14 Ο χώρος $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

Συμβολισμός Στα επόμενα, αν $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ συμβολίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue $I(f)$ της f με το σύμβολο $\int f dm$, δηλαδή

$$\int f dm \equiv \int f(t) dm(t) \equiv I(f).$$

Ορισμός 14.1 *Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ θέτουμε* $\qquad \|f\|_2 = \|f^2\|_1^{1/2}$

δηλαδή $\|f\|_2^2 = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\int h_n : h_n \in C_{oo}(\mathbb{R}), h_n \geq 0, \sum_n h_n \geq |f|^2\right\} \in [0, +\infty]$

Πρόταση 14.1 *Αν $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ έχουμε*

(α) $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$ $\quad$ *(σύμβαση: $0 \cdot \infty = 0$)*

(β) αν $\|f_1\|_2 < \infty$ και $\|f_2\|_2 < \infty$ τότε $\|f_1 f_2\|_1 \leq \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 < \infty$

(γ) αν $|f| \leq \sum_n |f_n|$ τότε $\|f\|_2 \leq \sum_n \|f_n\|_2$.

Απόδειξη Η ισότητα **(α)** είναι εύκολη.

(β) Αν $\|f_1\|_2 = 0$ τότε $\||f_1|^2\|_1 = 0$, άρα $|f_1|^2 = 0$ σχεδόν παντού (Πρόταση 11.2), οπότε $f_1 = 0$ σχεδόν παντού, άρα $f_1 f_2 = 0$ σχεδόν παντού, συνεπώς $\|f_1 f_2\|_1 = 0$ και η ανισότητα ισχύει. Το ίδιο συμβαίνει όταν $\|f_2\|_2 = 0$.

Αν $\|f_1\|_2 \|f_2\|_2 > 0$ θέτω $g_i = \frac{f_i}{\|f_i\|_2}$ οπότε $\|g_i\|_2 = 1$ από την (α). Έχουμε

$$2|g_1 g_2| \leq |g_1|^2 + |g_2|^2$$

$$\text{άρα} \quad \|2g_1 g_2\|_1 \leq \left\||g_1|^2 + |g_2|^2\right\|_1 \leq \left\||g_1|^2\right\|_1 + \left\||g_2|^2\right\|_1 = \|g_1\|_2^2 + \|g_2\|_2^2$$

όπου η πρώτη ανισότητα έπεται από την μονοτονία της $\|\cdot\|_1$ και η δεύτερη από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_1$. Όμως $\|g_i\|_2 = 1$, άρα δείξαμε ότι $\|2g_1 g_2\|_1 \leq 2$, δηλαδή

$$\left\|\frac{f_1}{\|f_1\|_2}\frac{f_2}{\|f_2\|_2}\right\|_1 \leq 1$$

οπότε πάλι από την (α) προκύπτει ότι

$$\|f_1 f_2\|_1 \leq \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 .$$

(γ) Αρκεί να υποθέσω ότι $\|f_n\| < \infty$ για κάθε n (αλλιώς, η ζητούμενη ανισότητα ισχύει τετριμένα).

Απο τη σχέση $\quad |f| \leq \sum_n |f_n|\;$ έχουμε

$$|f|^2 \leq \sum_{n,m} |f_n||f_m|. \tag{1}$$

Όμως ξέρουμε (Πρόταση 9.5) ότι αν $|g| \leq \sum_n |g_n|$ τότε $\|g\|_1 \leq \sum_n \|g_n\|_1$. Επομένως η ανισότητα (1) δίνει

$$\|f\|_2^2 = \left\|f^2\right\|_1 \leq \sum_{n,m} \|f_n f_m\|_1 \leq \sum_{n,m} \|f_n\|_2 \|f_m\|_2$$

(από το (β)). Όμως η τελευταία παράσταση ισούται με $\sum_n \|f_n\|_2^2$. $\quad\square$

Η ανισότητα που μόλις δείξαμε έχει ως άμεση συνέπεια το

Πόρισμα 14.2 **(α)** $\|f_1 + f_2\|_2 \leq \|f_1\|_2 + \|f_2\|_2$.

(β) *Αν* $|f| \leq |g|$, *τότε* $\|f\|_2 \leq \|g\|_2$.

Ορισμός 14.2 *Μία* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *ανήκει στον* $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ *αν υπάρχει ακολουθία* (f_n) *με* $f_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ *ώστε* $\|f - f_n\|_2 \to 0$.

Πρόταση 14.3 **(α)** *Ο* $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ *είναι γραμμικός χώρος και η* $\|\cdot\|_2$ *είναι ημινόρμα στον* $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

(β) *Αν* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *τότε* $\|f\|_2 = 0$ *αν και μόνον αν* $f(x) = 0$ *σχεδόν για κάθε* x. *Σ΄ αυτήν την περίπτωση, η* f *ανήκει στον* $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Απόδειξη Η **(α)** έπεται εύκολα από τον ορισμό και την Πρόταση 14.1.

(β) Αν $\|f\|_2 = 0$ τότε $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ (πάρε $f_n = 0$).

Επίσης, αφού $\|f\|_2^2 = \|f^2\|_1$, έχουμε $\|f\|_2 = 0 \iff \||f|^2\|_1 = 0$, πράγμα που ισοδυναμεί (Πρόταση 11.2) με την $|f_1|^2 = 0$ σχεδόν παντού, δηλ. $f_1 = 0$ σχεδόν παντού.

Πρόταση 14.4 *Αν* $f \in C_{oo}(\mathbb{R})$ *και* $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, *τότε* $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ *και* $fg \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, *μάλιστα* $\|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$.
Δηλαδή $C_{oo}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ *και* $C_{oo}(\mathbb{R})\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Απόδειξη Η σχέση $C_{oo}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ είναι προφανής. Επίσης, αν $f \in C_{oo}(\mathbb{R})$ και $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, έχουμε $|fg| \leq \|f\|_\infty |g|$ οπότε $\|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$ από το Πόρισμα 14.2(β). Τώρα, επιλέγοντας $g_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ με $\|g - g_n\|_2 \to 0$ παρατηρούμε ότι $fg_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ και $\|fg - fg_n\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g - g_n\|_2 \to 0$.

Παρατήρηση 14.5 **(α)** *Αν $K \subseteq \mathbb{R}$ είναι φραγμένο διάστημα*[1] *τότε $\mathcal{L}^2(K) \subsetneqq \mathcal{L}^1(K)$ (όπου $\mathcal{L}^p(K)\,(p = 1, 2)$ είναι ο χώρος των συναρτήσεων του $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ που μηδενίζονται έξω από το K).*

(β) *Γενικά ούτε ο $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ περιέχεται στον $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ούτε ο $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.*

Απόδειξη **(α)** Παρατηρούμε κατ΄ αρχήν ότι η χ_K είναι Riemann-ολοκληρώσιμη και

$$\|\chi_K\|_2^2 = \left\|\chi_K^2\right\|_1 = \int \chi_K^2 dm = \int \chi_K = m(K),$$

όπου $m(K)$ το μήκος του διαστήματος K. Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μηδενίζεται έξω από το K, τότε $f = f\chi_K$ και συνεπώς

$$\|f\|_1 = \|f\chi_K\|_1 \leq \|f\|_2 \|\chi_K\|_2 = \|f\|_2 \sqrt{m(K)}$$

(από την ανισότητα 14.1(β)). Επομένως αν $f \in \mathcal{L}^2(K)$ και $f_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ με $\|f - f_n\|_2 \to 0$, τότε

$$\|f - f_n\chi_K\|_1 = \|(f - f_n)\chi_K\|_1 \leq \|(f - f_n)\chi_K\|_2 \sqrt{m}(K) \to 0.$$

πράγμα που δείχνει, εφόσον $f_n\chi_K \in \mathcal{L}^1(K)$, ότι $f \in \mathcal{L}^1(K)$.

Ότι $\mathcal{L}^2(K) \neq \mathcal{L}^1(K)$ θα φανεί με το παράδειγμα της f στο (β).

(β) Παραδείγματος χάριν αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x \in (-\infty, 0] \cup (1, \infty) \end{cases} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

τότε η f ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ αλλά όχι στον $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ (μάλιστα ανήκει στον $\mathcal{L}^1([0, 1]) \setminus \mathcal{L}^2([0, 1])$), ενώ η g ανήκει στον $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ αλλά όχι στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. (Για τις αποδείξεις των ισχυρισμών, δες τις Ασκήσεις.)

Πρόταση 14.6 *Αν $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ τότε $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.*

Απόδειξη Αν $f_n, g_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ με $\|f_n - f\|_2 \to 0$ και $\|g_n - g\|_2 \to 0$ τότε $f_n g_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ και

$$\begin{aligned} \|fg - f_n g_n\|_1 &\leq \|(f - f_n)g\|_1 + \|f_n(g - g_n)\|_1 \\ &\leq \|f - f_n\|_2 \|g\|_2 + \|f_n\|_2 \|g - g_n\|_2 \to 0. \end{aligned}$$

(Χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα 14.1(β).)

[1] το συμπέρασμα ισχύει γενικότερα όταν το K είναι συμπαγές υποσύνολο

Ορισμός 14.3 *Αν* $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ *ορίζουμε*

$$\langle f, g \rangle = \int f\bar{g}dm.$$

Ο $\langle f, g \rangle$ είναι καλά ορισμένος μιγαδικός αριθμός. Οι επόμενες ιδιότητες έπονται άμεσα από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος και την ανισότητα 14.1(β).

Παρατήρηση 14.7 *Αν* $f, g, h \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ *και* $\lambda \in \mathbb{C}$ *τότε* $\langle f, g \rangle \in \mathbb{C}$ *και*

$$\begin{aligned}
(i)\ & \langle f + \lambda g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \lambda \langle g, h \rangle \\
(ii)\ & \langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle} \\
(iii)\ & \langle f, f \rangle = \|f\|_2^2 \geq 0 \\
(iv)\ & \langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0 \ \textit{σχεδόν παντού}
\end{aligned}$$

(ημι-εσωτερικό γινόμενο) και

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

(ανισότητα Cauchy-Schwarz).

Θεώρημα 14.8 (πληρότητα) *Αν μια ακολουθία* (f_n) *στοιχείων του* $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ *είναι «βασική ως προς την* $\|\cdot\|_2$*», αν δηλαδή για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $n_o \in \mathbb{N}$ *ώστε* $\|f_n - f_m\|_2 < \epsilon$ *για κάθε* $n, m \geq n_o$*, τότε υπάρχει (όχι μοναδική)* $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ *ώστε* $\|f - f_n\|_2 \to 0$.

Η *απόδειξη* είναι εντελώς ανάλογη με εκείνην της αντίστοιχης Πρότασης για τον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (Πρόταση 10.1).

***Ο χώρος Hilbert** $L^2(\mathbb{R})$ Ο χώρος αυτός αποτελείται από τις κλάσεις ισοδυναμίας $[f]$ των στοιχείων του $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ως προς τη σχέση ισότητας σχεδόν παντού. Είναι ο (γραμμικός) χώρος πηλίκο $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})/\mathcal{N}$, όπου

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \|f\|_2 = 0\} \\
&= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f(x) = 0 \text{ σχεδόν για κάθε } x \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

(Δες τη σχετική συζήτηση για τον $L^1(\mathbb{R})$).

Η απεικόνιση $(f, g) \to \langle f, g \rangle$ επάγει ένα *εσωτερικό γινόμενο* στον $L^2(\mathbb{R})$ που συμβολίζεται (καταχρηστικά) πάλι $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και ορίζεται από τη σχέση

$$\langle [f], [g] \rangle = \langle f, g \rangle \qquad (f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})).$$

Το εσωτερικό γινόμενο είναι καλά ορσμένο: το $\langle [f], [g] \rangle$ δεν εξαρτάται από τους αντιπροσώπους των κλάσεων $[f]$ και $[g]$. Πράγματι, αν $[f] = [f']$ και $[g] = [g']$ τότε θέτοντας $\phi = f - f'$ και $\psi = g - g'$ παρατηρούμε ότι $\phi = 0$ και $\psi = 0$ σχεδόν παντού και άρα

$$\begin{aligned} \langle f', g' \rangle &= \langle f + \phi, g + \psi \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, \psi \rangle + \langle \phi, g + \psi \rangle \\ &= \langle f, g \rangle + \int f \bar{\psi} dm + \int \phi \overline{(g + \psi)} dm = \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

γιατί $f\bar{\psi} = 0$ σχεδόν παντού και $\phi\overline{(g + \psi)} = 0$ σχεδόν παντού.

Έπεται ότι η $\|\cdot\|_2$ όπου $\|[f]\|_2^2 = \langle [f], [f] \rangle = \|f\|_2^2$ είναι νόρμα στον $L^2(\mathbb{R})$.

Από το Θεώρημα 14.8 έπεται ότι ο χώρος $L^2(\mathbb{R})$ εφοδιασμένος με την μετρική $d([f], [g]) = \|f - g\|_2$ είναι *πλήρης* μετρικός χώρος. Επομένως ο χώρος $(L^2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώρος Hilbert.

Ο $L^2(\mathbb{R})$ αποτελείται λοιπόν από *κλάσεις ισοδυναμίας* συναρτήσεων, και όχι από συναρτήσεις, όπως ο $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Συνήθως όμως, όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, ταυτίζουμε μια συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ με την κλάση της $[f] \in L^2(\mathbb{R})$.

15 Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathcal{L}^2$

Συμβολισμοί $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dm(t), \quad \|g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dm(t)$

$$\langle g, h \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g\bar{h} dm, \; f \in \mathcal{L}^1([-\pi, \pi]), \; g, h \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi]).$$

Ας υπενθυμίσουμε ότι $C([-\pi, \pi]) \subseteq \mathcal{L}^2([-\pi, \pi]) \subseteq \mathcal{L}^1([-\pi, \pi])$ και ότι[2] $\|f\|_1 \le \|f\|_2$ όταν $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$ και $\|f\|_2 \le \|f\|_\infty$ όταν $f \in C([-\pi, \pi])$ (ή όταν η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη).

Έστω $f \in \mathcal{L}^1([-\pi, \pi])$. Αν $e_k(t) = e^{ikt}$ όπου k ακέραιος, παρατηρούμε ότι η e_k είναι συνεχής, άρα η fe_k ανήκει στον $\mathcal{L}^1([-\pi, \pi])$. Το ίδιο ισχύει και αν $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$.

[2] Η πρώτη ανισότητα έπεται από την $(\int_{-\pi}^{\pi} |f| dm)^2 \le \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dm \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dm$ (Cauchy-Schwarz) και η δεύτερη από την $\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \le 2\pi \sup\{|f(t)|^2 : t \in [-\pi, \pi]\}$.

Ορισμός 15.1 (Συντελεστές Fourier) *Έστω $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$. Ορίζουμε*

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f e_{-k} dm = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dm(t) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dm(t), \;\; b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dm(t) \;\; (n \in \mathbb{N})$$

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{k=n} \hat{f}(k)e^{ikt} \quad (n \in \mathbb{N},\, t \in [-\pi,\pi]).$$

Παρατήρηση 15.1 *Αν $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$ τότε για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε $|\hat{f}(k)| \leq \|f\|_1$, δηλαδή*

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 .$$

Μάλιστα αν η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη), τότε $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ (αφού $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$).

Απόδειξη $\quad |\hat{f}(k)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f e_{-k} dm\right| \leq= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f e_{-k}| dm = \|f\|_1 .$ □

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $S_n(f)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, άρα συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση, όποια κι αν είναι η $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$.

Λήμμα 15.2 *Ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων (άρα και ο χώρος των 2π-περιοδικών συνεχών συναρτήσεων) είναι πυκνός υπόχωρος του $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$ ως προς την $\|\cdot\|_2$.*

Το ίδιο ισχύει για τον $(\mathcal{L}^1([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_1)$.

Απόδειξη Ας δούμε την απόδειξη για τον $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$. Η περίπτωση του $\mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$ είναι εντελώς όμοια.

Έστω $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$ και $\epsilon > 0$. Από τον ορισμό του $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$, μπορώ να βρώ g συνεχή ώστε $\|f-g\|_2 < \epsilon/2$. Μπορώ όμως επίσης να βρώ μία h, συνεχή και 2π-περιοδική, ώστε $\|h-g\|_2 < \epsilon/2$.

Πράγματι, για κατάλληλο $\delta > 0$ (θα το προσδιορίσω αργότερα) βρίσκω μια h ώστε να είναι ίση με την g στο διάστημα $[-\pi, \pi-\delta]$, να ικανοποιεί $h(\pi) = g(-\pi)$ (οπότε $h(-\pi) = h(\pi)$) και να είναι συνεχής: για παράδειγμα, ορίζω [3]

$$h(t) = \begin{cases} g(t), & -\pi \leq t \leq \pi-\delta \\ \frac{\pi-t}{\delta}g(\pi-\delta) + \left(1-\frac{\pi-t}{\delta}\right)g(-\pi), & \pi-\delta < t \leq \pi \end{cases}$$

[3] Δηλαδή, «ακολουθώ το γράφημα της g από το σημείο $(-\pi, g(-\pi))$ μέχρι το $(\pi-\delta, g(\pi-\delta))$ και μετά ενώνω το σημείο αυτό με το $(\pi, g(-\pi))$ με ευθ. τμήμα».

Έχουμε

$$\|h-g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|h-g|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\delta}^{\pi}|h-g|^2 \leq \frac{2}{\pi}\|g\|_\infty^2\,\delta$$

γιατί $|h(t)| \leq \sup\{|g(t)| : t\in[-\pi,\pi]\} \equiv \|g\|_\infty$. Επομένως, για να εξασφαλίσω ότι $\|h-g\|_2 < \epsilon/2$, αρκεί να πάρω από την αρχή $\delta < \frac{\pi\epsilon^2}{8\|g\|_\infty^2}$.

Εφόσον η h είναι συνεχής στο $[-\pi,\pi]$ και $h(-\pi) = h(\pi)$, από το Θεώρημα του Féjer μπορώ να βρώ ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο p (μάλιστα, της μορφής $\sigma_n(h)$ για κατάλληλο n) ώστε $\|h-p\|_\infty < \epsilon$, άρα και $\|h-p\|_2 < \epsilon$.

Έχουμε τελικά $\|f-p\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g-h\|_2 + \|h-p\|_2 < 2\epsilon$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Λήμμα 15.3 (Βέλτιστης μέσης τετραγωνικής προσέγγισης) *Έστω $f\in\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$ και $n\in\mathbb{N}$. Τότε για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n ισχύει*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-p|^2dm \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-S_n(f)|^2dm$$

$$\text{δηλαδή } \|f-p\|_2 \geq \|f-S_n(f)\|_2 .$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $p = S_n$.

Ειδικότερα αν $m\leq n$ τότε $\|f-S_m(f)\|_2 \geq \|f-S_n(f)\|_2$.

Η **Απόδειξη** στηρίζεται στις γεωμετρικές ιδιότητες του ημι-εσωτερικού γινομένου $\langle f,g\rangle$: είναι ίδια λέξη προς λέξη με την απόδειξη του Λήμματος 5.1.

Πρόταση 15.4 *Αν η $f\in\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$, τότε*

$$S_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$$

δηλαδή

$$\lim_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(f)-f|^2dm = 0.$$

Απόδειξη Έστω $\epsilon>0$. Από το Λήμμα 15.2 μπορώ να βρώ ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε $\|f-p\|_2 < \epsilon$. Αν n_o είναι ο βαθμός του p, τότε για κάθε $n\geq n_o$ ισχύει $\deg p\leq n$, άρα από το προηγούμενο Λήμμα θα έχω $\|f-S_n(f)\|_2 \leq \|f-p\|_2 < \epsilon$. $\square$

Ας θυμηθούμε ότι με το Θεώρημα 3.2 είχαμε αποδείξει ότι αν δύο **συνεχείς** 2π-περιοδικές συναρτήσεις έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier, τότε είναι ίσες. Αυτό δεν ισχύει για Lebesgue ολοκληρώσιμες συναρτήσεις: μπορεί να διαφέρουν σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν. Αυτό είναι «το χειρότερο που μπορεί να συμβεί»:

Θεώρημα 15.5 (Μοναδικότητα) *Αν $f, g \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$ και $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ (ισοδύναμα $a_n(f) = a_n(g)$ και $b_n(f) = b_n(g)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$), τότε $f(t) = g(t)$ σχεδόν για κάθε $t \in [-\pi,\pi]$.* [4]

Παρατήρηση Το θεώρημα μοναδικότητας ισχύει και για συναρτήσεις που ανήκουν στον $\mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$, η απόδειξη όμως ξεπερνάει τους στόχους αυτών των σημειώσεων, γι'αυτό παραλείπεται.

Απόδειξη Θεωρώντας την $f-g$ στη θέση της f, αρκεί να αποδείξω ότι

Αν $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$ και $\hat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,
τότε $f(t) = 0$ σχεδόν για κάθε $t \in [-\pi,\pi]$.

Από την Πρόταση 15.4 έχουμε ότι

$$\lim_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f) - f|^2 dm = 0.$$

Αν όμως $\hat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ τότε $S_n(f) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς $\int |f|^2 dm = 0$ άρα $f(t) = 0$ σχεδόν για κάθε t. $\square$

Πρόταση 15.6 (Ισότητα Parseval) *Αν $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$, τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2.$$

Απόδειξη Έπεται από την αντίστοιχη ισότητα για τριγωνομετρικά πολυώνυμα (Παρατήρηση 5.5) και από το γεγονός ότι $S_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$, ακριβώς όπως στην περίπτωση των συνεχών συναρτήσεων (Πόρισμα 5.9).

Θεώρημα 15.7 (Riemann - Lebesgue) *Αν $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$, τότε*

$$\lim_{k\to+\infty} \hat{f}(k) = \lim_{k\to-\infty} \hat{f}(k) = 0.$$

[4]ισοδύναμα, $[f] \equiv [g]$ στον $L^2([-\pi,\pi])$

Απόδειξη Αν $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$, η απόδειξη είναι άμεση από το γεγονός ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 < \infty$$

(μάλιστα αρκεί, για την απόδειξη, η ανισότητα Bessel).

Όμως αν $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi]) \setminus \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$ οι συντελεστές Fourier της f δεν είναι τετραγωνικά αθροίσιμοι (όπως θα δούμε στην αμέσως επόμενη Πρόταση). Επομένως χρειάζεται μια διαφορετική απόδειξη.

Έστω λοιπόν $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει g συνεχής και 2π-περιοδική ώστε $\|f-g\|_1 < \epsilon$ (Λήμμα 15.2). Όμως *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$|\hat{f}(k) - \hat{g}(k)| \leq \|f-g\|_1 < \epsilon$$

(Παρατήρηση 15.1). Εφόσον η ακολουθία $(\hat{g}(k))$ είναι μηδενική (μάλιστα είναι τετραγωνικά αθροίσιμη, αφού $g \in \mathcal{L}^2$) και η $(\hat{f}(k))$ είναι *ομοιόμορφα* κοντά στην $(\hat{g}(k))$, θα είναι κι αυτή μηδενική. Ακριβέστερα: υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $|\hat{g}(k)| < \epsilon$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $|k| \geq n$, οπότε

$$|\hat{f}(k)| \leq |\hat{f}(k) - \hat{g}(k)| + |\hat{g}(k)| < 2\epsilon$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $|k| \geq n$, άρα

$$\lim_{k\to+\infty} \hat{f}(k) = \lim_{k\to-\infty} \hat{f}(k) = 0. \qquad \square$$

Από την ισότητα Parseval έπεται ότι για κάθε $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$ (άρα και για κάθε συνεχή και 2π-περιοδική συνάρτηση), η ακολουθία των συντελεστών Fourier της είναι τετραγωνικά αθροίσιμη.

Από την πληρότητα του χώρου $L^2([-\pi,\pi])$ ως προς την $\|\cdot\|_2$ έπεται το ακόλουθο αντίστροφο της παρατήρησης αυτής.

Πρόταση 15.8 *Αν* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty$ *τότε υπάρχει* $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$ *ώστε* $\hat{f}(k) = c_k$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$. *Μάλιστα αν* $s_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ *ισχύει ότι* $\|f - s_n\|_2 \to 0$.

Απόδειξη Στην ακολουθία $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ αντιστοιχούμε την τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}.$$

(Δεν ενδιαφερόμαστε αν η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε t). Θα δείξουμε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει *ως προς την* $\|\cdot\|_2$, οπότε ορίζει ένα στοιχείο του χώρου $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$. Από την πληρότητα του χώρου $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$ ως προς την $\|\cdot\|_2$ (Θεώρημα 14.8), αρκεί να δείξουμε ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς αποτελούν βασική ακολουθία.

Έστω $\epsilon > 0$. Θέτω $a_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$. Αφού $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty$, από το κριτήριο Cauchy έχουμε ότι υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m > n \geq n_o$ να ισχύει $|a_m - a_n| < \epsilon$ δηλαδή $\displaystyle\sum_{n<|k|\leq m} |c_k|^2 < \epsilon$. Από την ισότητα Parseval,

$$\sum_{n<|k|\leq m} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n<|k|\leq m} c_k e^{ikt}\right|^2 dt.$$

Παρατηρούμε όμως ότι για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m > n$,

$$s_n = \sum_{|k|\leq n} c_k e_k \qquad \text{άρα} \qquad s_m - s_n = \sum_{n<|k|\leq m} c_k e_k.$$

Συνεπώς

$$\|s_m - s_n\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n<|k|\leq m} c_k e^{ikt}\right|^2 dt = \sum_{n<|k|\leq m} |c_k|^2 < \epsilon.$$

Επομένως η ακολουθία (s_n) είναι βασική στον χώρο $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$. Υπάρχει λοιπόν $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$ ώστε $\|s_n - f\|_2 \to 0$, δηλαδή

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - s_n(t)|^2 dm(t) \to 0.$$

Έπεται τώρα από την ανισότητα Cauchy-Schwarz ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, αν $n > |k|$,

$$|\hat{f}(k) - c_k| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t) - s_n(t))e^{-ikt}dm(t)\right|^2 \leq \|f - s_n\|_2\|e_k\|_2$$

και επειδή $\|e_k\|_2 = 1$ και $\|f - s_n\|_2 \to 0$ έχουμε τελικά $|\hat{f}(k) - c_k| = 0$. $\square$

Παρατήρηση 15.9 *Αποδείξαμε ότι αν $\sum |c_k|^2 < \infty$ τότε η σειρά $\sum c_k e_k$ συγκλίνει* **ως προς τη** *$\|\cdot\|_2$ σε μία $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$. Είναι αλήθεια ότι η σειρά $\sum c_k e^{ikt}$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε t, αλλά αυτό είναι πολύ πιό δύσκολο να αποδειχθεί.* [L. Carleson, Acta Math. 116 (1966), 135–157.]

15.1 Είναι κάθε τριγωνομετρική σειρά, σειρά Fourier;

Η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{ik} e_k$ συγκλίνει για κάθε $t \neq 2k\pi$ (Dirichlet) αλλά δεν είναι σειρά Fourier καμμιάς Riemann-ολοκληρώσιμης συνάρτησης γιατί τα μερικά αθροίσματα δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένα (βλ. Παρατήρηση 6.5). Όμως, εφόσον $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{ik}\right|^2 < \infty$, είναι σειρά Fourier μιας $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$.

Υπάρχουν άραγε συγκλίνουσες τριγωνομετρικές σειρές που δεν είναι σειρές Fourier καμμιάς Lebesgue-ολοκληρώσιμης συνάρτησης;

Θα δείξουμε ότι η συγκλίνουσα τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kt}{\log k}$$

(σειρά ημιτόνων) δεν είναι σειρά Fourier καμμιάς Lebesgue-ολοκληρώσιμης συνάρτησης, ενώ η αντίστοιχη σειρά συνημιτόνων

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{\log k}$$

είναι!

Παρατήρησε ότι αν θέσουμε

$$b_k = \begin{cases} \frac{-1}{\log|k|}, & k \leq -2 \\ 0, & -1 \leq k \leq 1 \\ \frac{1}{\log k}, & k \geq 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad a_k = \begin{cases} \frac{1}{\log|k|}, & k \leq -2 \\ 0, & -1 \leq k \leq 1 \\ \frac{1}{\log k}, & k \geq 2 \end{cases}$$

τότε

$$2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{\log k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikt} \quad \text{και} \quad 2i\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kt}{\log k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{ikt}$$

Πρόταση 15.10 *Αν $f \in \mathcal{L}^1$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $-\hat{f}(-n) = \hat{f}(n) \geq 0$ τότε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \hat{f}(n) < \infty.$$

Παρατήρησε ότι $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{\log n} = \infty$. Κατά συνέπεια η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kt}{\log k}$ δεν είναι σειρά Fourier.

Πρόταση 15.11 *Έστω* $a_n \geq 0$, $a_n \to 0$ *και* $a_n \leq \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Τότε υπάρχει* $f \in \mathcal{L}^1([-\pi, \pi])$ *με*

$$\hat{f}(k) = a_{|k|} \quad \textit{για κάθε} \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Ένα παράδειγμα είναι η ακολουθία $a_0 = a_1 = 0$, $a_n = \frac{1}{\log n}$, $n \geq 2$. Επομένως, η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{\log k}$ είναι σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης που ανήκει[5] στον $\mathcal{L}^1([-\pi, \pi])$.

Απόδειξη της Πρότασης 15.10 Αφαιρώντας τη σταθερά $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dm(t)$ από την f, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\hat{f} = 0$. Ορίζουμε

$$g(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dm(t), \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

Τότε η g είναι συνεχής, $g(-\pi) = g(\pi)$ και $ik\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ (δες Λήμμα 15.12).

Κατά συνέπεια, από το Θεώρημα του Féjer, η ακολουθία $(\sigma_n(g, 0))_n$ όπου

$$\sigma_n(g, 0) = \sum_{|k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{g}(k)$$

συγκλίνει (στο $g(0)$), άρα συγκλίνει και η ακολουθία $(\sigma_n(g, 0) - \hat{g}(0))$. Όμως

$$\sigma_n(g, 0) - \hat{g}(0) = \sum_{0<|k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{g}(k) = \sum_{0<|k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \frac{\hat{f}(k)}{ik}.$$

Όμως επειδή $\hat{f}(-k) = -\hat{f}(k)$, το τελευταίο άθροισμα ισούται με

$$2 \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{\hat{f}(k)}{ik} = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\hat{f}(k)}{ik} - 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \frac{\hat{f}(k)}{i}.$$

Όμως η ακολουθία $(\hat{f}(n))$ είναι μηδενική (Θεώρημα Riemann–Lebesgue 15.7), άρα και οι μέσοι όροι της $\left(\frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=1}^{n} \hat{f}(k)\right)_n$ αποτελούν μηδενική ακολουθία. Έπεται από την τελευταία ισότητα ότι και η $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\hat{f}(k)}{ik}\right)_n$ θα συγκλίνει. □

Χρησιμοποιήσαμε το

[5] αλλα όχι στον $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$, αφού οι συντελεστές Fourier δεν είναι τετραγωνικά αθροίσιμοι!

Λήμμα 15.12 *Αν* $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$ *και* $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dm(t) = 0$, *τότε το αόριστο ολοκλήρωμα* g *της* f,

$$g(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dm(t), \qquad x \in [-\pi,\pi]$$

είναι συνεχής, $g(-\pi) = g(\pi)$ *και* $ik\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη Η ισότητα $g(-\pi) = g(\pi)$ οφείλεται στην υπόθεση $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dm(t) = 0$. Αν η f ήταν συνεχής συνάρτηση, η g θα ήταν συνεχώς παραγωγίσιμη, οπότε θα είχαμε την ισότητα $ik\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ με ολοκλήρωση κατά μέρη (Πρόταση 2.9).

Στη γενική περίπτωση όπου $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$ προσεγγίζουμε την g με «καλές» συναρτήσεις:

Αφού $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$, από το Λήμμα 15.2 υπάρχουν τριγωνομετρικά πολυώνυμα p_n με $\|f - p_n\|_1 \to 0$. Παρατήρησε ότι αφού $\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dm(t) = 0$, έχουμε

$$|\hat{p}_n(0)| = |\hat{p}_n(0) - \hat{f}(0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(p_n(t) - f(t))e^{ikt}dm(t)\right| \leq \|f - p_n\|_1 \to 0.$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τα p_n με τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα q_n όπου $q_n(t) = p_n(t) - \hat{p}_n(0)$, εξασφαλίζουμε ότι $\hat{q}_n(0) = 0$ και $\|f - q_n\|_1 \to 0$. Ονομάζοντας g_n το αόριστο ολοκλήρωμα της q_n έχουμε συνεχείς συναρτήσεις στο $[-\pi,\pi]$ με $g_n(-\pi) = g_n(\pi)$ (αφού $\hat{q}_n(0) = 0$) και, για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$,

$$\begin{aligned}|g_n(x) - g(x)| &= \left|\int_{-\pi}^{x}(q_n(t) - f(t))dm(t)\right| \leq \int_{-\pi}^{x}|q_n(t) - f(t)|dm(t) \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi}|q_n(t) - f(t)|dm(t) = \|f - q_n\|_1\end{aligned}$$

άρα $\|g_n - g\|_\infty \leq \|f - q_n\|_1 \to 0$, δηλαδή $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο $[-\pi,\pi]$.

Επομένως η g είναι ομοιόμορφο όριο συνεχών, άρα συνεχής συνάρτηση.

Τώρα κάθε g_n είναι συνεχώς παραγωγίσιμη μα $g_n' = q_n$, οπότε η ισότητα $ik\hat{g}_n(k) = \hat{q}_n(k)$ αληθεύει. Επίσης, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}&|\hat{q}_n(k) - \hat{f}(k)| \leq \|f - q_n\|_1 \to 0 \\ \text{και} \quad &|\hat{g}_n(k) - \hat{g}(k)| \leq \|g_n - g\|_\infty \to 0.\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια

$$ik\hat{g}(k) = \lim_n ik\hat{g}_n(k) = \lim_n \hat{q}_n(k) = \hat{f}(k). \qquad \square$$

Για την απόδειξη της Πρότασης 15.11, θα χρειασθεί ένα στοιχειώδες Λήμμα:

Λήμμα 15.13 *Αν (a_n) είναι μια μηδενική ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα $2a_n \le a_{n-1} + a_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) = a_0.$$

Απόδειξη Η σχέση $2a_n \le (a_{n-1} + a_{n+1})$ μπορεί να γραφτεί $(a_n - a_{n+1}) \le (a_{n-1} - a_n)$, οπότε η ακολουθία $b_n \equiv a_n - a_{n+1}$ είναι φθίνουσα. Αφού είναι και μηδενική ($|b_n| \le |a_n| + |a_{n+1}| \to 0$) έχουμε $b_n \ge 0$ για κάθε n. Ισχυρίζομαι ότι $nb_n \to 0$: Πράγματι, $0 \le nb_{2n} \le b_n + \cdots + b_{2n} = a_n - a_{2n+1} \to 0$, άρα $(2n)b_{2n} \to 0$. Επίσης $0 \le (2n+1)b_{2n+1} \le 3nb_{2n+1} \le 3nb_{2n} \to 0$. Αφού οι ακολουθίες των άρτιων και των περιττών όρων της (nb_n) τείνουν στο 0, ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Τότε όμως

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) &= \sum_{n=1}^{N} n(a_{n-1} - a_n + a_{n+1} - a_n) = \sum_{n=1}^{N} n(b_{n-1} - b_n) \\
&= \sum_{n=1}^{N} ((n-1)b_{n-1} - nb_n) + \sum_{n=1}^{N} b_{n-1} \\
&= 0b_0 - Nb_N + \sum_{n=1}^{N} b_{n-1} = -N(a_N - a_{N+1}) + a_0 - a_N.
\end{aligned}$$

Όμως $a_N \to 0$ και $N(a_N - a_{N+1}) = Nb_N \to 0$ καθώς $N \to \infty$, άρα $\sum_{n=1}^{N} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \to a_0$. $\square$

Απόδειξη της Πρότασης 15.11 Ορίζουμε την ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων (f_N) από τον τύπο

$$f_N = \sum_{n=1}^{N} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)K_{n-1} = \sum_{n=1}^{N} c_n K_{n-1}$$

όπου (K_n) είναι ο πυρήνας του Féjer. Επειδή $\|K_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1$ και $c_n = n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \ge 0$, για κάθε $M > N$ έχουμε

$$\|f_M - f_N\|_1 \le \sum_{n=N+1}^{M} c_n \|K_{n-1}\|_1 = \sum_{n=N+1}^{M} c_n$$

πράγμα που σημαίνει, επειδή η (c_n) είναι αθροίσιμη (από το Λήμμα), ότι η (f_N) είναι βασική ως προς την $\|\cdot\|_1$. Από την *πληρότητα του* $\mathcal{L}^1$ (!) έπεται τώρα ότι υπάρχει $f \in \mathcal{L}^1$ ώστε $\|f - f_N\|_1 \to 0$.

Ισχυρισμός $\quad \hat{f}(k) = a_{|k|}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
Απόδειξη Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$|\hat{f}(k) - \hat{f}_N(k)| \leq \|f - f_N\|_1 \to 0$$

δηλαδή

$$\hat{f}(k) = \lim_N \hat{f}_N(k) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{K}_{n-1}(k).$$

Ας θυμηθούμε όμως[6] ότι $K_{n-1} = \displaystyle\sum_{|j|\leq n-1} \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) e_j$, οπότε

$$\hat{K}_{n-1}(k) = \sum_{|j|\leq n-1} \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) \hat{e}_j(k) = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{n}, & |k| \leq n-1 \\ 0, & |k| > n-1 \end{cases}$$

αφού $\hat{e}_j(k) = \delta_{j,k}$. Έπεται λοιπόν ότι

$$\hat{f}(k) = \sum_{n=|k|+1}^{\infty} c_n \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) = \sum_{n=|k|+1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \left(1 - \frac{|k|}{n}\right)$$

$$= \sum_{n=|k|+1}^{\infty} (n - |k|)(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) = \sum_{m=1}^{\infty} m(d_{m-1} + d_{m+1} - 2d_m)$$

όπου $d_m = a_{m+|k|}$. Η ακολουθία (d_n) ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος, άρα $\sum_{m=1}^{\infty} m(d_{m-1} + d_{m+1} - 2d_m) = d_0 = a_{|k|}$. Άρα τελικά $\hat{f}(k) = a_{|k|}$ και η απόδειξη είναι πλήρης.

---

[6]από τον ορισμό $K_{n-1} = \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\sum_{|j|\leq m} e_j \right)$ έχουμε

$$\begin{aligned} nK_{n-1} &= \sum_{m=0}^{n-1} (e_0 + e_{-1} + e_1 + e_{-2} + e_2 + \cdots + e_{-(n-1)} + e_{n-1}) \\ &= ne_0 + (n-1)(e_{-1} + e_1) + (n-2)(e_{-2} + e_2) + \cdots + (e_{-(n-1)} + e_{n-1}) \\ &= \sum_{|j|\leq n-1} (n - |j|) e_j. \end{aligned}$$