

4 Αθροισσιμότητα κατά Féjer

Παρατήρηση 4.1 Υπάρχει παράδειγμα συνεχούς και 2π -περιοδικής συνάρτησης f που η σειρά Fourier της δεν συγκλίνει, ούτε καν κατά σημείο [Απ 30.35].

Ας θυμηθούμε ότι αν μια ακολουθία (s_n) (αριθμών ή συναρτήσεων) συγκλίνει στο s , τότε και η ακολουθία (σ_n) των μέσων όρων της συγκλίνει στο ίδιο όριο, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει (παράδειγμα: $s_n = (-1)^n$). Δηλαδή παίρνοντας μέσους όρους βελτιώνουμε γενικά τη σύγκλιση: μπορούμε από μια μη συγκλίνουσα ακολουθία να καταλήξουμε σε μια συγκλίνουσα.

Θα δείξουμε ότι για κάθε συνεχή και 2π -περιοδική συνάρτηση f , αν αντικαταστήσει κανείς την $(S_n(f))$ από την ακολουθία $(\sigma_n(f))$ των μέσων όρων της, τότε η $(\sigma_n(f))$ συγκλίνει στην f , και μάλιστα ομοιόμορφα.

Θεώρημα 4.2 (Féjer) Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής και 2π -περιοδική συνάρτηση, τότε η ακολουθία $(\sigma_n(f))$ όπου

$$\sigma_m(f) = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m S_n(f) \quad (m \in \mathbb{N})$$

συγκλίνει στην f ομοιόμορφα.

Για την απόδειξη, θα χρειασθούμε μερικές παρατηρήσεις.

Παρατήρηση 4.3 Αν $t \in [-\pi, \pi]$, τότε

$$\sigma_m(f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) K_m(s) ds$$

όπου

$$K_m(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m \sum_{k=-n}^n \exp(ikx).$$

Η ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων (K_m) λέγεται **πυρήνας του Féjer**.

Απόδειξη Έχουμε

$$\begin{aligned} S_n(f)(t) &= \sum_{k=-n}^{k=n} \hat{f}(k) \exp(ikt) \\ &= \sum_{k=-n}^{k=n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \exp(-iks) ds \right) \exp(ikt) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-n}^{k=n} \exp(ik(t-s)) \right) f(s) ds \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned}\sigma_m(f)(t) &= \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m S_n(f)(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m \sum_{k=-n}^{k=n} \exp(ik(t-s)) \right) f(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) K_m(t-s) ds.\end{aligned}$$

Αν τώρα στο τελευταίο ολοκλήρωμα πραγματοποιήσουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = t - s$, προκύπτει

$$\begin{aligned}\sigma_m(f)(t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{t+\pi}^{t-\pi} f(t-x) K_m(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} f(t-x) K_m(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) K_m(x) dx\end{aligned}$$

διότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι 2π -περιοδική¹. \square

Παρατήρηση 4.4 Αν $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ τότε

$$K_m(x) = \frac{1}{m+1} \left(\frac{\sin(\frac{m+1}{2}x)}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$$

$$\text{και} \quad K_m(0) = m+1.$$

Απόδειξη Έστω $x \neq 2k\pi$. Παρατήρησε ότι η παράσταση

$$\sum_{k=-n}^n \exp(ikx)$$

¹Αν $g(x) = g(x - 2\pi)$, τότε

$$\begin{aligned}\int_{t-\pi}^{t+\pi} g(x) dx &= \int_{t-\pi}^{\pi} g(x) dx + \int_{\pi}^{t+\pi} g(x) dx = \int_{t-\pi}^{\pi} g(x) dx + \int_{\pi}^{t+\pi} g(x-2\pi) dx \\ &\stackrel{(s=x-2\pi)}{=} \int_{t-\pi}^{\pi} g(x) dx + \int_{-\pi}^{t-\pi} g(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx.\end{aligned}$$

είναι άθροισμα γεωμετρικής προόδου με πρώτον όρο $\exp(-inx)$ και τελευταίο $\exp(inx)$, επομένως

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n \exp(ikx) &= \frac{\exp(i(n+1)x) - \exp(-inx)}{\exp(ix) - 1} \\ &= \frac{\exp(i(n+\frac{1}{2})x) - \exp(-i(n+\frac{1}{2})x)}{\exp(i\frac{x}{2}) - \exp(-i\frac{x}{2})} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Αλλά

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m \sin(n+\frac{1}{2})x &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^m 2\sin\frac{x}{2} \sin(n+\frac{1}{2})x \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^m (\cos nx - \cos(n+1)x) \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} (1 - \cos(m+1)x) \end{aligned}$$

επομένως

$$K_m(x) = \frac{1}{m+1} \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}} (1 - \cos(m+1)x) = \frac{1}{m+1} \frac{2\sin^2(\frac{m+1}{2}x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Τέλος,

$$K_m(0) = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m \sum_{k=-n}^k \exp 0 = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m (2n+1) = m+1. \quad \square$$

Παρατήρηση 4.5 Ο πυρήνας του Féjer έχει τις εξής ιδιότητες²:

- (α) $K_m(x) \geq 0$ για κάθε x .
- (β) Αν $\delta \in (0, \pi)$, η ακολουθία (K_m) τείνει στο 0 ομοιόμορφα στο σύνολο $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$.
- (γ) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_m(x) dx = 1$ για κάθε m .

²βλ. και το σχήμα (fejerk.pdf) στην ιστοσελίδα του μαθήματος

Απόδειξη Το (α) είναι προφανές από την προηγούμενη παρατήρηση. Για το (β), παρατηρούμε ότι αν $\delta \leq |x| \leq \pi$, τότε

$$|K_m(x)| = K_m(x) = \frac{1}{m+1} \frac{\sin^2(\frac{m+1}{2}x)}{\sin^2 \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{m+1} \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{m+1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Επομένως για κάθε $\epsilon > 0$ αν $n_0 > (\epsilon \sin^2 \frac{\delta}{2})^{-1}$, τότε για κάθε $m \geq n_0$ και κάθε $x \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ θα έχουμε $|K_m(x)| < \epsilon$.

Το (γ) έπεται απευθείας από τον ορισμό του K_m , αν παρατηρήσουμε ότι $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(iks) ds = 0$ όταν $k \neq 0$. \square

Η ιδέα της απόδειξης του *Θεωρήματος Féjer* είναι η εξής:

Αν $\delta > 0$, για αρκετά μεγάλο $m \in \mathbb{N}$ το $K_m(s)$ είναι σχεδόν 0 έξω απ'το διάστημα $[-\delta, \delta]$ (από το (β)). Συνεπώς

$$\sigma_m(f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)K_m(s)ds \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(t-s)K_m(s)ds$$

όπου το σύμβολο \approx σημαίνει «περίπου ίσο». Αλλά η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα αν το δ είναι αρκετά μικρό, όταν $|s| < \delta$ έχουμε $f(t-s) \approx f(t)$. Επομένως

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(t-s)K_m(s)ds \approx f(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_m(s)ds \right)$$

και, πάλι από το (β),

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_m(s)ds \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_m(s)ds = 1$$

από το (γ). Συνεπώς τελικά $\sigma_m(f)(t) \approx f(t)$.

Παρατήρησε ότι η ιδέα της απόδειξης (αλλά και η αυστηρή απόδειξη που ακολουθεί) χρησιμοποιεί **μόνον** τις τρεις ιδιότητες της τελευταίας παρατήρησης για τον πυρήνα του Féjer.

Απόδειξη του *Θεωρήματος Féjer*

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο συμπαγές $[-\pi, \pi]$, είναι ομοιόμορφα συνεχής. Συνεπώς υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon/2,$$

ισοδύναμα

$$|s| < \delta \implies |f(t-s) - f(t)| < \varepsilon/2 \quad \text{για κάθε } t. \quad (1)$$

Μπορώ φυσικά να υποθέσω ότι $\delta < \pi$. Έχουμε τώρα, χρησιμοποιώντας την (γ),

$$\begin{aligned} \sigma_m(f)(t) - f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)K_m(s)ds - \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_m(s)ds \right) f(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t-s) - f(t))K_m(s)ds = I_1 + I_2, \end{aligned}$$

όπου I_1 είναι το ολοκλήρωμα στο $[\delta, \delta]$,

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} (f(t-s) - f(t))K_m(s)ds$$

και I_2 είναι το ολοκλήρωμα στο «υπόλοιπο» σύνολο, $Y = [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_Y (f(t-s) - f(t))K_m(s)ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} (f(t-s) - f(t))K_m(s)ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} (f(t-s) - f(t))K_m(s)ds. \end{aligned}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(t-s) - f(t)|K_m(s)ds && (\text{διότι } K_m(s) \geq 0) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_m(s)ds && (\text{από την 1}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_m(s)ds = \frac{\varepsilon}{2} && (\text{από την (γ)}). \quad (2) \end{aligned}$$

Επίσης

$$|I_2| \leq 2 \sup\{|f(x)| : |x| \leq \pi\} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_Y K_m(s)ds = 2\|f\|_{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_Y K_m(s)ds.$$

Αλλά από την (β) μπορώ να βρω $m_o \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $m \geq m_o$ και κάθε s με $\delta \leq |s| \leq \pi$ να ισχύει $K_m(s) < \varepsilon/(4\|f\|_{\infty})$. Τότε θα έχουμε

$$|I_2| \leq 2\|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_Y \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty} ds \leq \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_Y ds \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

(αφού $Y \subseteq [-\pi, \pi]$). Τελικά λοιπόν, για κάθε $m \geq m_o$ και κάθε $t \in [-\pi, \pi]$, έχουμε από τις (2) και (3),

$$|\sigma_m(f)(t) - f(t)| \leq |I_1| + |I_2| \leq \varepsilon. \quad \text{quad}\square$$

Παρατήρηση 4.6 Αποδείξαμε το Θεώρημα του Féjer στη μορφή που θα μας χρειασθεί, δηλαδή για συνεχείς συναρτήσεις. Μια γενικότερη μορφή του είναι η ακόλουθη

Θεώρημα 4.7 (Féjer, [Απ 30.34]) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη και 2π -περιοδική συνάρτηση. Αν για κάποιο $x_o \in \mathbb{R}$ τα πλευρικά όρια $f(x_o-)$ και $f(x_o+)$ υπάρχουν, τότε η ακολουθία $(\sigma_n(f, x_o))$ συγκλίνει καθώς $n \rightarrow \infty$ στον μέσο όρο $\frac{1}{2}(f(x_o-) + f(x_o+))$.

Μπορούμε τώρα άμεσα να αποδείξουμε το

Θεώρημα 4.8 (Θεώρημα Μοναδικότητας) Αν f και g είναι συνεχείς και 2π -περιοδικές συναρτήσεις με $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ (ισοδύναμα $a_n(f) = a_n(g)$ και $b_n(f) = b_n(g)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$), τότε $f = g$.

Απόδειξη Εφόσον $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$S_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \hat{g}(k) e^{ikx} = S_n(g, x)$$

για κάθε x και n και συνεπώς $\sigma_n(f) = \sigma_n(g)$ για κάθε n .

Αλλά από το Θεώρημα Féjer έχουμε $f = \lim_n \sigma_n(f)$ και $g = \lim_n \sigma_n(g)$ ομοιόμορφα, άρα $f = g$. \square