Συμπληρωματικές ασκήσεις στις σειρές Fourier
2 Μαΐου 2004

Άσκηση 9 Δείξτε ότι αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα σε ένα σύνολο A τότε για κάθε ακολουθία (t_n) του A ισχύει $\lim_n(f_n(t_n) - f(t_n)) = 0$.
Αυτό δείχνει ότι το φαινόμενο Gibbs δεν εμφανίζεται όταν η σειρά Fourier συγκλίνει ομοιόμορφα.

Άσκηση 10 Κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $f = f_a + f_p$ όπου η f_a είναι άρτια και η f_p περιττή. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_a|^2 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_p|^2.$$

Άσκηση 11 Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι 2π περιοδική και ολοκληρώσιμη συνάρτηση, να δειχθεί ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t-x) - f(t)|\,dt = 0.$$

Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα την περίπτωση που η f είναι συνεχής.

Άσκηση 12 Αποδείξαμε, ως πόρισμα της ανισότητας Bessel, ότι αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη, τότε, αν $n \in \mathbb{N}$ και $n \to \infty$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \to 0 \quad \text{και} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt \to 0.$$

Με τις ίδιες υποθέσεις, αποδείξτε ότι γενικότερα, αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda \to \infty$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(\lambda t)dt \to 0 \quad \text{και} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(\lambda t)dt \to 0.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε αν θέλετε να χρησιμοποιήσετε την προηγούμενη άσκηση, αφού δείξετε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(\lambda t)dt = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+\frac{\pi}{\lambda})\sin(\lambda t)dt.$$

Παρατήρηση: Οι ακολουθίες (f_n) και (g_n) όπου $f_n(t) = f(t)\sin(nt)$ και $f_n(t) = f(t)\cos(nt)$ ΔΕΝ συγκλίνουν εν γένει, όπως είδαμε, ούτε κατά σημείο.