Η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(t) = t,\ t \in (-\pi, \pi]$

Επεκτείνουμε την f περιοδικά σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Υπολογίσαμε ότι η σειρά αυτή ισούται με

$$\begin{aligned} S(f,t) =& 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kt = 2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t + \dots\right) \\ =& 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\sin(k\pi - kt) \end{aligned}$$

επειδή $\sin(k\pi - kt) = \begin{cases} \sin kt\,, & \text{αν } k \text{ περιττός} \\ -\sin kt\,, & \text{αν } k \text{ άρτιος.} \end{cases}$

Επειδή τα αθροίσματα $\sum_{k=1}^{N} \sin(k\pi - kt)$ είναι (όπως έχουμε δείξει) ομοιόμορφα φραγμένα, και η $(\frac{1}{k})$ φθίνει προς το 0, από το κριτήριο Dirichlet προκύπτει ότι η σειρά Fourier συγκλίνει σε κάθε $t \in (-\pi, \pi)$. Μάλιστα για κάθε $\delta > 0$ στο διάστημα $[-\pi + \delta, \pi - \delta]$ η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Μπορεί να αποδειχθεί (αν και δεν έπεται άμεσα από ότι έχουμε δείξει μέχρι τώρα) ότι συγκλίνει στην f. Επίσης η σειρά Fourier συγκλίνει στο 0 για $t = \pi$ και $t = -\pi$, δηλαδή όχι στο $f(t) = \pi$, αλλά στο $\frac{f(\pi-)+f(\pi+)}{2}$.

Είναι άραγε η σύγκλιση ομοιόμορφη στο $(-\pi, \pi)$; Από το σχήμα που έφτιαξε ο Μιχάλης Νικολούζος (βλ. την ηλεκτρονική σελίδα του μαθήματος) μοιάζει ότι η απάντηση είναι αρνητική. Μοιάζει μάλιστα να υπάρχει μονίμως μια απόκλιση μεταξύ των γραφημάτων της f και της $S_n(f)$, μολονότι η απόκλιση αυτή «απομακρύνεται προς τα άκρα» καθώς $n \to \infty$. Η μόνιμη αυτή απόκλιση ονομάζεται *φαινόμενο Gibbs*.

Αυτό μπορεί να επαληθευθεί εύκολα:

Λήμμα 1 [1] *Αν* $t_n = \pi(1 - \frac{1}{n})$, $s_n = -\pi(1 - \frac{1}{n})$, *τότε*

$$\lim_n S_n(f, t_n) > A\pi \quad \textit{και} \quad \lim_n S_n(f, s_n) > -A\pi$$

όπου $A > 1,17$.

Απόδειξη Αποδεικνύουμε την πρώτη ανισότητα (η δεύτερη αποδεικνύεται ανάλογα). Έχουμε

$$S_n(f, t_n) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\sin(k\pi - kt_n) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\sin(\frac{k\pi}{n}) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{n}\left(\frac{n}{k\pi}\sin(\frac{k\pi}{n})\right).$$

[1] Από το βιβλίο του T.W. Körner: Fourier Analysis, Cambridge University Press, 1992

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο άθροισμα είναι το κάτω άθροισμα Riemann για τη συνάρτηση $g(t) = \frac{\sin t}{t}$, $t \in (0, \pi])$, $g(0) = 1$ που αντιστοιχεί σε διαμέριση του $[0, \pi]$ σε n ίσα υποδιαστήματα (πλάτους $\frac{\pi}{n}$).

Συνεπώς το άθροισμα αυτό συγκλίνει στο ολοκλήρωμα. Άρα

$$S_n(f, t_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt.$$

Μένει να αποδειχθεί η ανισότητα

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt > 1,17. \tag{1}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό βεβαίως υπάρχει, αφού η g είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, αλλά δεν υπολογίζεται στοιχειωδώς (βλ. [Απ], πριν την Πρόταση 24.2). Μπορεί όμως εύκολα να βρεθεί μια αριθμητική προσέγγιση στην τιμή του, πράγμα που αρκεί για το πρόβλημά μας.

Πράγματι, η σειρά $Taylor$ στο 0 για τη συνάρτηση ημίτονο

$$\sin t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}$$

δίνει

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k}.$$

Η τελευταία αυτή σειρά συγκλίνει *ομοιόμορφα* στο $[0, \pi]$ (γιατί;) και επομένως

$$\begin{aligned}\int_0^\pi g(t)dt =& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^\pi t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{\pi^{2k+1}}{2k+1} \\ =& \pi\left(1 - \frac{\pi^2}{3!3} + \frac{\pi^4}{5!5} - \frac{\pi^6}{7!7} + \dots\right).\end{aligned}$$

Επειδή η σειρά αυτή είναι εναλλάσσουσα, το σφάλμα στο n-οστό βήμα δεν ξεπερνάει την απόλυτη τιμή του επόμενου όρου, δηλαδή

$$\left|\int_0^\pi g(t)dt - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{\pi^{2k+1}}{2k+1}\right| \le \left|\frac{\pi^{2n+3}}{(2n+3)!(2n+3)}\right|.$$

Αν τώρα υπολογίσει κανείς το μερικό άθροισμα για $n = 4$ και χρησιμοποιήσει την τελευταία ανισότητα, αποδεικνύεται η ανισότητα (1).