

5 Μέση τετραγωνική σύγκλιση

Ας θυμηθούμε ότι μια ακολουθία (συνεχών) συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει σε μια συνάρτηση f ομοιόμορφα στο $[-\pi, \pi]$ αν και μόνον αν

$$\|f_n - f\|_\infty \equiv \sup\{|f_n(t) - f(t)| : t \in [-\pi, \pi]\} \rightarrow 0.$$

Δηλαδή, στον (γραμμικό) χώρο $C[-\pi, \pi]$, η ομοιόμορφη σύγκλιση ταυτίζεται με την σύγκλιση ως προς τη μετρική d_∞ που ορίζεται ως εξής:

$$d_\infty(f, g) \equiv \|f - g\|_\infty = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in [-\pi, \pi]\}.$$

Υπάρχει όμως και μια άλλη χρήσιμη μετρική στον $C[-\pi, \pi]$, λεγόμενη μετρική d_2 της μέσης τετραγωνικής σύγκλισης που ορίζεται ως εξής:

$$d_2(f, g) \equiv \|f - g\|_2 \equiv \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Για να δείξουμε ότι η d_2 είναι πράγματι μετρική στον $C[-\pi, \pi]$, παρατηρούμε αμέσως από τον ορισμό της ότι

$$d_2(f, g) = d_2(g, f) \quad \text{και} \quad d_2(f, g) \geq 0$$

για κάθε f, g . Επίσης, αν οι f, g είναι συνεχείς και διαφορετικές, τότε υπάρχει $\delta > 0$ και $(a, b) \subseteq [-\pi, \pi]$ ώστε $|f(t) - g(t)|^2 \geq \delta$ για κάθε $t \in (a, b)$, οπότε

$$d_2(f, g)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt \geq \frac{1}{2\pi} \int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt \geq \frac{1}{2\pi} \delta (b - a) > 0$$

άρα $d_2(f, g) = 0$ αν και μόνον αν $f = g$. Απομένει να αποδειχθεί η τριγωνική ανισότητα:

Λήμμα 5.1 Αν

$$\langle f, g \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \bar{g}$$

τότε για κάθε f, g, h έχουμε

- (a) $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$
- (b) $d_2(f, g) \leq d_2(f, h) + d_2(h, g)$.

Απόδειξη (a) Για να δείξω ότι $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ αρκεί να υποθέσω ότι $\|g\|_2 = 1$. Αν $\lambda \in \mathbb{C}$, από τον ορισμό του $\langle f, g \rangle$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle f - \lambda g, f - \lambda g \rangle &= \|f\|_2^2 - \bar{\lambda} \langle f, g \rangle - \lambda \langle g, f \rangle + |\lambda|^2 \|g\|_2^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \bar{\lambda} \langle f, g \rangle - \lambda \langle g, f \rangle + |\lambda|^2 \end{aligned}$$

οπότε, θέτοντας $\lambda = \langle f, g \rangle$, έχουμε $0 \leq \|f\|_2^2 - 2|\langle f, g \rangle|^2 + |\langle f, g \rangle|^2$ άρα $|\langle f, g \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 = \|f\|_2^2 \|g\|_2^2$ και η ζητούμενη ανισότητα αποδείχθηκε.

(b) Για κάθε f, g, h έχουμε

$$\begin{aligned} \|f + g\|_2^2 &= \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= \langle f, f \rangle + 2\operatorname{Re} \langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle \\ &\leq \langle f, f \rangle + 2|\langle f, g \rangle| + \langle g, g \rangle \\ &\leq \|f\|_2^2 + 2\|f\|_2 \|g\|_2 + \|g\|_2^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2 \end{aligned}$$

από το (a), άρα

$$d_2(f, g) = \|(f - h) + (h - g)\|_2 \leq \|f - h\|_2 + \|h - g\|_2 = d_2(f, h) + d_2(h, g).$$

□

Παρατήρηση 5.2 Αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα τότε $f_n \xrightarrow{d_2} f$ και $f_n(t) \rightarrow f(t)$ για κάθε t .

Απόδειξη Αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα τότε

$$\begin{aligned} d_2(f_n, f) &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(t) - f(t)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sup\{|f_n(t) - f(t)|^2 : t \in [-\pi, \pi]\} \frac{2\pi}{2\pi} \right)^{1/2} = d_\infty(f_n, f) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

και για κάθε $t \in [-\pi, \pi]$,

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [-\pi, \pi]\} = d_\infty(f_n, f) \rightarrow 0.$$

Λήμμα 5.3 (Βέλτιστης μέσης τετραγωνικής προσέγγισης [Απ 30.6])
Εστω $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ συνάρτηση ώστε $\int |f|^2 < \infty$ και $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n ισχύει

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f - p|^2 \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f - S_n(f)|^2.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $p = S_n$.

Απόδειξη Έστω $p(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}$. Ισχυρίζομαι ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f - p|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f - S_n(f)|^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f) - p|^2 \quad (1)$$

Από την (1) έπεται αμέσως ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f - p|^2 \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f - S_n(f)|^2$$

και ότι ισότητα ισχύει αν και μόνον αν ο τελευταίος όρος στην (1) μηδενίζεται, πράγμα που συμβαίνει αν και μόνον αν $p = S_n$.

Απόδειξη Ισχυρισμού Αν θέσουμε $g = f - S_n(f)$ και $h = S_n(f) - p$ έχουμε

$$f - p = f - S_n(f) + S_n(f) - p = g + h.$$

Παρατηρούμε ότι, αν $e_k(t) = e^{ikt}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \bar{e}_k = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(f) \bar{e}_k$$

όταν $|k| \leq n$ (από τον ορισμό του $S_n(f)$), άρα

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g \bar{e}_k = 0, \quad |k| \leq n.$$

Έπεται ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g \bar{h} = 0 \quad \text{γιατί} \quad h = \sum_{k=-n}^n (\hat{f}(k) - c_k) e_k$$

οπότε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f - p|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g + h|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (g + h)(\overline{g + h}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g \bar{g} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g \bar{h} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h \bar{g} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h \bar{h} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g|^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h|^2 \end{aligned}$$

και η (1) αποδείχθηκε.

Η επόμενη Πρόταση, όπως θα δείξουμε αργότερα, ισχύει για μια κλάση συναρτήσεων πολύ ευρύτερη από τις συνεχείς.

Πρόταση 5.4 *Αν η f είναι συνεχής, τότε*

$$S_n(f) \xrightarrow{d_2} f$$

δηλαδή

$$\lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f) - f|^2 = 0.$$

Απόδειξη Εφόσον η f είναι συνεχής, από το Θεώρημα του Féjer ξέρουμε ότι $\sigma_n(f) \rightarrow f$ ομοιόμορφα, δηλαδή $d_\infty(\sigma_n(f), f) \rightarrow 0$. Έπεται (βλ. Παρατήρηση 5.2) ότι $d_2(\sigma_n(f), f) \rightarrow 0$. Εφαρμόζοντας όμως το Λήμμα για $p = \sigma_n(f)$, έχουμε $0 \leq d_2(S_n(f), f) \leq d_2(\sigma_n(f), f)$ άρα $d_2(S_n(f), f) \rightarrow 0$.

Παρατήρηση 5.5 *Αν $p(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, τότε*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |p|^2 = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2.$$

Απόδειξη Εφόσον $\hat{p}(k) = c_k$ για $|k| \leq n$, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |p|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p \bar{p} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p \sum_{k=-n}^n \bar{c}_k \bar{e}_k \\ &= \sum_{k=-n}^n \bar{c}_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p \bar{e}_k = \sum_{k=-n}^n \bar{c}_k c_k = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2. \end{aligned}$$

Πρόταση 5.6 (Ανισότητα Bessel [Απ 30.7]) *Έστω $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ συνάρτηση ώστε $\int |f|^2 < \infty$. Τότε*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2.$$

Απόδειξη Έστω $n \in \mathbb{N}$. Εφαρμόζουμε την (1) για $p = 0$ και έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f - S_n(f)|^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)|^2 \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)|^2 \quad (2)$$

Αλλά το $S_n(f)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο με συντελεστές $\hat{f}(k)$ για $|k| \leq n$ και 0 για $|k| > n$, άρα από την προηγούμενη Παρατήρηση έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)|^2 = \sum_{k=-n}^n |\hat{f}(k)|^2.$$

Εφόσον η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ανισότητα Bessel αποδειχθηκε.

Θα δείξουμε αργότερα ότι στην πραγματικότητα ισχύει ισότητα.

Άμεσο πόρισμα της ανισότητας Bessel είναι το θεμελιώδες

Θεώρημα 5.7 (Riemann - Lebesgue [Απ 30.8]) Αν $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μια συνάρτηση ώστε $\int |f|^2 < \infty$, τότε

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{f}(k) = \lim_{k \rightarrow -\infty} \hat{f}(k) = 0.$$

Πόρισμα 5.8 (Ισότητα Parseval [Απ 30.41]) Αν $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2.$$

Απόδειξη Έχουμε δείξει ότι $d_2(S_n(f), f) \rightarrow 0$. Εφόσον η d_2 είναι μετρική, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$|d_2(f, 0) - d_2(S_n(f), 0)| \leq d_2(S_n(f), f)$$

άρα $d_2(S_n(f), 0) \rightarrow d_2(f, 0)$, δηλαδή

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)|^2 \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2.$$

Αλλά από την Παρατήρηση 5.5 έχουμε $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)|^2 = \sum_{k=-n}^n |\hat{f}(k)|^2$, άρα

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |\hat{f}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2.$$