5 Μέση τετραγωνική σύγκλιση

Ας ξεκινήσουμε με μια απλή, αλλά κρίσιμη παρατήρηση:

Λήμμα 5.1 (Βέλτιστης μέσης τετραγωνικής προσέγγισης [Απ 30.6]) *Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ Riemann-ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n ισχύει*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-p|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-S_n(f)|^2 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(f)-p|^2. \qquad (1)$$

Συνεπώς ισχύει η ανισότητα

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-p|^2 \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-S_n(f)|^2 \qquad (2)$$

και ισότητα έχουμε αν και μόνον αν $p = S_n$.

Δηλαδή, το S_n είναι το μοναδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο που ελαχιστοποιεί το ολοκλήρωμα $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-p|^2$ ως προς όλες τις επιλογές τριγωνομετρικών πολυωνύμων p βαθμού το πολύ n.

Απόδειξη Είναι φανερό ότι η (2) έπεται αμέσως από την (1) και ότι ισότητα ισχύει στην(2) αν και μόνον αν ο τελευταίος όρος στην (1) μηδενίζεται, πράγμα που συμβαίνει αν και μόνον αν $p = S_n$.

Έστω λοιπόν $p(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$. Αν θέσουμε $g = f - S_n(f)$ και $q = S_n(f) - p$ έχουμε

$$f - p = (f - S_n(f)) + (S_n(f) - p) = g + q.$$

Παρατηρούμε ότι, αν $e_k(t) = e^{ikt}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\overline{e_k} = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_n(f)\overline{e_k}$$

όταν $|k| \leq n$ (από τον ορισμό του $S_n(f)$), άρα

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g\overline{e_k} = 0, \qquad |k| \leq n.$$

Εφόσον η $q = \sum_{k=-n}^{n}(\hat{f}(k) - c_k)e_k$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\{e_k : |k| \leq n\}$, έπεται ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g\bar{q} = 0,$$

οπότε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-p|^2 =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g+q|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(g+q)(\overline{g+q}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g\bar{g} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g\bar{q} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}q\bar{g} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}q\bar{q} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g|^2 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|q|^2\end{aligned}$$

και η (1) αποδείχθηκε. $\square$

Η προηγούμενη παρατήρηση οδηγεί στη μελέτη της ποσότητας

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|ft)|^2dt\right)^{1/2} \qquad f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C} \text{ ολοκληρώσιμη.}$$

Οι κρίσιμες ιδιότητες είναι οι ακόλουθες:

Λήμμα 5.2 *Αν ορίσουμε*

$$\langle f,g\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\bar{g}$$

όπου $f,g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμες έχουμε

$$\begin{aligned}&(a)\ |\langle f,g\rangle| \le \|f\|_2\|g\|_2 \\ &(b)\ \|f+g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2 .\end{aligned}$$

Απόδειξη (a) Για να δείξω ότι $|\langle f,g\rangle| \le \|f\|_2\|g\|_2$ αρκεί να υποθέσω[1] ότι $\|g\|_2 = 1$. Αν $\lambda\in\mathbb{C}$, από τον ορισμό του $\langle f,g\rangle$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}0 \le \langle f-\lambda g, f-\lambda g\rangle &= \|f\|_2^2 - \bar{\lambda}\langle f,g\rangle - \lambda\langle g,f\rangle + |\lambda|^2\|g\|_2^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \bar{\lambda}\langle f,g\rangle - \lambda\langle g,f\rangle + |\lambda|^2\end{aligned}$$

οπότε, θέτοντας $\lambda = \langle f,g\rangle)$, έχουμε $0 \le \|f\|_2^2 - 2|\langle f,g\rangle|^2 + |\langle f,g\rangle|^2$ άρα $|\langle f,g\rangle|^2 \le \|f\|_2^2 = \|f\|_2^2\|g\|_2^2$ και η ζητούμενη ανισότητα αποδείχθηκε.

[1] Αν $\|g\|_2 = 0$ η ανισότητα ισχύει τετριμένα και αν $\|g\|_2 \neq 0$ αντικαθιστώ την g με την $g/\|g\|_2$.

(b) Για κάθε f, g έχουμε

$$\begin{aligned}\|f+g\|_2^2 &= \langle f+g, f+g\rangle = \langle f,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle \\ &= \langle f,f\rangle + 2Re\,\langle f,g\rangle + \langle g,g\rangle \\ &\le \langle f,f\rangle + 2|\,\langle f,g\rangle\,| + \langle g,g\rangle \\ &\le \|f\|_2^2 + 2\,\|f\|_2\,\|g\|_2 + \|g\|_2^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2\end{aligned}$$

από το (a), άρα $\|f+g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2$. $\square$

Πόρισμα 5.3 *Η απεικόνιση $(f,g) \to \langle f,g\rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο και η $(f,g) \to d_2(f,g) \equiv \|f-g\|_2$ είναι μετρική στον γραμμικό χώρο $C([-\pi,\pi])$* [2] *δηλαδή ικανοποιούν*

	$\langle f,g\rangle \in \mathbb{C}$	$d_2(f,g) \in \mathbb{R}_+$
(i)	$\langle f+\lambda g, h\rangle = \langle f,h\rangle + \lambda\,\langle g,h\rangle$	(a) $d_2(f,g) = d_2(g,f)$
(ii)	$\langle g,f\rangle = \overline{\langle f,g\rangle}$	(b) $d_2(f,g) \le d_2(f,h) + d_2(h,g)$
(iii)	$\langle f,f\rangle \ge 0$	(c) $d_2(f,g) = 0 \iff f = g.$
(iv)	$\langle f,f\rangle = 0 \iff f = 0.$	

Απόδειξη Οι ιδιότητες $(i),(ii),(iii)$ του εσωτερικού γινομένου έπονται άμεσα από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος.

Για να δείξουμε ότι η d_2 είναι πράγματι μετρική στον $C[-\pi,\pi]$, παρατηρούμε αμέσως από τον ορισμό της ότι

$$d_2(f,g) = d_2(g,f) \quad \text{και} \quad d_2(f,g) \ge 0$$

για κάθε f,g. Επίσης, αν οι f,g είναι *συνεχείς* και διαφορετικές, τότε υπάρχει $\delta > 0$ και $(a,b) \subseteq [-\pi,\pi]$ ώστε $|f(t)-g(t)|^2 \ge \delta$ για κάθε $t \in (a,b)$, οπότε

$$d_2(f,g)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)-g(t)|^2 dt \ge \frac{1}{2\pi}\int_a^b |f(t)-g(t)|^2 dt \ge \frac{1}{2\pi}\delta(b-a) > 0$$

άρα $d_2(f,g) = 0$ αν και μόνον αν $f = g$ (αποδείχθηκε λοιπόν και η (iv)). Απομένει η τριγωνική ανισότητα: αν f,g,h είναι συνεχείς,

$$d_2(f,g) = \|(f-h)+(h-g)\|_2 \le \|f-h\|_2 + \|h-g\|_2 = d_2(f,h) + d_2(h,g)$$

από το προηγούμενο Λήμμα. $\square$

[2] δεν είναι όμως μετρική στον χώρο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, γιατί η ισότητα $\|f-g\|_2 = 0$ δεν συνεπάγεται την ισότητα $f(t) = g(t)$ γιά κάθε $t \in [-\pi,\pi]$

Παρατηρήσεις 5.4 *(α) Η στοιχειώδης, αλλά βασική παρατήρηση ότι η παράσταση* $\langle f,g\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}$ *έχει ιδιότητες αντίστοιχες με εκείνες του εσωτερικού γινομένου στον Ευκλείδειο χώρο επιτρέπει την εισαγωγή γεωμετρικών μεθόδων και εννοιών όπως η καθετότητα.*

(β) Η ισότητα (1) στο Λήμμα 5.1 γράφεται

$$\|f-p\|_2^2 = \|f-S_n(f)\|_2^2 + \|S_n(f)-p\|_2^2$$

και η απόδειξή της δεν είναι παρά εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος $\langle f,g\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$, *αν παρατηρήσει κανείς ότι* $\langle f-S_n(f), S_n(f)-p\rangle = 0$.

Παρατήρηση 5.5 *Αν* $p(t)=\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ *είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |p|^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\hat{p}(k)|^2.$$

Απόδειξη Εφόσον $\hat{p}(k) = c_k = \langle p, e_k\rangle$ για $|k|\le n$, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |p|^2 =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p\bar{p} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p\sum_{k=-n}^{n} \bar{c}_k\bar{e_k} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \bar{c}_k \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p\bar{e_k} = \sum_{k=-n}^{n} \bar{c}_k c_k = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.\end{aligned}$$

Πρόταση 5.6 (Ανισότητα Bessel [Απ 30.7]) *Έστω* $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ *ολοκληρώσιμη. Τότε*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2.$$

Απόδειξη Έστω $n\in\mathbb{N}$. Εφαρμόζουμε την (1) για $p=0$ και έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f-S_n(f)|^2 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)|^2 \ge \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)|^2 \quad (3)$$

Αλλά το $S_n(f)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο με συντελεστές $\hat{f}(k)$ για $|k|\le n$ και 0 για $|k|>n$, άρα από την προηγούμενη Παρατήρηση έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \ge \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)|^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2.$$

Εφόσον η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ανισότητα Bessel αποδείχθηκε.

Θα δείξουμε αργότερα ότι στην πραγματικότητα ισχύει ισότητα.

Άμεσο πόρισμα της ανισότητας Bessel είναι το θεμελιώδες

Θεώρημα 5.7 (Riemann - Lebesgue [Απ 30.8]) *Αν $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε*

$$\lim_{k\to+\infty} \hat{f}(k) = \lim_{k\to\infty} \hat{f}(-k) = 0$$

$$\textit{ισοδύναμα} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n(f) = \lim_{n\to\infty} b_n(f) = 0.$$

Το επόμενο Θεώρημα, όπως θα δείξουμε αργότερα, ισχύει για μια κλάση συναρτήσεων πολύ ευρύτερη από τις συνεχείς.

Θεώρημα 5.8 *Αν η $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής, τότε*

$$S_n(f) \xrightarrow{d_2} f$$

δηλαδή

$$\lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f) - f|^2 = 0.$$

Απόδειξη Εφόσον η f είναι συνεχής, από το Θεώρημα του Féjer ξέρουμε ότι $\sigma_n(f) \to f$ ομοιόμορφα. Όμως

$$d_2(\sigma_n(f), f)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(f) - f|^2 \leq \sup\{|\sigma_n(f,t) - f(t)|^2 : t \in [-\pi, \pi]\}$$

άρα $d_2(\sigma_n(f), f) \to 0$. Εφαρμόζοντας όμως το Λήμμα 5.1 για $p = \sigma_n(f)$, έχουμε $0 \leq d_2(S_n(f), f) \leq d_2(\sigma_n(f), f)$ άρα $d_2(S_n(f), f) \to 0$.

Πόρισμα 5.9 (Ισότητα Parseval [Απ 30.41]) *Αν $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2.$$

Απόδειξη Έχουμε δείξει ότι $d_2(S_n(f), f) \to 0$. Εφόσον η d_2 είναι μετρική, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$|d_2(f,0) - d_2(S_n(f),0)| \leq d_2(S_n(f), f)$$

άρα $d_2(S_n(f),0) \to d_2(f,0)$, δηλαδή

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)|^2 \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2.$$

Αλλά από την Παρατήρηση 5.5 έχουμε $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)|^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2$, άρα

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2.$$

Σημείωση Ας τονίσουμε ξανά ότι οι προτάσεις αυτής της παραγράφου γενικεύονται και ισχυροποιούνται, αν χρησιμοποιηθεί το ολοκλήρωμα Lebesgue αντί του ολοκληρώματος Riemann.

6 Συμπληρώματα

Παρατήρηση 6.1 *Αν η $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη (άρα φραγμένη), τότε $\|\sigma_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, άρα η ακολουθία $(\sigma_n(f))$ είναι πάντα ομοιόμορφα φραγμένη.*

Πράγματι,

$$\begin{aligned} |\sigma_m(f,t)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)K_m(x)dx\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t-x)|K_m(x)dx \\ &\leq \sup\{|f(s)| : -\pi \leq s \leq \pi\}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_m(x)dx = \|f\|_\infty \end{aligned}$$

Θα δούμε αργότερα ότι αυτό δεν ισχύει πάντα για την ακολουθία $(S_n(f))$.

Συγκεκριμένα, θα κατασκευάσουμε μια συνεχή και 2π-περιοδική συνάρτηση, για την οποία η ακολουθία $(S_n(f))$ δεν είναι καν κατά σημείο φραγμένη. Αποκλείεται λοιπόν να είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

Επομένως για να εξασφαλίσει κανείς ότι η $(S_n(f))$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη χρειάζονται επιπλέον υποθέσεις. Για παράδειγμα:

Πρόταση 6.2 *Αν οι συντελεστές Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης* f *ικανοποιούν* $|\hat{f}(k)| = O(\frac{1}{|k|})$, *αν δηλαδή υπάρκει μια σταθερά* M *ώστε*

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{M}{|k|}, \qquad k \neq 0,$$

τότε τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της f *είναι ομοιόμορφα φραγμένα.*

Για την απόδειξη, θα χρειαστεί μια ακόμη παρατήρηση (η εύκολη απόδειξη αφήνεται ως άσκηση):

Παρατήρηση 6.3 $\sigma_n(f,t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{f}(k) e^{ikt}$.

Απόδειξη της Πρότασης 6.2 Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} S_n(f,t) - \sigma_n(f,t) &= \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt} - \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{f}(k)e^{ikt} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^{n} |k| \hat{f}(k) e^{ikt}. \end{aligned}$$

Επομένως, αφού $|k\hat{f}(k)| \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$|S_n(f,t) - \sigma_n(f,t)| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^{n} |k\hat{f}(k)| \leq \frac{2n+1}{n+1} M < 2M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $t \in [-\pi, \pi]$. Έχουμε λοιπόν

$$\|S_n(f)\|_\infty \leq \|\sigma_n(f)\|_\infty + 2M \leq \|f\|_\infty + 2M.$$

χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 6.1. $\square$

Παράδειγμα 6.4 *(ι) Η τριγωνομετρική σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$$

(που συγκλίνει, όπως έχουμε δείξει, βλ. Παράδειγμα 1.7) είναι σειρά Fourier μιας Riemann-ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

(ιι) Τα μερικά αθροίσματα της σειράς είναι ομοιόμορφα φραγμένα.[3]

[3] Για μια άλλη απόδειξη, βλ. [Απ 30.16].

Απόδειξη Θέτουμε

$$f(t) = \begin{cases} -\pi - t, & -\pi \le t < 0 \\ \\ \pi - t, & 0 \le t < \pi \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι

$$\hat{f}(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \\ \frac{1}{ik}, & k \neq 0 \end{cases}$$

επομένως $|k\hat{f}(k)| \le 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Αλλά

$$S_n(f,t) = \left(\sum_{k=-n}^{-1} + \sum_{k=1}^{n} \right) \frac{1}{ik} e^{ikt} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{ikt}}{ik} + \frac{e^{-ikt}}{-ik} \right) = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k}$$

πράγμα που αποδεικνύει το (ι). Τώρα η Πρόταση 6.2 εφαρμόζεται, και από την απόδειξή της έχουμε

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k} \right| = \frac{1}{2} |S_n(f,t)| \le \frac{1}{2} (\|f\|_\infty + 2) = \frac{\pi}{2} + 1.$$

Παρατήρηση 6.5 Παρόλο που η ακολουθία (S_n) των τριγωνομετρικών πολυωνύμων

$$S_n = \left(\sum_{k=-n}^{-1} + \sum_{k=1}^{n} \right) \frac{1}{ik} e_k$$

είναι ομοιόμορφα φραγμένη, το «θετικό» ή «αναλυτικό» κομμάτι

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{ik} e_k$$

δεν είναι, γιατί $P_n(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{ik}$.

Κατά συνέπεια, παρόλο που η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{ik} e_k$ συγκλίνει για κάθε $t \neq 2k\pi$ (Παράδειγμα 1.7), δεν είναι σειρά Fourier καμμιάς Riemann-ολοκληρώσιμης συνάρτησης. Θα δούμε αργότερα ότι (εφόσον $\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{ik} \right|^2 < \infty$) είναι σειρά Fourier μιάς Lebesgue-ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

Θεώρημα 6.6 (Féjer, [Απ 30.34]) *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη και 2π-περιοδική συνάρτηση. Αν για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ τα πλευρικά όρια $f(x_-)$ και $f(x_+)$ υπάρχουν, τότε η ακολουθία $(\sigma_n(f,x))$ συγκλίνει καθώς $n \to \infty$ στον μέσο όρο $\frac{1}{2}(f(x_-)+f(x_+))$.*

Η απόδειξη παραλείπεται (είναι παραλλαγή της απόδειξης που δώσαμε για το Θεώρημα του Féjer όταν η f είναι συνεχής).

Πρόταση 6.7 (Ru 8.14) *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη και 2π-περιοδική συνάρτηση. Αν για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\delta > 0$ και $M < \infty$ ώστε*

$$|f(x+t) - f(x)| \le M|t| \quad \textit{για κάθε } t \in (-\delta, \delta)$$

τότε $S_n(f,x) \to f(x)$.

Η υπόθεση ικανοποιείται π.χ. όταν υπάρχει η f' και είναι φραγμένη εκτός από πεπερασμένο πλήθος σημείων. Την ικανοποιούν για παράδειγμα όλες οι 2π-περιοδικές συναρτήσεις που έχουν πολυγωνικά γραφήματα ή είναι κατά τμήματα πολυωνυμικές.

Απόδειξη Σταθεροποιούμε το x και ορίζουμε την $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ ως εξής:

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x-t) - f(x)}{\sin(t/2)}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Πράγματι, για κάθε $\epsilon > 0$ η g είναι ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $[-\pi, x-\epsilon]$ και $[x+\epsilon, \pi]$, και (από την υπόθεση)[4] είναι φραγμένη στο $[-\pi, \pi]$, άρα το $\int_{-\pi}^{\pi} g$ υπάρχει.

Έχουμε δείξει ότι

$$S_n(f,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt$$

όπου

$$D_n(s) = \begin{cases} \sum\limits_{k=-n}^{n} \exp(iks) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{\sin\frac{s}{2}} & \text{όταν } \ s \neq 0 \\ 2n+1 & \text{όταν } \ s = 0 \end{cases}$$

[4] $\left|\frac{f(x-t)-f(x)}{\sin(t/2)}\right| \le 2M \left|\frac{t/2}{\sin(t/2)}\right| \le M\pi$ όταν $0 < |t| < \delta$, γιατί $\frac{x}{\sin x} < \frac{\pi}{2}$ όταν $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Επομένως
$$(f(x-t)-f(x))D_n(t) = g(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)$$
για κάθε t. Επειδή $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = 1$ έχουμε
$$\begin{aligned}
S_n(f,x)-f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))D_n(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(g(t)\cos\frac{t}{2}\right)\sin(nt)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(g(t)\sin\frac{t}{2}\right)\cos(nt)dt \\
&= b_n(h_1) + a_n(h_2)
\end{aligned}$$
όπου $h_1(t) = g(t)\cos\frac{t}{2}$ και $h_2(t) = g(t)\sin\frac{t}{2}$. Παρατηρούμε όμως ότι οι h_1 και h_2 είναι ολοκληρώσιμες στο $[-\pi,\pi]$. Επομένως, από το Λήμμα Riemann-Lebesgue, τα δύο ολοκληρώματα τείνουν στο 0 καθώς $n \to \infty$. $\square$

Παρατήρηση Είναι ενδιαφέρον να συγκρίνει κανείς τη συμπεριφορά των σειρών Fourier με εκείνη των δυναμοσειρών. Ας θυμηθούμε ότι αν μια δυναμοσειρά συγκλίνει σε κάποιο σημείο $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, τότε αναγκαστικά θα συγκλίνει σε ολόκληρο το διάστημα $(-t,t)$. Αυτό δεν ισχύει για σειρές Fourier : για παράδειγμα, έχουμε δείξει ότι η σειρά $\displaystyle\sum_n \frac{\cos nt}{n}$ συγκλίνει για κάθε $t \neq 2k\pi$, όχι όμως για $t = 0$.

Μάλιστα, σε αντίθεση με τις δυναμοσειρές, το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι η σύγκλιση μιας σειράς Fourier $S(f)$ σε ένα σημείο t εξαρτάται μόνον από τις τιμές της f σε μια (αυθαίρετα μικρή) περιοχή του t. Έτσι, αν οι f και g ταυτίζονται σε μια μικρή περιοχή J του t, τότε, για κάθε $x \in J$, οι σειρές Fourier $S(f,x)$ και $S(g,x)$ είτε θα συγκλίνουν και οι δύο είτε θα αποκλίνουν και οι δύο:

Πόρισμα 6.8 (Αρχή τοπικότητας του Riemann) *Αν οι f και g ταυτίζονται σε κάθε σημείο ενός* ανοικτού *διαστήματος J, τότε $S_n(f,x)-S_n(g,x) \to 0$ για κάθε $x \in J$.*

Απόδειξη Θεωρούμε την $h = f-g$. Επειδή το J είναι ανοικτό, κάθε $x \in J$ ικανοποιεί την υπόθεση της προηγούμενης πρότασης, άρα η $(S_n(h,x))_n$ συγκλίνει στο $h(x) = 0$. $\square$

Η επόμενη Πρόταση ισχυροποιεί το συμπέρασμα της Άσκησης 3.10:

Πρόταση 6.9 *Έστω $m \in \mathbb{N}$. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι 2π-περιοδική και m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη (γράφουμε $f \in C^m$), τότε τα μερικά αθροίσματα $(S_n(f))$ της σειράς Fourier της f συγκλίνουν, και μάλιστα στην f, ομοιόμορφα. Πιό συγκεκριμένα, υπάρχει σταθερά C ώστε*

$$\|S_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{C}{n^{m-\frac{1}{2}}}$$

όπου $\|h\|_\infty = \sup\{|h(t)| : t \in [-\pi, \pi]\}$.

Παρατήρηση 6.10 Η τελευταία ανισότητα δείχνει ότι όσο πιό «λεία» είναι η f, τόσο αυξάνει η «ταχύτητα σύγκλισης» της σειράς Fourier της f, ή ισοδύναμα, τόσο πιό γρήγορα τείνουν στο 0 οι συντελεστές Fourier $\hat{f}(k)$ της f καθώς $|k| \to \infty$. Θα δούμε σε λίγο ότι ισχύει και το αντίστροφο. Η αλληλεπίδραση αυτή ανάμεσα σε «τοπικές» ιδιότητες της f (όπως η λειότητα - ο βαθμός παραγωγισιμότητας) και «ολικές» ιδιότητες της σειράς Fourier (όπως η ταχύτητα σύγκλισης) είναι ένα από τα χαρακτηριστικά φαινόμενα στη συμπεριφορά των σειρών Fourier.

Απόδειξη (a) Ξέρουμε ότι $\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ (Πρόταση 2.11). Εφόσον $\sum_k |\widehat{f'}(k)|^2 < \infty$, έπεται ότι $\sum_k |k\hat{f}(k)|^2 < \infty$, άρα, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{k\neq 0}\left|\hat{f}(k)\right|\right)^2 = \left(\sum_{k\neq 0}\left|k\hat{f}(k)\frac{1}{k}\right|\right)^2 \leq \left(\sum_{k\neq 0}\left|k\hat{f}(k)\right|^2\right)\left(\sum_{k\neq 0}\frac{1}{|k|^2}\right).$$

Αφού οι δύο σειρές δεξιά συγκλίνουν, έπεται ότι $\sum_{k\neq 0}|\hat{f}(k)| < \infty$, και άρα η $(S_n(f))_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη f (Πρόταση 3.1).

(b) Έχουμε τώρα

$$\|S_n(f) - f\|_\infty = \left\|\sum_{|k|>n}\hat{f}(k)e_k\right\|_\infty \leq \sum_{|k|>n}|\hat{f}(k)|.$$

Όμως $\widehat{f^{(m)}}(k) = (ik)^m \hat{f}(k)$, άρα

$$\sum_{|k|>n} |\hat{f}(k)| = \sum_{|k|>n} \frac{|\widehat{f^{(m)}}(k)|}{|k|^m} \overset{(CS)}{\leq} \left(\sum_{|k|>n} \left| \widehat{f^{(m)}}(k) \right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{|k|>n} \frac{1}{|k|^{2m}} \right)^{1/2}$$

$$\overset{(B)}{\leq} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(m)}(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\sum_{|k|>n} \frac{1}{|k|^{2m}} \right)^{1/2}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy–Schwartz (CS) και την ανισότητα Bessel (B) για την $f^{(m)}$. Αρκεί τώρα να παρατηρήσουμε ότι, όπως είναι γνωστό (!), $\displaystyle\sum_{k>n} \frac{1}{k^{2m}} \leq \frac{1}{2m-1} \frac{1}{n^{2m-1}}$ για να συμπεράνουμε ότι υπάρχει μια σταθερά C ώστε

$$\|S_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{C}{n^{m-\frac{1}{2}}}. \qquad \square$$

Ασκήσεις II: Σειρές Fourier

Άσκηση 12 Δείξτε ότι αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα σε ένα σύνολο A τότε για κάθε ακολουθία (t_n) του A ισχύει $\lim_n (f_n(t_n) - f(t_n)) = 0$.
Αυτό δείχνει ότι το φαινόμενο Gibbs δεν εμφανίζεται όταν η σειρά Fourier συγκλίνει ομοιόμορφα.

Άσκηση 13 Κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $f = f_a + f_p$ όπου η f_a είναι άρτια και η f_p περιττή. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_a|^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_p|^2.$$

Άσκηση 14 Αν $S(f) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e_k$ είναι η σειρά Fourier μιας συνεχούς συνάρτησης, δείξτε ότι η σειρά $S^+(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \hat{f}(k) e_k$ **είναι βασική** ως προς !! την d_2. Δείξτε επίσης ότι για τα μερικά αθροίσματα των σειρών αυτών ισχύει η ανισότητα $\|S_n^+(f)\|_2 \leq \|S_n(f)\|_2$ και εξετάστε αν ισχύει η $\|S_n^+(f)\|_\infty \leq \|S_n(f)\|_\infty$.

Άσκηση 15 Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι 2π περιοδική και ολοκληρώσιμη συνάρτηση, να δειχθεί ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t-x) - f(t)|\, dt = 0.$$

Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα την περίπτωση που η f είναι συνεχής.

Άσκηση 16 Αποδείξαμε, ως πόρισμα της ανισότητας Bessel, ότι αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη, τότε, αν $n \in \mathbb{N}$ και $n \to \infty$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \to 0 \quad \text{και} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt \to 0.$$

Με τις ίδιες υποθέσεις, αποδείξτε ότι γενικότερα, αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda \to \infty$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(\lambda t)dt \to 0 \quad \text{και} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(\lambda t)dt \to 0.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε αν θέλετε να χρησιμοποιήσετε την προηγούμενη άσκηση, αφού δείξετε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(\lambda t)dt = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\pi/\lambda}^{\pi-\pi/\lambda} f(t+\frac{\pi}{\lambda})\sin(\lambda t)dt.$$

Παρατήρηση: Οι ακολουθίες (f_n) και (g_n) όπου $f_n(t) = f(t)\sin(nt)$ και $f_n(t) = f(t)\cos(nt)$ ΔΕΝ συγκλίνουν εν γένει, όπως είδαμε, ούτε κατά σημείο.

Άσκηση 17 Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Féjer, αποδείξτε το Θεώρημα Weierstrass:
Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει *πολυώνυμο* $p(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n$ ώστε $\sup\{|f(t) - p(t)| : t \in [a, b]\} < \epsilon$.

Άσκηση 18 Αν $f(t) = |t|$, $t \in [-\pi, \pi]$, βρείτε τη σειρά Fourier της f, και αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Άσκηση 19 Βρείτε τη σειρά Fourier της χαρακτηριστικής συνάρτησης $\chi_{[a,b]}$ ενός διαστήματος $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$. Αποδείξτε ότι, αν $a \neq b$ και $[a, b] \neq [-\pi, \pi]$, η σειρά συγκλίνει στο $\chi_{[a,b]}(x)$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ εκτός των a και b. Τι συμβαίνει στα δύο αυτά σημεία;