4 Αθροισιμότητα κατά Féjer

Όπως θα δούμε αργότερα,

Παρατήρηση 4.1 *Υπάρχει παράδειγμα συνεχούς και 2π-περιοδικής συνάρτησης f που η σειρά Fourier της δεν συγκλίνει, ούτε καν κατά σημείο [Απ 30.35].*

Ας θυμηθούμε ότι αν μια ακολουθία (s_n) (αριθμών ή συναρτήσεων) συγκλίνει στο s, τότε και η ακολουθία (σ_n) των *μέσων όρων της* συγκλίνει στο ίδιο όριο, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει (παράδειγμα: $s_n = (-1)^n$). Δηλαδή παίρνοντας μέσους όρους βελτιώνουμε γενικά τη σύγκλιση: είναι δυνατόν από μια μη συγκλίνουσα ακολουθία να καταλήξει κανείς σε μια συγκλίνουσα.

Θα δείξουμε ότι για κάθε συνεχή και 2π-περιοδική συνάρτηση f, αν αντικαταστήσει κανείς την $(S_n(f))$ από την ακολουθία $(\sigma_n(f))$ των *μέσων όρων της*, τότε η $(\sigma_n(f))$ συγκλίνει στην f, και μάλιστα *ομοιόμορφα*.

Θεώρημα 4.2 (Féjer) *Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε η ακολουθία $(\sigma_n(f))$ όπου*

$$\sigma_m(f) = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} S_n(f) \quad (m \in \mathbb{N})$$

συγκλίνει στην f ομοιόμορφα.

Για την απόδειξη, θα χρειασθούμε μερικές παρατηρήσεις.

Παρατήρηση 4.3 *Αν $t \in [-\pi, \pi]$, τότε*

$$\sigma_m(f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)K_m(s)ds$$

όπου

$$K_m(x) = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=-n}^{n}\exp(ikx)\,.$$

Η ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων (K_m) λέγεται **πυρήνας του Féjer**.

Απόδειξη Έχουμε

$$
\begin{aligned}
S_n(f)(t) &= \sum_{k=-n}^{k=n} \hat{f}(k)\exp(ikt) \\
&= \sum_{k=-n}^{k=n} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\exp(-iks)ds\right)\exp(ikt) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-n}^{k=n}\exp(ik(t-s))\right)f(s)ds
\end{aligned}
$$

άρα

$$
\begin{aligned}
\sigma_m(f)(t) &= \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} S_n(f)(t) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=-n}^{k=n}\exp(ik(t-s))\right)f(s)ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)K_m(t-s)ds.
\end{aligned}
$$

Αν τώρα στο τελευταίο ολοκλήρωμα πραγματοποιήσουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = t - s$, προκύπτει

$$
\begin{aligned}
\sigma_m(f)(t) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{t+\pi}^{t-\pi} f(t-x)K_m(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(t-x)K_m(x)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)K_m(x)dx
\end{aligned}
$$

διότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι 2π-περιοδική[1]. □

Παρατήρηση 4.4 *Αν $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ τότε*

$$
\begin{aligned}
K_m(x) &= \frac{1}{m+1}\left(\frac{\sin(\frac{m+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 \\
\textit{και} \qquad K_m(0) &= m+1\,.
\end{aligned}
$$

Απόδειξη Έστω $x \neq 2k\pi$. Παρατήρησε ότι η παράσταση

$$\sum_{k=-n}^{n}\exp(ikx)$$

[1] Άσκηση 6.

είναι άθροισμα γεωμετρικής προόδου με πρώτον όρο $\exp(-inx)$ και τελευταίο $\exp(inx)$, επομένως

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n}\exp(ikx) &= \frac{\exp(i(n+1)x)-\exp(-inx)}{\exp(ix)-1}\\ &= \frac{\exp(i(n+\frac{1}{2})x)-\exp(-i(n+\frac{1}{2}x))}{\exp(i\frac{x}{2})-\exp(-i\frac{x}{2})}=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\,.\end{aligned}$$

Αλλά

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m}\sin(n+\frac{1}{2})x &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{n=0}^{m}2\sin\frac{x}{2}\sin(n+\frac{1}{2})x\\ &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{n=0}^{m}(\cos nx-\cos(n+1)x)\\ &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}(1-\cos(m+1)x)\end{aligned}$$

επομένως

$$K_m(x)=\frac{1}{m+1}\cdot\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}(1-\cos(m+1)x)=\frac{1}{m+1}\cdot\frac{2\sin^2(\frac{m+1}{2}x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}\,.$$

Τέλος,

$$K_m(0)=\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=-n}^{k=n}\exp 0=\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}(2n+1)=m+1\,.\quad\square$$

Παρατήρηση 4.5 *Ο πυρήνας του Féjer έχει τις εξής ιδιότητες*[2]*:*

(α) $K_m(x)\geq 0$ *για κάθε* x*.*

(β) Αν $\delta\in(0,\pi)$*, η ακολουθία* (K_m) *τείνει στο* 0 *ομοιόμορφα στο σύνολο* $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$*.*

(γ) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_m(x)dx=1$ *για κάθε* m*.*

[2] βλ. και το σχήμα (fejerk.pdf) στην ιστοσελίδα του μαθήματος

Απόδειξη Το (α) είναι προφανές από την προηγούμενη παρατήρηση. Για το (β), παρατηρούμε ότι αν $\delta \leq |x| \leq \pi$, τότε

$$|K_m(x)| = K_m(x) = \frac{1}{m+1}\frac{\sin^2(\frac{m+1}{2}x)}{\sin^2\frac{x}{2}} \leq \frac{1}{m+1}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}} \leq \frac{1}{m+1}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\,.$$

Επομένως για κάθε $\epsilon > 0$ αν $n_0 > (\epsilon \sin^2\frac{\delta}{2})^{-1}$, τότε για κάθε $m \geq n_o$ και κάθε $x \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ θα έχουμε $|K_m(x)| < \epsilon$.

Το (γ) έπεται απευθείας από τον ορισμό του K_m, αν παρατηρήσουμε ότι $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} exp(iks)ds = 0$ όταν $k \neq 0$. □

Η *ιδέα της απόδειξης του Θεωρήματος Féjer* είναι η εξής:

Αν $\delta > 0$, για αρκετά μεγάλο $m \in \mathbb{N}$ το $K_m(s)$ είναι σχεδόν 0 έξω απ'το διάστημα $[-\delta, \delta]$ (από το (β)). Συνεπώς

$$\sigma_m(f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)K_m(s)ds \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(t-s)K_m(s)ds$$

όπου το σύμβολο $\approx$ σημαίνει «περίπου ίσο». Αλλά η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα αν το δ είναι αρκετά μικρό, όταν $|s| < \delta$ έχουμε $f(t-s) \approx f(t)$. Επομένως

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(t-s)K_m(s)ds \approx f(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_m(s)ds\right)$$

και, πάλι από το (β),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_m(s)ds \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_m(s)ds = 1$$

από το (γ). Συνεπώς τελικά $\sigma_m(f)(t) \approx f(t)$.

Παρατήρησε ότι η ιδέα της απόδειξης (αλλά και η αυστηρή απόδειξη που ακολουθεί) χρησιμοποιεί **μόνον** τις τρεις ιδιότητες της τελευταίας παρατήρησης για τον πυρήνα του Féjer.

Απόδειξη του Θεωρήματος Féjer

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο συμπαγές $[-\pi, \pi]$, είναι *ομοιόμορφα συνεχής*. Συνεπώς υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2\,,$$

ισοδύναμα

$$|s| < \delta \Longrightarrow |f(t-s) - f(t)| < \varepsilon/2 \quad \text{για κάθε } t. \tag{1}$$

Μπορώ φυσικά να υποθέσω ότι $\delta < \pi$. Έχουμε τώρα, χρησιμοποιώντας την (γ),

$$\begin{aligned} \sigma_m(f)(t) - f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)K_m(s)ds - \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_m(s)ds\right) f(t) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t-s) - f(t))K_m(s)ds \;=\; I_1 + I_2\,, \end{aligned}$$

όπου I_1 είναι το ολοκλήρωμα στο $[\delta, \delta]$,

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} (f(t-s) - f(t))K_m(s)ds$$

και I_2 είναι το ολοκλήρωμα στο «υπόλοιπο» σύνολο, $Y = [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$:

$$\begin{aligned} I_2 =& \frac{1}{2\pi}\int_{Y} (f(t-s) - f(t))K_m(s)ds \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} (f(t-s) - f(t))K_m(s)ds + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} (f(t-s) - f(t))K_m(s)ds\,. \end{aligned}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(t-s) - f(t)|K_m(s)ds && (\text{διότι } K_m(s) \geq 0) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_m(s)ds && (\text{από την } (1)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_m(s)ds = \frac{\epsilon}{2} && (\text{από την } (\gamma)). \end{aligned} \tag{2}$$

Επίσης

$$|I_2| \leq 2\sup\{|f(x)| : |x| \leq \pi\} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{Y} K_m(s)ds = 2\|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{Y} K_m(s)ds\,.$$

Αλλά από την (β) μπορώ να βρω $m_o \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $m \geq m_o$ και κάθε s με $\delta \leq |s| \leq \pi$ να ισχύει $K_m(s) < \varepsilon/(4\|f\|_\infty)$. Τότε θα έχουμε

$$|I_2| \leq 2\|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{Y} \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty} ds \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{Y} ds \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

(αφού $Y \subseteq [-\pi,\pi]$). Τελικά λοιπόν, για κάθε $m \geq m_o$ και κάθε $t \in [-\pi,\pi]$, έχουμε από τις (2) και (3),

$$|\sigma_m(f)(t) - f(t)| \leq |I_1| + |I_2| \leq \varepsilon\,. \qquad \square$$

Παρατήρηση 4.6 Αποδείξαμε το Θεώρημα του Féjer στη μορφή που θα μας χρειασθεί, δηλαδή για συνεχείς συναρτήσεις. Θα δούμε σε επόμενη παράγραφο μια γενικότερη μορφή του.

Το **Θεώρημα Μοναδικότητας 3.2** είναι άμεσο πόρισμα: Πράγματι, αν f και g είναι συνεχείς και 2π-περιοδικές συναρτήσεις με $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε

$$S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \hat{g}(k)e^{ikx} = S_n(g,x)$$

για κάθε x και n και συνεπώς $\sigma_n(f) = \sigma_n(g)$ για κάθε n.

Αλλά από το Θεώρημα Féjer έχουμε $f = \lim_n \sigma_n(f)$ και $g = \lim_n \sigma_n(g)$ ομοιόμορφα, άρα $f = g$. $\square$