9 Εισαγωγή στην Ολοκλήρωση Lebesgue χωρίς μέτρο

9.1 Το ζεύγος $(C_{oo}(\mathbb{R}), \int)$

Ο *γραμμικός* χώρος:

$$C_{oo}(\mathbb{R}) \equiv \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \text{συνεχής με συμπαγή φορέα}\}$$

Δηλαδή κάθε $f \in C_{oo}(\mathbb{R})$ *φέρεται* σε ένα συμπαγές διάστημα $[a(f), b(f)]$ με την έννοια ότι $t \notin [a(f), b(f)] \Rightarrow f(t) = 0$.

Αν $f \in C_{oo}(\mathbb{R})$ ορίζεται το ολοκλήρωμα Riemann

$$\int f \equiv \int_{a(f)}^{b(f)} f(t)dt.$$

Η απεικόνιση $\int : C_{oo}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} : f \to \int f$
είναι γραμμική και *θετική*, δηλ. αν $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}_+$ τότε $\int f \in \mathbb{R}_+$.

Στόχος: Να την επεκτείνουμε σε ευρύτερη κλάση συναρτήσεων με μια *διαδικασία πλήρωσης*.

9.2 Η απεικόνιση $\|\cdot\|_1$

Πρόταση 9.1 *Για κάθε $f \in C_{oo}(\mathbb{R})$,*

$$\int |f| = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int h_n : h_n \in C_{oo}(\mathbb{R}), h_n \geq 0, \sum_n h_n \geq |f| \right\}.$$

Η απόδειξη στηρίζεται σε ένα επιχείρημα συμπάγειας μέσω του Λήμματος

Λήμμα 9.2 *Έστω $f_n, f \in C_{oo}(\mathbb{R})$ με $f, f_n \geq 0$ και $f_n \leq f_{n+1}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(t) \leq \lim_n f_n(t)$ (μπορεί νάναι $+\infty$). Τότε*

(ι) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $\sup\{f(t) - f_n(t) : t \in \mathbb{R}\} \leq \varepsilon$ και
(ιι) $\sup_n \int f_n \geq \int f$.

Απόδειξη (ι) Υποθέτουμε ότι η f φέρεται στο $[a,b]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$K_n = \{x \in [a,b] : f(x) - f_n(x) \geq \varepsilon\}.$$

Αφού η $f - f_n$ είναι συνεχής, το K_n είναι κλειστό στο $[a,b]$. Επειδή η (f_n) είναι αύξουσα, η (K_n) είναι φθίνουσα.

Αν υπάρχει $x \in \cap_n K_n$ τότε $\lim_n f_n(x) \leq f(x) - \varepsilon$ (το όριο υπάρχει στο $[0,+\infty]$ λόγω μονοτονίας) αντίθετα με την υπόθεση. Άρα $\cap_n K_n = \emptyset$.

Λόγω συμπάγειας του $[a,b]$, υπάρχει n_ε ώστε $K_{n_\varepsilon} = \emptyset$, οπότε $K_n = \emptyset$ για κάθε $n \geq n_\varepsilon$.

Δηλαδή, αν $n \geq n_\varepsilon$, τότε για κάθε $x \in [a,b]$ έχω $f(x) - f_n(x) < \varepsilon$. Επίσης, αν $x \notin [a,b]$ τότε $f(x) - f_n(x) = -f_n(x) \leq 0 < \varepsilon$.

(ιι) Από το (ι) με $\delta = \frac{\varepsilon}{b-a}$ έχουμε για κάθε $n \geq n_\delta$ και κάθε $x \in [a,b]$ την ανισότητα $f_n(x) > f(x) - \delta$ και συνεπώς

$$\int f_n \geq \int_a^b f_n(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx - \delta(b-a) = \int f - \varepsilon$$

άρα $\sup_n \int f_n \geq \int f - \varepsilon$. Αφού το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετο, έπεται ότι $\sup_n \int f_n \geq \int f$.

□

Απόδειξη της Πρότασης Θέτοντας $h_1 = |f|$ και $h_k = 0$ για $k = 2, 3, \ldots$ βλέπουμε ότι

$$\int |f| \geq \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int h_n : h_n \in C_{oo}(\mathbb{R}), h_n \geq 0, \sum_n h_n \geq |f| \right\}.$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι κάθε ακολουθία (h_n) όπου $h_n \in C_{oo}(\mathbb{R}), h_n \geq 0$ και $\sum_n h_n \geq |f|$ ικανοποιεί $\int |f| \leq \sum_n \int h_n$.

Εφαρμόζουμε το Λήμμα για την ακολουθία (f_n) όπου $f_n = \sum_{k=1}^n h_k$ και την $|f|$: από το (ιι) έχουμε

$$\sup_n \int \sum_{k=1}^n h_k = \sup_n \int f_n \geq \int |f|$$

$$\text{άρα} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int h_k = \sup_n \sum_{k=1}^n \int h_k = \sup_n \int \sum_{k=1}^n h_k \geq |f|$$

(γραμμικότητα του ολοκληρώματος). □

Ορισμός 9.1 *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ τυχαία συνάρτηση. Ορίζουμε*

$$\|f\|_1 \equiv \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int h_n : h_n \in C_{oo}(\mathbb{R}), h_n \geq 0, \sum_n h_n \geq |f| \right\} \in [0, +\infty]$$

Παρατήρησε ότι δεχόμαστε άπειρα αθροίσματα.
Δείξαμε ότι αν $f \in C_{oo}(\mathbb{R})$ τότε $\|f\|_1 = \int |f|$.

Παρατηρήσεις 9.3 *(α) Μπορεί μια $f \neq 0$ να έχει $\|f\|_1 = 0$. Π.χ. η $\chi_{\{0\}}$ ή η $\chi_{\mathbb{Q}}$.*

Γενικότερα αν $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ είναι οποιοδήποτε αριθμήσιμο (ή πεπερασμένο) σύνολο, τότε $\|\chi_{\mathbb{A}}\|_1 = 0$.
(β) Μπορεί μια f να έχει $\|f\|_1 = +\infty$. Π.χ. $f(t) = t$ (στο $\mathbb{R}$).
(γ) $\|f\|_1 = \left\|\bar{f}\right\|_1 = \| \, |f| \, \|_1$.

Απόδειξη του (α) Έστω $\varepsilon > 0$ και $\delta_n = \dfrac{\varepsilon}{2^n}$. Αν $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια αρίθμηση του $\mathbb{A}$, ορίζουμε

$$h_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-a_n|}{\delta_n}, & |x - a_n| \leq \delta_n \\ 0, & |x - a_n| > \delta_n \end{cases}$$

Προφανώς $h_n(a_n) = 1$, άρα $\sum_n h_n(a) \geq 1$ για κάθε $a \in \mathbb{A}$. Δηλαδή $\sum_n h_n \geq \chi_{\mathbb{A}}$.

Από την άλλη το $\int h_n$ είναι το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου με βάση μήκους $2\delta_n$ και ύψος 1, άρα $\int h_n = \dfrac{\varepsilon}{2^n}$ και επομένως $\sum_n \int h_n = \varepsilon$.

Πρόταση 9.4 *Για κάθε $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$,*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \|\lambda f\|_1 = |\lambda| \, \|f\|_1 \quad (\text{σύμβαση: } 0 \cdot (+\infty) = 0) \\ (ii) \quad & \|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \end{aligned}$$

Η *απόδειξη* του (i) είναι απλή εφαρμογή του ορισμού.
Το (ii) είναι ειδική περίπτωση της επόμενης βασικής Πρότασης.

Πρόταση 9.5 *Αν για κάθε $t \in \mathbb{R}, |f(t)| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(t)|$, τότε $\|f\|_1 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1$.*

Απόδειξη Αν κάποιο $\|f_n\|_1 = +\infty$, το συμπέρασμα ισχύει. Υποθέτω λοιπόν ότι $\|f_n\|_1 < +\infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν δοθεί $\varepsilon > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν μη αρνητικές $h_{n,j} \in C_{oo}(\mathbb{R})$ ώστε

$$|f_n| \leq \sum_j |h_{n,j}| \tag{1}$$

και

$$\sum_j \int h_{n,j} < \|f_n\|_1 + \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{2}$$

απο τον ορισμό της $\|f\|_1$. Από την (1) έπεται ότι

$$|f| \leq \sum_n \sum_j |h_{n,j}|$$

και από την (2) έχουμε

$$\sum_n \sum_j \int h_{n,j} < \sum_n \|f_n\|_1 + \varepsilon.$$

Επομένως δείξαμε ότι

$$\|f\|_1 \leq \sum_n \sum_j \int h_{n,j} < \sum_n \|f_n\|_1 + \varepsilon$$

και επειδή το ε είναι τυχαίο, η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Πόρισμα 9.6 *Αν $|f| \leq |g|$ τότε $\|f\|_1 \leq \|g\|_1$.*

9.3 Ο χώρος $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Ορισμός 9.2 *Μία $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ αν υπάρχει ακολουθία (f_n) με $f_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ ώστε $\|f - f_n\|_1 \to 0$.*

Παρατηρήσεις 9.7 *(α) $C_{oo}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.*
(β) Ο $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ είναι γραμμικός χώρος και η απεικόνιση

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+ : f \to \|f\|_1$$

είναι ***ημινόρμα*** *στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, δηλαδή για κάθε $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{C}$,*

(i) $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \, \|f\|_1$
(ii) $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

(δεν είναι νόρμα γιατί υπάρχουν $f \neq 0$ με $\|f\|_1 = 0$, άρα δεν ορίζει μετρική).

(γ) Αν $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ τότε $\bar{f}, |f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και $\|f\|_1 = \|\bar{f}\|_1 = \||f|\|_1$.

(δ) Αν $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ τότε[1] *$\max\{f_1, \ldots, f_n\} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.*

(ε) Αν $\|f\|_1 = 0$, τότε $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (πάρε $f_n = 0$ για κάθε n).

Απόδειξη (α) Πάρε $f_n = f$ για κάθε n.

(β) Αν $\|f - f_n\|_1 \to 0$ όπου $f_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$, άρα $\|f_n\|_1 = \int |f_n| < \infty$, τότε αναγκαστικά $\|f\|_1 < \infty$ (Πρόταση 9.4 (ii)). Οι ιδιότητες (i) και (ii) έχουν ήδη αποδειχθεί (Πρόταση 9.4).

(γ) Έστω $f_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ με $\|f - f_n\|_1 \to 0$. Τότε $|(|f| - |f_n|)| \leq |f - f_n|$, άρα $\||f| - |f_n|\|_1 \leq \|f - f_n\|_1 \to 0$. Επομένως $|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Με τον ίδιο τρόπο, αφού $\|\bar{f} - \bar{f}_n\|_1 \to 0$, προκύπτει ότι $\bar{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Οι ισότητες $\|f\|_1 = \|\bar{f}\|_1 = \||f|\|_1$ έχουν ήδη δειχθεί.

(δ) Χρησιμοποιώντας τη γνωστή και εύκολη ταυτότητα

$$\max\{f_1(t), f_2(t)\} = \frac{1}{2}(f_1(t) + f_2(t) + |f_1(t) - f_2(t))$$

προκύπτει, αφού ο $\mathcal{L}^1$ είναι γραμμικός χώρος, ότι $f_1 - f_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, άρα $|f_1 - f_2| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ από το (γ), άρα $\max\{f_1, f_2\} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ πάλι λόγω γραμμικότητας. Η γενική περίπτωση αποδεικνύεται τώρα άμεσα με επαγωγή.

9.4 Το ολοκλήρωμα στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και $f_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ με $\|f - f_n\|_1 \to 0$. Παρατηρούμε ότι:

• *Η $(\int f_n)_n$ είναι βασική στο $\mathbb{C}$, άρα συγκλίνει.* Αυτό είναι άμεσο από την ανισότητα

$$\left|\int f_n - \int f_m\right| = \left|\int (f_n - f_m)\right| \leq \int |f_n - f_m| = \|f_n - f_m\|_1$$
$$\leq \|f_n - f\|_1 + \|f - f_m\|_1 .$$

• *Αν $g_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ με $\|f - g_n\|_1 \to 0$ τότε $\lim_n \int f_n - \int g_n = 0$.* Πράγματι,

$$\left|\int f_n - \int g_n\right| \leq \|f_n - f\|_1 + \|f - g_n\|_1 .$$

[1] η συνάρτηση $g = \max\{f_1, \ldots, f_n\}$ ορίζεται βεβαίως κατά σημείο: $g(t) = \max\{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}$

Ορισμός 9.3 (Το ολοκλήρωμα Lebesgue) *Για κάθε $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ορίζουμε $I(f) \in \mathbb{C}$ ως εξής:*
επιλέγουμε $f_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ με $\|f - f_n\|_1 \to 0$ και θέτουμε

$$I(f) = \lim_n \int f_n.$$

Ο αριθμός $I(f)$ είναι καλά ορισμένος. Δηλαδή το όριο $\lim_n \int f_n$ υπάρχει και δεν εξαρτάται από την ακολουθία που «προσεγγίζει» την f.

Συμβολισμοί *Με $I(f)$ συμβολίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue μιάς συνάρτησης $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\int f$ ή $\int f(x)dx$ για το ολοκλήρωμα Riemann της f, αν υπάρχει. (Θα δείξουμε αργότερα ότι όταν το $\int f$ υπάρχει, τότε ταυτίζεται με το $I(f)$.) Άλλοι συμβολισμοί για το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι $\int f dm$ ή $\int f(x)dm(x)$.*

Πρόταση 9.8 *(α) Η απεικόνιση $I : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική και θετική (άρα, αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ στον $\mathcal{L}^1$ με $f \le g$, τότε $I(f), I(g) \in \mathbb{R}$ και $I(f) \le I(g)$).*
(β) Αν $f \in C_{oo}(\mathbb{R})$ τότε $I(f) = \int f$.
(γ) Αν $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ τότε $\|f\|_1 = I(|f|)$.

Απόδειξη Το (β) είναι προφανές (θεωρούμε τη σταθερή ακολουθία $f_n = f$ για κάθε n).

Το (α) προκύπτει άμεσα απο το (β) και τις αντίστοιχες ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann. Για παράδειγμα αν η $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}_+$, μπορώ να βρώ $f_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ με $\|f - f_n\|_1 \to 0$ επίσης μη αρνητικές. [2] Έχουμε τώρα $\int f_n \ge 0$ αφού $f_n \ge 0$ και άρα $I(f) = \lim \int f_n \ge 0$.

Παρόμοια προκύπτει και το (γ): αν $f_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ και $\|f - f_n\|_1 \to 0$ τότε $\||f| - |f_n|\|_1 \to 0$. Έχουμε $I(|f|) = \lim \int |f_n|$ εξ ορισμού. Αλλά αφού $f_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ ξέρουμε ήδη ότι $\|f_n\|_1 = I(|f_n|)$ (Πρόταση 9.1). Επειδή $|\,\|f_n\|_1 - \|f\|_1\,| \le \|f_n - f\|_1 \to 0$ (τριγωνική ανισότητα) έχουμε τελικά

$$I(|f|) = \lim \int |f_n| = \lim \|f_n\|_1 = \|f\|_1 . \qquad \square$$

[2] πάρε οποιαδήποτε ακολουθία (g_n) με $g_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ ώστε $\|f - g_n\|_1 \to 0$ και βάλε $f_n = |g_n|$, παρατηρώντας ότι, αφού $|(|f| - |g_n|)| \le |f - g_n|$ έχουμε $\||f| - |g_n|\|_1 \le \|\,|f - g_n|\,\|_1$ άρα

$$\|f - |g_n|\|_1 = \|\,|f| - |g_n|\,\|_1 \le \|\,|f - g_n|\,\|_1 = \|f - g_n\|_1 \to 0.$$

Λήμμα 9.9 *Αν* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *τότε* $|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *και*

$$|I(f)| \le I(|f|) = \|f\|_1 .$$

Απόδειξη Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι $|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Όταν η f παίρνει πραγματικές τιμές, η ανισότητα $|I(f)| \le I(|f|)$ είναι άμεση συνέπεια της θετικότητας της απεικόνισης I:

$$\begin{aligned} -|f| \le f \le |f| &\Rightarrow I(-|f|) \le I(f) \le I(|f|) \\ \Rightarrow -I(|f|) \le I(f) \le I(|f|) &\Rightarrow |I(f)| \le I(|f|). \end{aligned}$$

Για τη γενική περίπτωση[3] (όπου $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) γράφουμε τον μιγαδικό αριθμό $I(f)$ σε πολική μορφή $I(f) = re^{i\theta}$ οπότε

$$|I(f)| = r = e^{-i\theta} I(f) = I(e^{-i\theta} f).$$

Αν τώρα $u \equiv \frac{1}{2}(e^{-i\theta} f + e^{i\theta}\bar{f})$ και $v \equiv \frac{1}{2i}(e^{-i\theta} f - e^{i\theta}\bar{f})$, οι u και v είναι πραγματικές συναρτήσεις που ανήκουν στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και $e^{-i\theta} f = u + iv$. Επομένως

$$|I(f)| = I(e^{-i\theta} f) = I(u) + iI(v).$$

Αφού όμως οι $|I(f)|$, $I(u)$ και $I(v)$ είναι πραγματικοί αριθμοί, έχουμε $I(v) = 0$ οπότε $|I(f)| = I(u)$. Επίσης το πραγματικό μέρος u της $e^{-i\theta} f$ δεν είναι μεγαλύτερο από την απόλυτη τιμή της, δηλαδή

$$u \le |e^{-i\theta} f| = |f|$$

επομένως, αφού η I διατηρεί τη διάταξη πραγματικών συναρτήσεων, έχουμε $I(u) \le I(|f|)$. Τελικώς λοιπόν

$$|I(f)| = I(u) + iI(v) = I(u) \le I(|f|) \qquad \square$$

10 Τα βασικά Θεωρήματα

Θεώρημα 10.1 (Πληρότητα) *Αν* $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *και για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_o \in \mathbb{N}$ *ώστε* $n, m \ge n_o \ \Rightarrow\ \|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$, *τότε υπάρχει* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *ώστε* $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

[3] Η ανισότητα έπεται βεβαίως άμεσα από την αντίστοιχη ανισότητα για το ολοκλήρωμα Riemann. Δίνουμε μια αυτοτελή απόδειξη που στηρίζεται μόνο στη γραμμικότητα και τη θετικότητα της απεικόνσης I.

Απόδειξη Επιλέγουμε διαδοχικά φυσικούς αριθμούς $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ ώστε

$$i, j \geq k_n \;\Rightarrow\; \|f_i - f_j\|_1 < \frac{1}{2^n}. \tag{3}$$

Ειδικότερα αν γράψουμε για ευκολία $g_n \equiv f_{k_n}$ έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\|g_{n+1} - g_n\|_1 < \frac{1}{2^n}.$$

Δουλεύουμε αρχικά με την υπακολουθία (g_n). Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{t \in \mathbb{R} : \text{ υπάρχει στο } \mathbb{C} \text{ το όριο } \lim_{n\to\infty} g_n(t)\}.$$

και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} g_n(t), & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases}$$

Η πρωτοτυπία της απόδειξης είναι ο ακόλουθος

Ισχυρισμός Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ανισότητα

$$|f(t) - g_n(t)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |g_{k+1}(t) - g_k(t)|. \tag{4}$$

Απόδειξη Ισχυρισμού Για κάθε $m > n$ η τριγωνική ανισότητα δίνει

$$|g_m(t) - g_n(t)| \leq \sum_{k=n}^{N-1} |g_{k+1}(t) - g_k(t)|$$

οπότε, αν $t \in A$, το όριο καθώς $m \to \infty$ του αριστερά μέλους είναι $|f(t) - g_n(t)|$ και η ανισότητα (4) αληθεύει.

Αν $t \notin A$, τότε $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |g_{k+1}(t) - g_k(t)| = +\infty$ οπότε η (4) πάλι αληθεύει. Πράγματι, αν $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |g_{k+1}(t) - g_k(t)| < \infty$ τότε η σειρά $\sum\limits_{k=n}^{\infty} (g_{k+1}(t) - g_k(t))$ συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει, δηλαδή το όριο $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k=n}^{m-1} (g_{k+1}(t) - g_k(t))$ υπάρχει. Όμως το όριο αυτό ισούται με $\lim\limits_{m\to\infty} (g_m(t) - g_n(t))$, οπότε $t \in A$!

Ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 9.5 στην ανισότητα (4), έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\|f - g_n\|_1 \leq \sum_{k=n}^{\infty} \|g_{k+1} - g_k\|_1 \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Η απόδειξη είναι τώρα άμεση: αν μου δώσουν $\varepsilon > 0$, επιλέγω $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$ και τότε, για κάθε $m \geq k_n$ έχω

$$\|f - f_m\|_1 \leq \|f - f_{k_n}\|_1 + \|f_{k_n} - f_m\|_1 < \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

χρησιμοποιώντας και την (3). $\square$

Παρατήρηση 10.2 Στο Θεώρημα, η $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ δεν είναι μοναδική. Πράγματι, αν h είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση που ικανοποιεί $\|h\|_1 = 0$, τότε θέτοντας $g = f + h$ έχουμε $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και $\|g - f_n\|_1 \leq \|f - f_n\|_1 + \|h\|_1 \to 0$.

Θεώρημα 10.3 (Μονότονη σύγκλιση) *Έστω (f_n) μιά αύξουσα ακολουθία στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ το όριο $f(t) = \lim_n f_n(t)$ υπάρχει. Αν $\sup_n I(f_n) < \infty$ τότε*

$$\lim_n f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad \textit{και} \quad I(\lim_n f_n) = \lim_n I(f_n).$$

Απόδειξη Αντικαθιστώντας την f_n με την $f_n - f_1$ και την f μα την $f - f_1$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f_n \geq 0$.

Η ακολουθία $(I(f_n))_n$ είναι αύξουσα στον $\mathbb{R}_+$ από την μονοτονία του ολοκληρώματος. Θέτουμε $J = \sup_n I(f_n) = \lim I(f_n)$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$0 \leq f(t) - f_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} (f_{k+1}(t) - f_k(t)).$$

Επομένως από την Πρόταση 9.5

$$\begin{aligned}
\|f - f_n\|_1 &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \|f_{k+1} - f_k\|_1 \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} I(f_{k+1} - f_k) \quad \text{γιατί } f_{k+1} - f_k \in \mathcal{L}^1 \text{ και } f_{k+1} - f_k \geq 0 \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} (I(f_{k+1}) - I(f_k)) = \lim_N I(f_N) - I(f_n) = J - I(f_n)
\end{aligned}$$

άρα $\lim_n \|f - f_n\|_1 = 0$. Επειδή $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, από τον ορισμό του $\mathcal{L}^1$ υπάρχει $g_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ ώστε $\|f_n - g_n\|_1 < \frac{1}{n}$. Έχουμε λοιπόν

$$\|f - g_n\|_1 \leq \|f - f_n\|_1 + \|f_n - g_n\|_1 \to 0$$

πράγμα που δείχνει ότι $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Τώρα που δείξαμε ότι $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $f - f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και $f - f_n \geq 0$, συνεπώς $I(f - f_n) = \|f - f_n\|_1 \to 0$ (Πρόταση 9.8 (γ)). Εφόσον $I(f) \in \mathbb{R}$, από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος έπεται ότι $I(f - f_n) = I(f) - I(f_n)$, άρα τελικώς $I(f) = \lim_n I(f_n)$. $\square$

Παράδειγμα 10.4 *Αν $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ ή γενικότερα $f = \chi_A$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ αριθμήσιμο, τότε $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και $I(f) = 0$.*

Απόδειξη Επιλέγουμε μια αρίθμηση $\{a_n\}$ του A και θέτουμε $\chi_n = \chi_{\{a_1,\dots,a_n\}}$. Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι $\|\chi_A\|_1 = 0$ για πεπερασμένα ή αριθμήσιμα σύνολα. Επομένως (Παρατήρηση 9.7 (ε)) κάθε $\chi_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, άρα $I(\chi_n) = \|\chi_n\|_1 = 0$.

Επειδή $\chi_n(x) \nearrow \chi_A(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται από το τελευταίο Θεώρημα ότι $\chi_A \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και $I(\chi_A) = \lim I(\chi_n) = 0$.

Θεώρημα 10.5 (Beppo Levi) *Έστω $g_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ με $g_n \geq 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $\sum_n g_n(t) < \infty$. Αν $\sum_n I(g_n) < \infty$ τότε*

$$\sum_n g_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad \textit{και} \quad I(\sum_n g_n) = \sum_n I(g_n).$$

Απόδειξη Είναι απλή εφαρμογή του Θεωρήματος Μονότονης σύγκλισης για την ακολουθία (f_n) όπου $f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$ χρησιμοποιώντας και τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος. $\square$

Η εναλλαγή ορίου και ολοκλήρωσης δεν ισχύει γενικά:

Παράδειγμα 10.6 *Έστω $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}_+$ με*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ n^2(\frac{1}{n} - |x|), & 0 < |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0, & |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

(το «(τρύπιο) καπέλο της μάγισας»). Εδώ κάθε $f_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ *και* $\lim\limits_n f_n(x) = 0$ *για κάθε* x. *Όμως* $\int f_n = 1$ *για κάθε* n *άρα* $\lim\limits_n \int f_n \neq 0$.
Μπορείς μάλιστα, αν θέλεις, να χρησιμοποιήσεις το «ψηλό καπέλο της μάγισας»: $g_n = nf_n$, *οπότε πάλι θα έχεις* $\lim\limits_n g_n(x) = 0$ *για κάθε* x *αλλά* $\lim\limits_n \int g_n = +\infty$.

Όταν η ακολουθία (f_n) δεν είναι μονότονη, την εναλλαγή ορίου με ολοκλήρωση μπορεί να την εξασφαλίσει ένας «ελεγκτής» $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Θεώρημα 10.7 (Κυριαρχημένη σύγκλιση) *Έστω* $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. *Υποθέτουμε ότι υπάρχει* $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *ώστε* $|f_n| \leq g$ *για κάθε* n. *Αν για κάθε* $t \in \mathbb{R}$ *το όριο* $f(t) = \lim_n f_n(t)$ *υπάρχει τότε*

$$\lim_n f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \quad I(\lim_n f_n) = \lim_n I(f_n) \ \text{ και } \quad \lim_n \|f_n - f\|_1 = 0.$$

Απόδειξη Θεωρώντας χωριστά πραγματικά και φανταστικά μέρη, μπορώ να υποθέσω ότι οι f_n παίρνουν πραγματικές τιμές. Ορίζουμε

$$\psi_m \equiv \sup_{k \geq m} f_k \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Η απόδειξη θα γίνει με τα εξής βήματα:

Βήμα (α) Θα δείξουμε πρώτα ότι $\psi_m \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Βήμα (β) Θα δείξουμε ότι $f = \lim\limits_m \psi_m \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και $I(f) = \lim\limits_m I(\psi_m)$.

Βήμα (γ) Θα δείξουμε ότι $\limsup\limits_m I(f_m) \leq I(f)$ και τέλος, θεωρώντας την $(-f_n)$, θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη.

Αναλυτικά:
Βήμα (α) Σταθεροποιώ ένα $m \in \mathbb{N}$ και ορίζω, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi_{n,m} = g + \sup\{f_m, f_{m+1}, \ldots, f_{m+n}\}$$

Γνωρίζουμε ήδη (Παρατήρηση 9.7 (δ)) ότι $\sup\{f_m, f_{m+1}, \ldots, f_{m+n}\} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, άρα $\phi_{n,m} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Η ακολουθία $(\phi_{n,m})_n$ είναι βεβαίως αύξουσα. Επίσης είναι άνω φραγμένη (κατά σημείο) αφού $f_k \leq |f_k| \leq g$ άρα $\phi_{n,m} \leq 2g$, επομένως το όριο $\phi_m = \lim\limits_n \phi_{n,m}$ υπάρχει. Τέλος για κάθε n έχουμε $I(\phi_{n,m}) \leq I(2g)$, άρα $\sup_n I(\phi_{n,m}) < +\infty$. Ικανοποιούνται λοιπόν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μονότονης Σύγκλισης και συνεπώς $\phi_m = \lim\limits_n \phi_{n,m} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Αλλά $\psi_m = \phi_m - g$ και $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, άρα $\psi_m \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Βήμα (β) Έχουμε τώρα για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μία $\psi_m \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Παρατηρούμε ότι η ακολουθία (ψ_m) είναι φθίνουσα, άρα, αν $u_m \equiv g - \psi_m$, η (u_m) είναι αύξουσα και κάθε u_m ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Επιπλέον $u_m \leq g + \psi_m \leq 2g$, άρα το (κατά σημείο) όριο $u = \lim_m u_m$ υπάρχει και $\sup_m I(u_m) < \infty$ (αφού $I(u_m) \leq I(2g)$ για κάθε m). Πάλι από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης προκύπτει ότι $u = \lim u_m \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και $I(u) = \lim_m I(u_m)$. Επομένως

$$\begin{aligned} \inf_m \psi_m &= \lim_m \psi_m = g - u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \\ \text{και}\quad I(\psi_m) &= I(g) - I(u_m) \to I(g) - I(u) = I(g-u) \\ \text{δηλαδή}\quad \lim_m I(\psi_m) &= I(\lim_m \psi_m). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε όμως ότι[4] $\lim_m \psi_m = \limsup_m f_m = \lim_m f_m = f$ εφόσον από την υπόθεση το τελευταίο όριο υπάρχει. Έχουμε λοιπόν ήδη αποδείξει ότι

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad \text{και} \quad I(f) = \lim_m I(\psi_m).$$

Βήμα (γ) Επειδή για κάθε k ισχύει η σχέση $I(f_k) \leq I(\sup f_k)$, άρα $\sup I(f_k) \leq I(\sup f_k)$, έχουμε τώρα

$$\begin{aligned} \limsup I(f_m) &= \inf_m(\sup_{k\geq m} I(f_k)) \leq \inf_m(I(\sup_{k\geq m} f_k)) = \inf_m I(\psi_m) = I(f) \\ \text{οπότε}\qquad & \limsup I(f_m) \leq I(f). \end{aligned}$$

Εφορμόζοντας την ίδια διαδικασία στην ακολουθία $(-f_n)$ που συγκλίνει στη $-f$ βρίσκουμε

$$\limsup I(-f_m) \leq I(-f) \qquad \text{οπότε} \qquad \liminf I(f_m) \geq I(f).$$

έχουμε δηλαδή

$$I(f) \leq \liminf I(f_m) \leq \limsup I(f_m) \leq I(f)$$

άρα ισχύει ισότητα.

Τέλος, για να δείξουμε ότι $\|f_n - f\|_1 \to 0$, παρατηρούμε ότι ήδη γνωρίζουμε ότι $f - f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, επομένως $\|f_n - f\|_1 = I(|f_n - f|)$. Επίσης, $|f_n - f| \to 0$ κατά σημείο ενώ $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$. Εφαρμόζοντας λοιπόν το πρώτο μέρος του θεωρήματος στην ακολουθία $(|f_n - f|)$, έχουμε $\lim_n I(|f_n - f|) = I(\lim_n |f_n - f|) = 0$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

[4] Υπενθύμιση: $\limsup_n a_n = \lim_n(\sup\{a_k : k \geq n\})$ και $\liminf_n a_n = \lim_n(\inf\{a_k : k \geq n\})$. Γενικά ισχύει $\liminf a_n \leq \limsup a_n$ με ισότητα αν και μόνον αν το όριο $\lim a_n$ υπάρχει

11 Σύνολα μέτρου μηδέν

Ορισμός 11.1 *Ένα $A \subset \mathbb{R}$* **έχει μέτρο μηδέν** *αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν διαστήματα $J_n \subseteq \mathbb{R}$ με συνολικό μήκος $\sum\limits_n m(J_n) < \varepsilon$ ώστε $A \subseteq \bigcup\limits_n J_n$.*

Μια ιδιότητα ισχύει **σχεδόν παντού** *αν το σύνολο των σημείων στα οποία δεν ισχύει έχει μέτρο μηδέν.*

Λήμμα 11.1 *(α) Αν $J \subseteq \mathbb{R}$ είναι (φραγμένο) διάστημα με άκρα $a \leq b$ τότε $\chi_J \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και $I(\chi_J) = b - a = \int \chi_J$ (=το ολοκλήρωμα Riemann της χ_J).*

(β) Αν $K \subseteq \mathbb{R}$ είναι πεπερασμένη ένωση (φραγμένων) διαστημάτων, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $g \in C_{oo}(\mathbb{R})$ με $\chi_K \leq g$ και $\int g < I(\chi_K) + \varepsilon$.

Απόδειξη (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν συνεχείς $h, g : \mathbb{R} \to [0, 1]$ ώστε η g να ισούται με 1 στο $[a, b]$ και να μηδενίζεται έξω από το $(a - \frac{\varepsilon}{5}, b + \frac{\varepsilon}{5})$ ενώ η h μηδενίζεται έξω από το (a, b) και ισούται με 1 στο $[a + \frac{\varepsilon}{5}, b - \frac{\varepsilon}{5}]$ (πάρε, αν θέλεις, την g με γράφημα την πολυγωνική γραμμή που ενώνει τα σημεία του επιπέδου με συντεταγμένες $(a - \frac{\varepsilon}{5}, 0), (a, 1), (b, 1)$ και $(b + \frac{\varepsilon}{5}, 0)$ και την h με γράφημα την πολυγωνική γραμμή που ενώνει τα σημεία $(a, 0), (a + \frac{\varepsilon}{5}, 1), (b - \frac{\varepsilon}{5}, 1)$ και $(b, 0)$).

Τότε $h \leq \chi_J \leq g$ άρα $0 \leq \chi_J - h \leq g - h$. Επειδή $g - h \in C_{oo}(\mathbb{R})$, από τον ορισμό της $\|\cdot\|_1$ προκύπτει $\|\chi_J - h\|_1 \leq \int (g - h) \leq \frac{4}{5}\varepsilon$, γιατί $0 \leq g - h \leq 1$ και η $g - h$ φέρεται σε δύο διαστήματα μήκους $\frac{2\varepsilon}{5}$ το καθένα. Δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $h \in C_{oo}(\mathbb{R})$ με $\|\chi_J - h\|_1 < \varepsilon$.

Αυτό δείχνει ότι $\chi_J \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Τώρα η σχέση $h \leq \chi_J \leq g$ δίνει $I(h) \leq I(\chi_J) \leq I(g)$. Αλλά $g, h \in C_{oo}(\mathbb{R})$ άρα $I(h) = \int h \geq (b - \frac{\varepsilon}{5}) - (a + \frac{\varepsilon}{5})$ και για τον ίδιο λόγο $I(g) \leq (b + \frac{\varepsilon}{5}) - (a - \frac{\varepsilon}{5})$. Τελικώς λοιπόν

$$(b - a) - \varepsilon < I(\chi_J) < (b - a) + \varepsilon$$

πράγμα που δείχνει, αφού το ε είναι αυθαίρετο, ότι $I(\chi_J) = b - a = \int \chi_J$.

(β) Αν το K είναι ένα διάστημα J, έχουμε ήδη βρεί στο (α) μια $g \in C_{oo}(\mathbb{R})$ με $\chi_K \leq g$ και $\int g \leq (b - a) + \frac{2}{5}\varepsilon < I(\chi_K) + \varepsilon$. Επειδή κάθε πεπερασμένη ένωση $K = \bigcup\limits_{k=1}^{n} J_k$ διαστημάτων γράφεται ως πεπερασμένη ένωση ξένων ανά δύο[5] διαστημάτων $K = \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$, οπότε $\chi_K = \sum\limits_{i=1}^{m} \chi_{V_i}$, το συμπέρασμα έπεται τώρα από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος. $\square$

[5] θέτω

$$K_1 = J_1,\ K_2 = J_2 \setminus J_1,\ K_3 = J_3 \setminus (J_1 \cup J_2), \ldots.$$

Πρόταση 11.2 *Έστω* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. *Τότε*

$$\|h\|_1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h = 0 \text{ σχεδόν παντού.}$$

Στην περίπτωση αυτή $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Απόδειξη Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι καθε συνάρτηση h που ικανοποιεί $\|h\|_1 = 0$ ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε την ισοδυναμία.

(α) Αν $h = 0$ σχεδόν παντού, να δείξουμε ότι $\|h\|_1 = 0$.

(α1) Υποθέτουμε πρώτα ότι επιπλέον η h είναι φραγμένη, έστω $|h| \le M$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Το σύνολο $A = \{t \in \mathbb{R} : h(t) \neq 0\}$ καλύπτεται από μία αριθμήσιμη ένωση $\bigcup_m J_n \supseteq A$ από διαστήματα συνολικού μήκους $\sum_n m(J_n) < \varepsilon$. Θέτω

$$K_1 = J_1,\ K_2 = J_2 \setminus J_1,\ K_3 = J_3 \setminus (J_1 \cup J_2), \ldots.$$

Τότε κάθε K_j είναι πεπερασμένη ένωση διαστημάτων και κατά συνέπεια η χαρακτηριστική του συνάρτηση $\chi_j = \chi_{K_j}$ ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και $I(\chi_j) = \int \chi_j$. Επίσης $K_j \subseteq J_j$ άρα

$$I(\chi_j) \le I(\chi_{J_j}) = m(J_j)$$

οπότε $\sum_n I(\chi_n) \le \sum_n m(J_n) < \varepsilon$. Παρατηρούμε τώρα ότι η σχέση $A \subseteq \cup_n J_n = \cup_n K_n$ συνεπάγεται, εφόσον τα K_n είναι ξένα ανά δύο, ότι $0 \le \chi_A \le \sum_n \chi_n$ και συνεπώς

$$|h| = |h|\chi_A \le M \sum_n \chi_n \tag{5}$$

Από το Λήμμα 11.1 βρίσκουμε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μια $h_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ με $\chi_n \le h_n$ και $\int h_n \le \int \chi_n + \frac{\varepsilon}{2^n}$ οπότε έχουμε

$$|h| \le M \sum_n \chi_n \le \sum_n (M h_n)$$

$$\text{και} \quad \sum_n \int (M h_n) \le M \sum_n I(\chi_n) + M \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} < 2M\varepsilon.$$

Απο τον ορισμό της $\|\cdot\|_1$, αυτό δείχνει ότι $\|h\|_1 = 0$.

Δείξαμε λοιπόν ότι, αν η h μηδενίζεται σχεδόν παντού και επιπλέον είναι φραγμένη, τότε $\|h\|_1 = 0$.

και παρατηρώ ότι κάθε K_j είναι πεπερασμένη ένωση διαστημάτων

(α2) Αν η h δεν είναι φραγμένη, προσεγγίζουμε την $|h|$ με φραγμένες συναρτήσεις «σταματώντας κάθε φορά στο ύψος n», δηλαδή ορίζοντας

$$h_n(t) = \min\{|h(t)|, n\} = \begin{cases} |h(t)|, & \text{αν } |h(t)| \le n \\ n, & \text{αν } |h(t)| > n \end{cases}$$

Επειδή κάθε h_n είναι φραγμένη και (όπως και η h) μηδενίζεται σχεδόν παντού, έπεται ότι $\|h_n\|_1 = 0$, όπως μόλις αποδείξαμε. Παρατηρούμε ότι $h_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (αφού $\|h_n\|_1 = 0$), ότι η ακολουθία (h_n) είναι αύξουσα, και ότι $h_n \to |h|$ κατά σημείο. Το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης δείχνει λοιπόν ότι $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και

$$\|h\|_1 = I(|h|) = \lim_n I(h_n) = 0$$

γιατί $I(h_n) = \|h_n\|_1 = 0$ (αφού $h_n \ge 0$).

(β) Υποθέτουμε τώρα αντίστροφα ότι $\|h\|_1 = 0$ και θα δείξουμε ότι $h = 0$ σχεδόν παντού.

Έστω $A = \{t \in \mathbb{R} : h(t) \neq 0\}$. Θα δείξω ότι το A έχει μέτρο μηδέν.

Παρατηρώ πρώτα ότι $\|\chi_A\|_1 = 0$. Πράγματι: Γράφω $A = \cup_n A_n$ όπου $A_n = \{t \in \mathbb{R} : |h(t)| \ge \frac{1}{n}\}$. Εύκολα φαίνεται[6] ότι $\frac{1}{n}\chi_{A_n} \le |h|$. Κατά συνέπεια έχω $\left\|\frac{1}{n}\chi_{A_n}\right\|_1 \le \|h\|_1 = 0$ άρα $\|\chi_{A_n}\|_1 = 0$ και συνεπώς $\chi_{A_n} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Όμως $\chi_{A_n} \nearrow \chi_A$ άρα από μονότονη σύγκλιση έχω $\chi_A \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και $\|\chi_A\|_1 = I(\chi_A) = \lim I(\chi_{A_n}) = 0$.

Έστω $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Εφόσον $\|\chi_A\|_1 = 0$ υπάρχουν $h_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$, $h_n \ge 0$ ώστε $\chi_A \le \sum_n h_n$ και $\sum_n \int h_n < \varepsilon$. Θέτουμε

$$f_n(t) = \min\left\{\sum_{k=1}^n h_k(t), 1\right\}.$$

Παρατηρούμε (α) ότι $f_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$, (β) ότι η ακολουθία (f_n) είναι αύξουσα και φραγμένη (από το 1), επομένως συγκλίνει κατά σημείο και (γ) ότι για κάθε n ισχύει

$$I(f_n) = \int f_n \le \int \sum_{k=1}^n h_k = \sum_{k=1}^n \int h_k \le \varepsilon.$$

Έστω $f = \lim_n f_n$. Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε ότι $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και $I(f) = \lim I(f_n) \le \varepsilon$.

[6] αν $t \notin A_n$ τότε $\frac{1}{n}\chi_{A_n}(t) = 0 \le |h(t)|$ ενώ αν $t \in A_n$ τότε $\frac{1}{n}\chi_{A_n}(t) = \frac{1}{n} \le |h(t)|$

Έστω $U = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \frac{1}{2}\}$. Παρατήρησε ότι το U είναι ανοικτό. (Πράγματι, αν $x \in U$, τότε αφού $\lim_n f_n(x) > \frac{1}{2}$ υπάρχει n ώστε $f_n(x) > \frac{1}{2}$ οπότε το σύνολο $U_n = \{y \in \mathbb{R} : f_n(y) > \frac{1}{2}\}$ περιέχει το x, είναι ανοικτό (αφού η f είναι συνεχής) και περιέχεται στο U, αφού κάθε $y \in U_n$ ικανοποιεί $\lim_m f_m(y) \geq f_n(y) > \frac{1}{2}$.)

Επειδή $0 \leq \frac{1}{2}\chi_U \leq f$, έχουμε

$$\|\chi_U\|_1 \leq 2\|f\|_1 = 2I(f) \leq 2\varepsilon.$$

Γράφουμε το U ως αριθμήσιμη ξένη ένωση ανοικτών διαστημάτων $U = \bigcup_k J_k$. Κάθε J_k ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και $I(\chi_{J_k}) = m(J_k)$, το μήκος του διαστήματος. Αλλά $\chi_U = \sum \chi_{J_k}$ αφου τα J_k είναι ξένα, άρα για κάθε n έχουμε $\sum_{k=1}^n \chi_{J_k} \leq \chi_U$ και συνεπώς

$$\sum_{k=1}^n m(J_k) = \sum_{k=1}^n I(\chi_{J_k}) = I\left(\sum_{k=1}^n \chi_{J_k}\right) = \left\|\sum_{k=1}^n \chi_{J_k}\right\|_1 \leq \|\chi_U\|_1 \leq 2\varepsilon\,.$$

Όμως, το U περιέχει το A, γιατί αν $t \in A$ τότε, εφόσον $1 = \chi_A(t) \leq \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t)$ υπάρχει n ώστε $\sum_{k=1}^{n} h_k(t) > \frac{1}{2}$ οπότε $f_n(t) = \min\{\sum_{k=1}^{n} h_k(t), 1\} > \frac{1}{2}$ άρα $f(t) > \frac{1}{2}$, οπότε $t \in U$.

Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε ε υπάρχουν διαστήματα J_k με $A \subseteq \bigcup_k J_k$ και $\sum_{k=1}^n m(J_k) < 3\varepsilon$ πράγμα που σημαίνει ότι το A έχει μέτρο μηδέν. $\square$

Πόρισμα 11.3 *Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Τότε*

$$\|f - g\|_1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = g \text{ σχεδόν παντού.}$$

Στην περίπτωση αυτή η f ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ αν και μόνον αν η g ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

***Ο χώρος Banach $L^1(\mathbb{R})$** Παρατηρούμε ότι η σχέση «$f(x) = g(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$» είναι σχέση ισοδυναμίας στον γραμμικό χώρο $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας ονομάζεται $L^1(\mathbb{R})$. Είναι ο (γραμμικός) χώρος πηλίκο $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})/\mathcal{N}$, όπου

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \|f\|_1 = 0\} \\ &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f(x) = 0 \text{ σχεδόν για κάθε } x \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Πράγματι, αν $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, τότε $f = g$ σχεδόν παντού αν και μόνον αν $f - g \in \mathcal{N}$.

Ο $\mathcal{N}$ είναι υποσύνολο του $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, διότι αν $\|f\|_1 = 0$ τότε $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, και είναι γραμμικός υπόχωρος αφού η $\|\cdot\|_1$ είναι ημινόρμα στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Η $\|\cdot\|_1$ επάγει μια *νόρμα* στον $L^1(\mathbb{R})$ που συμβολίζεται (καταχρηστικά) πάλι $\|\cdot\|_1$ και ορίζεται από τη σχέση

$$\| [f] \|_1 = \|f\|_1 \qquad (f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}))$$

όπου $\quad [f] = \{g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) : g = f \text{ σχεδόν παντού}\} = \{f + h : h \in \mathcal{N}\}$
είναι η κλάση ισοδυναμίας μιάς $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Από το Θεώρημα 10.1 έπεται ότι ο χώρος $L^1(\mathbb{R})$ εφοδιασμένος με την μετρική $d([f], [g]) = \|f - g\|_1$ είναι *πλήρης* μετρικός χώρος. Δηλαδή ο χώρος $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ είναι χώρος Banach.

Ο $L^1(\mathbb{R})$ αποτελείται λοιπόν από *κλάσεις ισοδυναμίας* συναρτήσεων, και όχι από συναρτήσεις, όπως ο $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Συνήθως όμως, όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, ταυτίζουμε μια συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ με την κλάση της $[f] \in L^1(\mathbb{R})$.

12 Ολοκλήρωμα Lebesgue και ολοκλήρωμα Riemann

12.1 Υπενθύμιση: Το ολοκλήρωμα Riemann

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **φραγμένη**. Για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a, b]$

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$$

σε *ξένα ανά δύο* διαστήματα
$I_k = [t_{k-1}, t_k)$, $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ και $I_n = [t_{n-1}, t_n]$ θέτουμε

$$\begin{aligned} M_i &= M_i(f) = \sup\{f(s) : s \in I_i\} \\ m_i &= m_i(f) = \inf\{f(s) : s \in I_i\} \qquad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

και

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(t_i - t_{i-1}) \qquad U(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(t_i - t_{i-1}).$$

Τα $L(f, \mathcal{P})$ και $U(f, \mathcal{P})$ ονομάζονται **το κάτω και άνω άθροισμα Riemann** της f ως προς τη διαμέριση $\mathcal{P}$.

Είναι σαφές ότι $L(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P})$. Θεωρώντας διαδοχικά διαμερίσεις με όλο και περισσότερα σημεία, θα παρατηρήσουμε ότι τα κάτω αθροίσματα μεγαλώνουν, παραμένοντας όμως όλα μικρότερα (ή ίσα) από κάθε άνω άθροισμα, ενώ τα άνω αθροίσματα μικραίνουν, παραμένοντας όμως όλα μεγαλύτερα (ή ίσα) από κάθε κάτω άθροισμα. Αν υπάρχει *ένας και μοναδικός* αριθμός I ανάμεσα στα κάτω και τα άνω αθροίσματα, δηλαδή τέτοιος ώστε να ισχύει $L(f,\mathcal{P}) \leq I \leq U(f,\mathcal{Q})$ για οποιεσδήποτε δύο διαμερίσεις $\mathcal{P}$ και $\mathcal{Q}$ του $[a,b]$, τότε αυτός ο αριθμός ονομάζεται το ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a,b]$. Αλλιώς, το ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a,b]$ δεν υπάρχει. Τα αθροίσματα Riemann λοιπόν αποτελούν κάτω και άνω προσεγγίσεις[7] του ολοκληρώματος Riemann, όταν αυτό υπάρχει.

Πρόταση 12.1 (Κριτήριο Riemann) *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}_\varepsilon$ του $[a,b]$ ώστε*

$$U(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - L(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Ισοδύναμα:

Για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$ ορίζουμε **κλιμακωτές** συναρτήσεις $h_{\mathcal{P}}$, $g_{\mathcal{P}}$ στο $[a,b]$ ως εξής: κάθε $t\in[a,b]$ ανήκει ακριβώς σε ένα από τα I_i και θέτουμε

$$h_{\mathcal{P}}(t) = m_i(f), \ \ g_{\mathcal{P}}(t) = M_i(f), \quad t\in I_i$$

δηλαδή

$$h_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^n m_i(f)\chi_{I_i}, \qquad g_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^n M_i(f)\chi_{I_i}$$

Διαπιστώνεται εύκολα ότι

$$h_{\mathcal{P}}(t) \leq f(t) \leq g_p(t) \quad \text{για κάθε} \ \ t\in[a,b]$$

$$\text{και} \quad \int_a^b h_{\mathcal{P}}(t)dt = L(f,\mathcal{P}), \quad \int_a^b g_{\mathcal{P}}(t)dt = U(f,\mathcal{P}).$$

Επομένως το κριτήριο Riemann αναδιατυπώνεται ως εξής:

Πρόταση 12.2 *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν κλιμακωτές συναρτήσεις $g_\varepsilon, h_\varepsilon:[a,b]\to\mathbb{R}$ ώστε $g_\varepsilon\leq f\leq h_\varepsilon$ και $\int_a^b(h_\varepsilon-g_\varepsilon)<\varepsilon$.*

[7] Μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι, είτε υπολογίσει τα άνω και κάτω αθροίσματα χρησιμοποιώντας ημι-ανοιχτα διαστήματα (όπως εδώ) είτε τα υπολογίσει χρησιμοποιώντας κλειστά διαστήματα, η ύπαρξη και η τιμή του ολοκληρώματος της f δεν επηρεάζονται.

12.2 Ολοκλήρωμα Riemann και ολοκλήρωμα Lebesgue

Εξετάζουμε τώρα τη σχέση ανάμεσα στο ολοκλήρωμα Riemann και το ολοκλήρωμα Lebesgue.

Ονομάζουμε $\mathcal{R}$ τον γραμμικό χώρο των Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν το πραγματικό και φανταστικό της μέρος u και v είναι Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε η f είναι αναγκαστικά φραγμένη και φέρεται σε ένα συμπαγές διάστημα $[a, b]$, και εξ ορισμού $\int f = \int u + i \int v$ (όπου τα ολοκληρώματα είναι ολοκληρώματα Riemann στο $[a, b]$.)

Μπορούμε λοιπόν να περιορισθούμε σε συναρτήσεις με πραγματικές τιμές.

Θα δείξουμε ότι κάθε Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και ότι $I(f) = \int f$.

Επειδή οι συναρτήσεις $h_{\mathcal{P}}$ και $g_{\mathcal{P}}$ της προηγουμένης παραγράφου είναι κλιμακωτές (δηλαδή γραμμικοί συνδυασμοί χαρακτηριστικών συναρτήσεων (φραγμένων) διαστημάτων), από το Λήμμα 11.1 ανήκουν στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και το ολοκλήρωμα Riemann των συναρτήσεων αυτών συμπίπτει με το ολοκλήρωμα Lebesgue.

Επιλέγουμε επαγωγικά διαμερίσεις $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{P}_n \subseteq \ldots$ ώστε η «λεπτότητα» (δηλαδή η απόσταση δύο διαδοχικών σημείων) της P_n να είναι μικρότερη από $\frac{1}{n}$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_{\mathcal{P}_n} = \sup_{\mathcal{P}} L(f, \mathcal{P}) \equiv \underline{\int_a^b} f, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_{\mathcal{P}_n} = \inf_{\mathcal{P}} U(f, \mathcal{P}) \equiv \overline{\int_a^b} f.$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(h_{\mathcal{P}_n}) = (h_n)$ είναι αύξουσα και η $(g_{\mathcal{P}_n}) = (g_n)$ είναι φθίνουσα και ότι $h_n \leq f \leq g_n$ για κάθε n. Θέτουμε $h = \sup_n h_n$ και $g = \inf_n g_n$. Τα όρια αυτά υπάρχουν και

$$h \leq f \leq g.$$

Χωρίς καμμιά υπόθεση για την f (εκτός του ότι είναι φραγμένη) από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι οι h και g ανήκουν στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και ότι

$$I(h) = \lim_n I(h_n) = \underline{\int_a^b} f \quad \text{και} \quad I(g) = \lim_n I(g_n) = \overline{\int_a^b} f.$$

Πράγματι, θέτοντας $\phi = \max\{|h_1|, |g_1|\}$, παρατηρούμε ότι $\phi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Οι ανισότητες $h_1 \leq h_n \leq g_n \leq g_1$ δίνουν $|h_n| \leq \phi$ και $|g_n| \leq \phi$ οπότε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης εφαρμόζεται.

Επομένως η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν ισχύει η ισότητα

$$I(h) = I(g).$$

Εφόσον $h \leq g$, η ισότητα αυτή ισχύει αν και μόνον αν $h(x) = g(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in [a, b]$. Έχουμε λοιπόν:

Παρατήρηση *Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν $h(x) = g(x)$ σχεδόν παντού.*

Τότε ισχύει και $h(x) = f(x) = g(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in [a, b]$ οπότε η f ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (Πόρισμα 11.3)

$$I(f) = I(h) = \underline{\int_a^b} f$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα Lebesgue της f συμπίπτει με το ολοκλήρωμα Riemann.

Θα δείξουμε τώρα ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν είναι σχεδόν παντού συνεχής.

Ισχυρισμός *Έστω $x \in [a, b]$ που δεν ανήκει σε κανένα από τα διαχωριστικά σημεία καμμιάς από τις διαμερίσεις $\mathcal{P}_n$. Τότε η f είναι συνεχής στο x αν και μόνον αν $h(x) = g(x)$.*

Απόδειξη Αν η f είναι συνεχής στο x, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $t \in [a, b]$ και $|t - x| < \delta$ να ισχύει $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \delta$, οπότε η λεπτότητα της αντίστοιχης διαμέρισης $\mathcal{P}_n$ είναι μικρότερη από δ. Έπεται ότι αν I_k είναι το διάστημα[8] της $\mathcal{P}_n$ όπου ανήκει το x, τότε κάθε $t \in I_k$ θα ικανοποιεί $|t - x| < \delta$, άρα $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ και συνεπώς $|M_k(f) - f(x)| \leq \varepsilon$ και $|m_k(f) - f(x)| \leq \varepsilon$ άρα $|M_k(f) - m_k(f)| \leq 2\varepsilon$. Αφού $x \in I_k$, έχουμε $g_n(x) = M_k(f)$ και $h_n(x) = m_k(f)$ οπότε $g_n(x) - h_n(x) \leq 2\varepsilon$. Αλλά $0 \leq g(x) - h(x) \leq g_n(x) - h_n(x) \leq 2\varepsilon$, πράγμα που σημαίνει (αφού το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετο) ότι $g(x) - h(x) = 0$.

Αν αντίστροφα $g(x) - h(x) = 0$ τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 \leq g_n(x) - h_n(x) < \varepsilon$ οπότε, αν $I_k = [t_{k-1}, t_k)$ είναι το διάστημα της

[8] μοναδικό, αφού τα I_n είναι ξένα

αντίστοιχης $\mathcal{P}_n$ όπου ανήκει το x, τότε $m_k(f) \leq f(x) \leq M_k(f)$ και για κάθε $t \in I_k$ έχουμε $m_k(f) \leq f(t) \leq M_k(f)$, άρα

$$|f(t) - f(x)| \leq M_k(f) - m_k(f) = g_n(x) - h_n(x) < \varepsilon.$$

Δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό διάστημα (t_{k-1}, t_k) γύρω από το x ώστε για κάθε $t \in (t_{k-1}, t_k)$ να ισχύει $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$, που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο x. $\square$

Έστω λοιπόν ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Από την Παρατήρηση, υπάρχει ένα σύνολο $N_1 \subseteq [a, b]$ μέτρου μηδέν ώστε $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a, b] \setminus N_1$. Αν ονομάσουμε N την ένωση του N_1 με το σύνολο $\cup_n \mathcal{P}_n$ όλων των σημείων όλων των διαμερίσεων $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$ (που είναι αριθμήσιμο,άρα έχει μέτρο μηδέν), τότε το N έχει μέτρο μηδέν και η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in [a, b] \setminus N$, δηλαδή σχεδόν παντού. Πράγματι, αν $x \notin N$ τότε το x δεν είναι σημείο καμμιάς διαμέρισης· επίσης $x \notin N_1$ άρα $h(x) = g(x)$, οπότε η f είναι συνεχής στο x από τον Ισχυρισμό.

Έστω αντίστροφα ότι η f είναι συνεχής σχεδόν παντού, δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο $N_2 \subseteq [a, b]$ μέτρου μηδέν ώστε η f να είναι συνεχής σε κάθε $x \in [a, b] \setminus N_2$. Θέτουμε $M = N_2 \cup (\cup_n \mathcal{P}_n)$. Για κάθε $x \in M^c$, η f είναι συνεχής στο x, οπότε από τον Ισχυρισμό προκύπτει η ισότητα $h(x) = g(x)$. Αλλά το M έχει μέτρο μηδέν, άρα $h = g$ σχεδόν παντού. Από την Παρατήρηση προκύπτει ότι το ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a, b]$ υπάρχει.

Συνοψίζουμε:

Θεώρημα 12.3 *Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν είναι σχεδόν παντού συνεχής, αν δηλαδή το σύνολο των ασυνεχειών της έχει μέτρο μηδέν. Τότε η f είναι Lebesgue* ολοκληρώσιμη *και τα δύο ολοκληρώματα συμπίπτουν.*

Παρατήρηση 12.4 *Ας τονίσουμε τη διαφορά ανάμεσα στην έννοια «σχεδόν παντού συνεχής» και την έννοια «σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση»:*

Για παράδειγμα η συνάρτηση Dirichlet, δηλαδή η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών, δεν είναι πουθενά συνεχής, αλλά είναι σχεδόν παντού ίση με τη συνεχή συνάρτηση $f(t) = 0$. Αντίθετα η χαρακτηριστική συνάρτηση του $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ είναι σχεδόν παντού συνεχής (αφού είναι ασυνεχής μόνο στα σημεία $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$), αλλά δεν μπορεί να είναι σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση, γιατί έχει άλμα στα δύο αυτά σημεία.