερασμένο πλήθος σημείων του $[0, 2\pi]$, τότε $\hat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Θα δώσουμε τρεις διαφορετικές αποδείξεις του Θεωρήματος αυτού. Η πρώτη οφείλεται στον Lebesgue:

Απόδειξη Έστω $h = f - g$, $h_1 = \frac{h+\bar{h}}{2}$ και $h_2 = \frac{h-\bar{h}}{2i}$. Εφόσον $\hat{h}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$\widehat{h_1}(k) = \frac{1}{2}(\hat{h}(k) + \hat{h}(-k)) = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ (βλ. Άσκηση 3) και ομοίως $\widehat{h_2}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αφού οι h_1 και h_2 παίρνουν πραγματικές τιμές, για να δείξουμε ότι $f = g$ αρκεί να δείξουμε το επόμενο

Λήμμα 3.3 *Έστω $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-ολοκληρώσιμη και 2π-περιοδική με $\hat{h}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε $h(t_0) = 0$ για κάθε $t_0 \in [-\pi, \pi]$ στο οποίο η h είναι συνεχής.*

Απόδειξη Αν $q(t) = \sum c_k e^{ikt}$ είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο, τότε $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} h(t)q(t)dt = \sum c_k \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)e^{ikt}dt = 0$, αφού $\hat{h}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι, αν $h(t_0) \neq 0$, υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο q ώστε $\int_{-\pi}^{\pi} h(t)q(t)dt \neq 0$. Θεωρώντας εν ανάγκη την $-h$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $h(t_0) > 0$.

(α) Υποθέτουμε πρώτα ότι $t_0 = 0$. Από τη συνέχεια της h στο 0, υπάρχει $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ώστε

$$|t| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad h(t) > \frac{h(0)}{2}. \tag{4}$$

Έστω $a = \frac{2}{3}(1 - \cos\delta) \in (0, 1)$ και

$$p(t) = a + \cos t$$

Παρατηρούμε ότι

$$\pi \geq |t| \geq \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |p(t)| < 1 - \frac{a}{2} \tag{5}$$

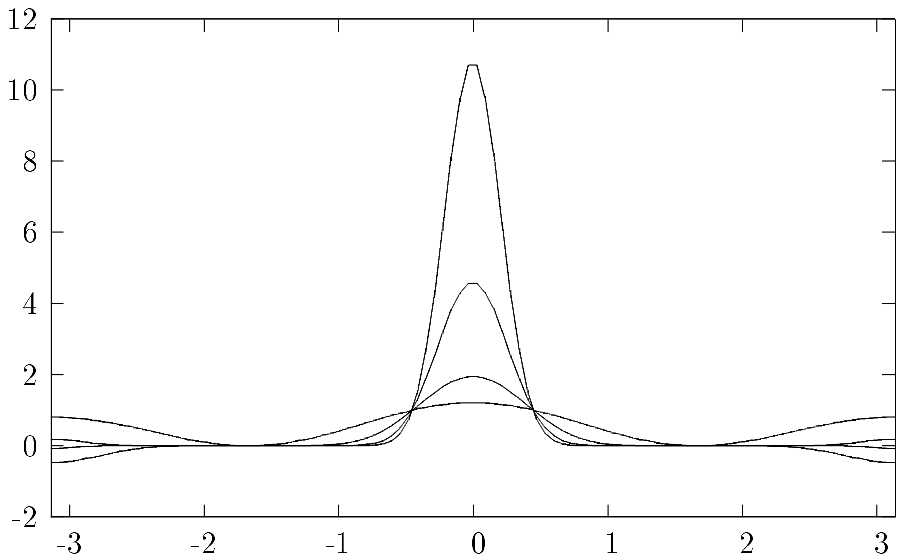
[Πράγματι, $a + \cos t > a - 1 > -(1 - \frac{a}{2})$ και επίσης $a + \cos t < a + \cos\delta = 1 - \frac{a}{2}$ γιατί $\cos\delta = 1 - \frac{3a}{2}$.] Αλλά $p(0) = 1 + a > 1 + \frac{a}{2}$, άρα υπάρχει $\eta \in (0, \delta)$ ώστε

$$|t| < \eta \qquad \Longrightarrow \qquad p(t) > 1 + \frac{a}{2}. \tag{6}$$

Θέτω

$$p_k(t) = (a + \cos t)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι το p_k είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο (δηλ. γραμμικός συνδυασμός των $\sin nx$ και $\cos mx$, $n, m \in \mathbb{N}$).



Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα p_2, p_7, p_{16}, p_{25} με $a = 1/10$.

Έχουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(t)p_k(t)dt = I_1 + I_2$$

όπου

$$I_1 = \int_{|t|\geq\delta} h(t)p_k(t)dt, \quad \text{και} \quad I_2 = \int_{|t|<\delta} h(t)p_k(t)dt.$$

Θα δείξουμε ότι για μεγάλες τιμές του k, το I_2 γίνεται μεγάλο, ενώ το $|I_1|$ γίνεται μικρό.

Στο διάστημα $(-\delta, \delta)$ έχουμε $p(t) \geq 0$ (αφού $\delta < \pi/2$) και $h(t) \geq 0$, άρα, αφου $\eta \leq \delta$,

$$\int_{|t|<\delta} h(t)p_k(t)dt \geq \int_{|t|<\eta} h(t)p_k(t)dt.$$

Όμως από τις (4) και (6)

$$I_2 \geq \int_{|t|<\eta} h(t)p_k(t)dt \geq 2\eta \frac{h(0)}{2}\left(1+\frac{a}{2}\right)^k.$$

Επίσης αν $\|h\| = \sup\{|h(t)| : |t| \leq \pi\}$, έχουμε από την (5)

$$|I_1| \leq 2\pi\|h\| \left(1-\frac{a}{2}\right)^k.$$

Συνεπώς υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $|I_1| < 1$ και $I_3 > 2$, άρα για αυτήν την τιμή του k,

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(t)p_k(t)dt = I_1 + I_2 \geq -|I_1| + 0 + I_2 > 1$$

οπότε $\int_{-\pi}^{\pi} h(t)p_k(t)dt \neq 0$.

(β) Γενική περίπτωση: Αν $h(t_0) \neq 0$ και η h είναι συνεχής στο t_0, θέτουμε $q_k(t) = p_k(t-t_0) = (a+\cos(t-t_0))^k$ και έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)q_k(t)dt &= \int_{-\pi}^{\pi} h(t)p_k(t-t_0)dt = \int_{-\pi-t_0}^{\pi-t_0} h(s+t_0)p_k(s)ds \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} h(s+t_0)p_k(s)ds\end{aligned}$$

(διότι οι h και p_k είναι 2π-περιοδικές). Εφόσον η συνάρτηση $g(s) = h(s+t_0)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο 0, από το (α) μπορούμε να επιλέξουμε το k ώστε το τελευταίο ολοκλήρωμα να μην μηδενίζεται. $\square$

Για την επόμενη Πρόταση θα μας χρειασθεί ένα αποτέλεσμα, γνωστό από την Πραγματική Ανάλυση ([Ru 7.17], [Απ 27.29, 27.30]). Το διατυπώνουμε στην ειδική περίπτωση που θα το χρειασθούμε:

Πρόταση 3.4 *Αν $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις, ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και $f_n' \to g$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο την g.*

Απόδειξη Λόγω της *ομοιόμορφης* σύγκλισης $f_n' \to g$, για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε

$$\int_a^x f_n'(t)dt \to \int_a^x g(t)dt.$$

Αλλά από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε

$$\int_a^x f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(a).$$

Επειδή $f_n(x) \to f(x)$ και $f_n(a) \to f(a)$ έπεται ότι

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)dt.$$

Αλλά η g είναι συνεχής συνάρτηση, ως *ομοιόμορφο* όριο συνεχών συναρτήσεων. Κατά συνέπεια το αόριστο ολοκλήρωμά της είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο την g. Δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη και $f' = g$. $\square$

Πρόταση 3.5 *Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και $\sum |k\hat{f}(k)| < \infty$ τότε η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και η σειρά $\sum ik\hat{f}(k)\exp ikx$ συγκλίνει στην f' ομοιόμορφα.*

Απόδειξη Θέτουμε $f_N = S_N(f)$. Κατ'αρχήν παρατηρούμε ότι $\sum |\hat{f}(k)| \leq \sum |k\hat{f}(k)| < \infty$. Συνεπώς από την Πρόταση 3.1 η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, δηλαδή $f_N \to f$ ομοιόμορφα:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\exp ikx.$$

Όμως έχουμε

$$f_N'(x) = \frac{d}{dx}S_N(f,x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)e^{ikx}\right) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)ike^{ikx}$$

Αλλά από την υπόθεση $\sum |k\hat{f}(k)| < \infty$ συμπεραίνουμε (Πρόταση 3.1) ότι η ακολουθία (f_N') συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση g, δηλαδή

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ik\hat{f}(k)\exp ikx.$$

Έπεται λοιπόν από την Πρόταση 3.4 ότι η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο την συνεχή συνάρτηση g.

Λήμμα 3.6 *Αν η f και οι παράγωγοί της $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ είναι συνεχείς 2π-περιοδικές συναρτήσεις και αν $|f^{(n)}(t)| \leq M$ για κάθε t τότε $|\hat{f}(k)| \leq \frac{M}{|k|^n}$ για κάθε $k \neq 0$.*

Απόδειξη Εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.9 για τις 2π-περιοδικές και συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ έχουμε, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k),\ \widehat{f''}(k) = ik\widehat{f'}(k) = (ik)^2\hat{f}(k),\ \ldots\ \widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n\hat{f}(k).$$

Αλλά

$$|\widehat{f^{(n)}}(k)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(n)}(x)\exp(ikx)dx\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f^{(n)}(x)\exp(ikx)\right| dx \leq M$$

και συνεπώς

$$|\hat{f}(k)| = \left|\frac{\widehat{f^{(n)}}(k)}{(ik)^n}\right| \leq \frac{M}{|k|^n}$$

όταν $k \neq 0$. $\square$

Πρόταση 3.7 *Αν οι f, f' και f'' είναι συνεχείς και 2π-περιοδικές, η σειρά $S(f)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.*

Απόδειξη Επειδή οι f, f' και f'' είναι εξ υποθέσεως συνεχείς στο $[0, 2\pi]$, είναι φραγμένες. Αν M είναι ένας αριθμός ώστε $|f''(t)| \leq M$ για κάθε t, από το Λήμμα έπεται ότι $|\hat{f}(k)| \leq \frac{M}{|k|^2}$ για κάθε $k \neq 0$, και συνεπώς $\sum |\hat{f}(k)| < \infty$.

Το συμπέρασμα έπεται τώρα από την Πρόταση 3.1. $\square$

Ασκήσεις I: Σειρές Fourier

Άσκηση 1 Δείξτε ότι η οικογένεια συναρτήσεων $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$, όπου $e_k(x) = e^{ikx}$, $x \in \mathbb{R}$, είναι γραμμικά ανεξάρτητη. Ίδια ερώτηση για την οικογένεια $\{f_n, g_m : n = 1, 2, \ldots, m = 0, 1, \ldots\}$ όπου $f_n(x) = \sin nx$ και $g_m(x) = \cos mx$.

Άσκηση 2 Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι 2π-περιοδική και

$$S(f,x) \equiv \frac{a_o(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) , \qquad S_c(f,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

δείξτε ότι (κατάλληλα) μερικά αθροίσματα των δύο αυτών σειρών ταυτίζονται.

Άσκηση 3 Αν μια ολοκληρώσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι άρτια, τότε η σειρά Fourier της είναι σειρά συνημιτόνων (δηλαδή $b_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Αν είναι περιττή, τότε η σειρά Fourier της είναι σειρά ημιτόνων (δηλαδή $a_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές, τότε $\hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 4 Να εξετασθεί αν συγκλίνει η τριγωνομετρική σειρά

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right)$$

και να βρεθεί το όριό της, αν υπάρχει.

Άσκηση 5 Δίδονται οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} f_1 &: (0, 2\pi] \to \mathbb{R} \text{ με } f_1(t) = t, \qquad f_2 : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R} \text{ με } f_2(t) = t, \\ f_3 &: [0, 2\pi) \to \mathbb{R} \text{ με } f_3(t) = t^2 - \pi^2, \quad f_4 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \text{ με } f_4(t) = t^2 - \pi^2. \end{aligned}$$

Να επεκταθούν περιοδικά στο $\mathbb{R}$ και να βρεθούν οι σειρές Fourier τους. Να εξετασθεί αν οι σειρές αυτές συγκλίνουν και πού.

Άσκηση 6 Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη και 2π-περιοδική, τότε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \int_I f(t)dt$$

όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ οποιοδήποτε διάστημα μήκους 2π. Επομένως, $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_I f(t)e^{-ikt}dt$.

Άσκηση 7 Αν είναι γνωστή η σειρά Fourier μιας 2π-περιοδικής συνάρτησης $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, να βρεθούν οι σειρές Fourier των συναρτήσεων $g_1(t) = g(t) - a$, $g_2(t) = g(t-b)$, $g_3(t) = e^{imt}g(t)$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $m \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 8 Αν $D_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ είναι ο λεγόμενος «πυρήνας του Dirichlet», δείξτε ότι υπάρχει σταθερά c ώστε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt \geq c\log n.$$

[Υπόδειξη: $|D_n(x)| \geq c\frac{|\sin((N+1/2)x)|}{|x|}$.]

Άσκηση 9 Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ συγκλίνει *ομοιόμορφα* στο $[0, 2\pi]$ (ισοδύναμα, στο $\mathbb{R}$) και θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$. Να αποδειχθεί ότι $a_n(f) = 0\,(n = 0, 1, \dots)$ και $b_m(f) = b_m\,(m = 1, 2, \dots)$. Δηλαδή, η f είναι ίση με τη σειρά Fourier της.
Δώστε ένα παράδειγμα μιας 2π-περιοδικής συνάρτησης g με συγκλίνουσα σειρά Fourier $S(g)$ που όμως $g \neq S(g)$.

Άσκηση 10 Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι 2π-περιοδική και δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη (γράφουμε $f \in C^2$) τότε οι f' και f'' είναι 2π-περιοδικές και φραγμένες. Επίσης (α) υπάρχει σταθερά c ώστε $|\hat{f}(k)| \leq \frac{c}{|k|}$ όταν $k \neq 0$ και άρα $\lim_{|k|\to\infty} \hat{f}(k) = 0$. (β) Υπάρχει σταθερά d ώστε $|\hat{f}(k)| \leq \frac{c}{|k|^2}$ όταν $k \neq 0$ και άρα η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Μπορούμε να βρούμε το άθροισμα της σειράς;

Άσκηση 11 Αν $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sin kx$, εξετάστε αν η ακολουθία (s_n) συγκλίνει *ομοιόμορφα* στο $(0, 2\pi)$. (Σημειώστε ότι η (s_n) **είναι** ομοιόμορφα φραγμένη στο διάστημα αυτό.) !!
Μπορείτε να διατυπώσετε ένα γενικότερα συμπέρασμα για την ομοιόμορφη ή μη σύγκλιση μιάς ακολουθίας ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων σ' ένα ανοικτό διάστημα;