7 Ο πυρήνας του Poisson

Αν $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, για κάθε $0 \le r < 1$, η σειρά

$$f_r(t) \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\hat{f}(k)e^{ikt}, \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα, άρα ορίζει συνεχή συνάρτηση $f_r : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ (παρόλο που για $r = 1$ η σειρά, δηλαδή η σειρά Fourier της f, μπορεί να μην συγκλίνει ούτε κατά σημείο). Πράγματι η (διπλή) ακολουθία $(\hat{f}(k))$ είναι φραγμένη, γιατί

$$|\hat{f}(k)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)e^{-ikt}|dt \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt \equiv \|f\|_1$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και συνεπώς

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| r^{|k|}\hat{f}(k)e^{ikt} \right| \le \|f\|_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} < \infty.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
f_r(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\hat{f}(n)e^{int} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}ds\right)e^{int} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-in(t-s)}ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{-in(t-s)}\right)ds \quad \text{(ομοιόμορφη σύγκλιση)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)P_r(t-s)ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{όπου} \quad P_r(t) &\equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{-1} r^{-n}e^{int} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ikt} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt
\end{aligned}$$

ο πυρήνας του Poisson. Αν γράψουμε $z = re^{it}$ έχουμε

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^k + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} + 1 + \frac{z}{1-z} \\ &= \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} + \frac{1}{1-z} = \frac{\bar{z}(1-z)+(1-\bar{z})}{(1-\bar{z})(1-z)} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} \end{aligned}$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι $P_r(t) \geq 0$ για κάθε t. Επίσης, εφόσον η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα, για κάθε $r \in (0,1)$ και $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\widehat{P_r}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)e^{-ikt}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t}dt = r^{|k|}$$

και ειδικότερα $\quad \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = r^0 = 1.$

Παρατήρηση 7.1 *Ο πυρήνας του Poisson έχει τις εξής ιδιότητες:*

(α) Για κάθε $r \in [0,1)$, η συνάρτηση $P_r : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και μη αρνητική.

(β) Αν $\delta \in (0,\pi/2)$, τότε στο σύνολο $[-\pi,-\delta] \cup [\delta,\pi]$, έχουμε $P_r(t) \to 0$ ομοιόμορφα ως προς t καθώς $r \nearrow 1$.

(γ) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)dx = 1$ για κάθε $r \in [0,1)$.

Απόδειξη Μόνον η (β) μένει να αποδειχθεί: Αν $0 < \delta < \pi/2$ τότε για κάθε t με $\delta \leq |t| \leq \pi$ έχουμε $\cos t \leq \cos\delta$, επομένως

$$0 \leq P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} \leq \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta + r^2}$$

και η δεξιά παράσταση τείνει στο 0 καθώς $r \nearrow 1$. $\square$

Αν λοιπόν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, άρα και φραγμένη, θα έχουμε

$$|f_r(t)| \leq \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P_r(t-s)|ds = \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(s)ds = \|f\|_\infty$$

(αφού η P_r είναι 2π-περιοδική και μη αρνητική) για κάθε t και r.

Αν επιπλέον η f είναι *συνεχής* και 2π-περιοδική, τότε επαναλαμβάνοντας λέξη προς λέξη την απόδειξη του Θεωρήματος Féjer (που στηρίχθηκε αποκλειστικά στις αντίστοιχες ιδιότητες (α), (β) και (γ) του πυρήνα Féjer) καταλήγουμε στο ακόλουθο

Θεώρημα 7.2 *Αν f είναι συνεχής και 2π-περιοδική, τότε $\lim_{r\nearrow 1} f_r(t) = f(t)$ ομοιόμορφα, δηλαδή $\lim_{r\nearrow 1} \|f_r - f\|_\infty = 0$.*

Θα δώσουμε τώρα μια διαφορετική απόδειξη. Υπενθυμίζουμε τους συμβολισμούς

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in [-\pi, \pi]\}$$
$$\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} = \{re^{it} : 0 \leq r \leq 1, t \in [-\pi, \pi]\}.$$

Μεταφέρουμε το πρόβλημα στον μοναδιαίο δίσκο του $\mathbb{C}$ ορίζοντας

$$\phi(e^{it}) = f(t) \quad \text{και} \quad \tilde{\phi}(re^{it}) = f_r(t), \quad t \in [-\pi, \pi],\, r \in [0, 1)$$

και πρέπει να δείξουμε ότι $\lim_{r\nearrow 1} \tilde{\phi}(re^{it}) = \phi(e^{it})$ ομοιόμορφα ως προς t, δηλαδή ότι για κάθε $\epsilon > 0$ και κάθε $t \in [-\pi, \pi]$ υπάρχει $r_o \in (0, 1)$ ώστε αν $r_o < r < 1$ να ισχύει $|\tilde{\phi}(re^{it}) - \phi(e^{it})| < \epsilon$. Αυτό έπεται άμεσα από την επόμενη

Πρόταση 7.3 *Αν $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής συνάρτηση, ορίζουμε*

$$H\phi : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} \quad \text{με} \ (H\phi)(z) = \begin{cases} \phi(z), & |z| = 1 \\ \\ \tilde{\phi}(z), & |z| < 1 \end{cases}$$

όπου $\tilde{\phi}(re^{it}) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{is}) P_r(t - s) ds.$

Τότε η συνάρτηση $H\phi$ είναι συνεχής στον κλειστό δίσκο $\overline{\mathbb{D}}$.

Απόδειξη Παρατηρούμε πρώτα ότι, όταν $z = re^{it} \in \mathbb{D}$ (δηλ. όταν $r < 1$), έχουμε

$$|(H\phi)(z)| = |\tilde{\phi}(re^{it})| \leq \sup\{|\phi(e^{is})| : s \in [-\pi, \pi]\} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) ds \leq \|\phi\|_{\mathbb{T}}$$

(Παρατήρηση 7.1(γ)) όπου $\|\phi\|_{\mathbb{T}} \equiv \sup\{|\phi(z)| : |z| = 1\}$ άρα

$$\|H\phi\|_{\overline{\mathbb{D}}} \equiv \sup\{|(H\phi(z))| : |z| \leq 1\} \leq \|\phi\|_{\mathbb{T}}$$

και βεβαίως $\|\phi\|_{\mathbb{T}} \leq \|H\phi\|_{\overline{\mathbb{D}}}$ εφόσον $\phi = (H\phi)|_{\mathbb{T}}$. Επομένως ισχύει ισότητα:

$$\|\phi\|_{\mathbb{T}} = \|H\phi\|_{\overline{\mathbb{D}}}. \tag{1}$$

Αν όμως εφαρμόσουμε την H σε ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$p(e^{it}) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt},$$

βρίσκουμε (από τον ορισμό του P_r) όταν $r < 1$

$$(Hp)(e^{it}) = \sum_{k=-n}^{n} r^{|k|} c_k e^{ikt} \quad \text{για κάθε } t.$$

Αλλά η ισότητα αυτή ισχύει τετριμένα και για $r = 1$. Δηλαδή, για κάθε $z = re^{it} \in \overline{\mathbb{D}}$ έχουμε

$$(Hp)(z) = \sum_{k=-n}^{-1} c_k r^{-k} e^{ikt} + \sum_{k=0}^{n} c_k r^k e^{ikt} = \sum_{k=-n}^{-1} c_k (\bar{z})^{-k} + \sum_{k=0}^{n} c_k z^k.$$

Το σημαντικό εδώ είναι ότι η συνάρτηση Hp είναι *συνεχής* στον κλειστό δίσκο $\overline{\mathbb{D}}$.

Εφαρμόζουμε τώρα το Θεώρημα Féjer στη συνάρτηση $f : [\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ όπου $f(t) = \phi(e^{it})$ η οποία είναι συνεχής και $f(-\pi) = f(\pi)$: Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο $q(t) = \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{ikt}$ ώστε για κάθε $t \in [-\pi, \pi]$ να ισχύει $|f(t) - q(t)| < \epsilon$. Δηλαδή αν θέσουμε $p(e^{it}) = q(t)$ έχουμε $|p(e^{it}) - \phi(e^{it})| < \epsilon$ για κάθε $t \in [-\pi, \pi]$, άρα $\|p - \phi\|_{\mathbb{T}} < \epsilon$.

Τώρα όμως χρησιμοποιώντας την (1) έχουμε

$$\|H\phi - Hp\|_{\overline{\mathbb{D}}} = \|H(\phi - p)\|_{\overline{\mathbb{D}}} = \|\phi - p\|_{\mathbb{T}} < \epsilon.$$

Δείξαμε ότι η συνάρτηση $H\phi$ είναι ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων: για κάθε $\epsilon > 0$ βρήκαμε μια συνεχή συνάρτηση Hp ώστε $\|H\phi - Hp\|_{\overline{\mathbb{D}}} < \epsilon$. Άρα η $H\phi$ είναι συνεχής στον κλειστό δίσκο $\overline{\mathbb{D}}$.

8 Μια σειρά Fourier που δεν συγκλίνει παντού

Θέτω $n_k = 2^{2^k}$ και

$$\begin{aligned} q_k(t) &= \sum_{m=1}^{n_k} \frac{1}{m} \left(\exp i(2n_k - m)t - \exp i(2n_k + m)t \right) \\ &= \exp i2n_k t \sum_{m=1}^{n_k} \frac{1}{m} \left(\exp i(-mt) - \exp imt \right) = 2i \exp i2n_k t \sum_{m=1}^{n_k} \frac{1}{m} \sin mt \end{aligned}$$

Έχουμε δείξει ότι

$$|q_k(t)| = 2\left|\sum_{m=1}^{n_k} \frac{1}{m}\sin mt\right| \le 2+\pi$$

για κάθε t και k (Παράδειγμα 6.4).

Έστω $a_k > 0$ με $\sum_k a_k < \infty$ (θα επιλέξουμε αργότερα συγκεκριμένη ακολουθία). Επειδή $\sum_k |a_k q_k(t)| \le \sum_k a_k$ για κάθε t, η σειρά $\sum_k a_k q_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα, άρα ορίζει συνεχή συνάρτηση:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k(t).$$

Υπολογίζω τα $\hat{f}(n)$. Λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης,

$$\hat{f}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \hat{q}_k(n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αλλά

$$\begin{aligned} q_k(t) &= \sum_{m=1}^{n_k} \frac{1}{m}\left(\exp i(2n_k - m)t - \exp i(2n_k + m)t\right) \\ \text{άρα} \quad \hat{q}_k(n) &= \sum_{m=1}^{n_k} \frac{1}{m}\left(\delta(2n_k - m, n) - \delta(2n_k + m, n)\right) \end{aligned}$$

όπου $\delta(i,i) = 1$ και $\delta(i,j) = 0$ όταν $i \neq j$. Για να έχω $\hat{q}_k(n) \neq 0$ πρέπει να υπάρχει $m = 1, \ldots, n_k$ ώστε $n = 2n_k - m$ ή $n = 2n_k + m$ αλλά όχι και τα δύο.

Για να υπολογίσω τα $\hat{q}_k(n)$, κοιτάω τα διαστήματα $[n_k, 3n_k]$:

$$[4,12],\ [16,48],\ [256,762],\ [65356,196608], \ldots$$

Είναι ξένα γιατί $n_{k+1} = 2^{2^{k+1}} = (2^{2^k})^2 > 3 \cdot 2^{2^k} = 3n_k$.
• Αν $n \notin \bigcup_k [n_k, 3n_k]$ τότε τότε $\delta(2n_k + m, n) = \delta(2n_k - m, n) = 0$ για κάθε $m = 1, 2, \ldots$, άρα

$$n \notin \bigcup_k [n_k, 3n_k] \Longrightarrow \hat{q}_k(n) = 0.$$

• Αν $n \in [n_k, 2n_k)$ τότε $\delta(2n_k + m, n) = 0$ για κάθε $m = 1, 2, \ldots$ και $\delta(2n_k - m, n) \neq 0$ αν και μόνο αν $m = 2n_k - n$, άρα

$$n \in [n_k, 2n_k) \Longrightarrow \hat{q}_k(n) = \frac{1}{2n_k - n}.$$

• Αν $n = 2n_k$ τότε $\delta(2n_k + m, n) = \delta(2n_k - m, n) = 0$ για κάθε $m = 1, 2, \ldots,$ άρα

$$n = 2n_k \Longrightarrow \hat{q}_k(n) = 0.$$

• Αν $n \in (2n_k, 3n_k]$ τότε $\delta(2n_k - m, n) = 0$ για κάθε $m = 1, 2, \ldots$ και $\delta(2n_k + m, n) \neq 0$ αν και μόνο αν $m = n - 2n_k$, άρα

$$n \in (2n_k, 3n_k] \Longrightarrow \hat{q}_k(n) = \frac{-1}{n - 2n_k}.$$

Τελικά, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$:
Αν το n βρίσκεται σε κάποιο σύνολο $[n_k, 3n_k] \backslash \{2n_k\}$, όπου $k \in \mathbb{N}$, τότε $\hat{f}(n) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \hat{q}_i(n) = \dfrac{a_k}{2n_k - n}$. Αν όχι, τότε $\hat{f}(n) = 0$. Δηλαδή

$$\hat{f}(n) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \hat{q}_i(n) = \begin{cases} \dfrac{a_k}{2n_k - n}, & \text{αν } \exists k \text{ ώστε } n \in [n_k, 3n_k] \backslash \{2n_k\} \\[2ex] 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έχουμε τώρα, για την ακολουθία (S_m) όπου

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} \hat{f}(n) e_n$$

$$|S_{3n_k}(0) - S_{2n_k}(0)| = \left| \sum_{n=2n_k+1}^{3n_k} \hat{f}(n) \right| = \left| \sum_{n=2n_k+1}^{3n_k} \frac{a_k}{2n_k - n} \right| = a_k \left| \sum_{n=2n_k+1}^{3n_k} \frac{1}{2n_k - n} \right|$$
$$= a_k \sum_{m=1}^{n_k} \frac{1}{m} \geq a_k \log(n_k) = a_k 2^k \log 2.$$

Αν τώρα επιλέξουμε $a_k = 1/k^2$, εξασφαλίζουμε ότι η σειρά $\sum_k a_k q_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα, οπότε η f είναι καλά ορισμένη και συνεχής, αλλά

$$|S_{3n_k}(0) - S_{2n_k}(0)| \geq \frac{2^k}{k^2} \log 2,$$

άρα η $(S_n(0))$ δεν είναι ούτε καν φραγμένη, πόσο μάλλον συγκλίνουσα.