1 Τριγωνομετρικές Σειρές

Τριγωνομετρική Σειρά:

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

Τριγωνομετρικό πολυώνυμο:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin kx$$

$a_k = b_k = 0$ όταν $k > N$. Βαθμός N αν $|a_N| + |b_N| \neq 0$.

Ισοδύναμη μορφή

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx)$$

όπου

$$\exp(it) \equiv \cos t + i \sin t$$

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2}, & k \geq 1 \\ \frac{a_0}{2}, & k = 0 \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2}, & k \leq -1 \end{cases}$$

Παράδειγμα 1.1 *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2k\pi$,

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \tag{1}$$

$$c_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}\,.$$

Όταν $x = 2k\pi$,

$$s_n(x) = 0$$
$$c_n(x) = n + \frac{1}{2}\,.$$

Σύγκλιση: Έστω $x \in [-\pi, \pi]$ σταθερό. Αν $x = 0, \pm\pi$ η ακολουθία $(s_n(x))_n$ είναι σταθερά ίση με 0 ενώ η $(c_n(x))_n$ τείνει στο $+\infty$ όταν $x = 0$ και είναι $\frac{(-1)^n}{2}$ όταν $x = \pm\pi$.

Για κάθε άλλη τιμή του x και οι δυο ακολουθίες αποκλίνουν.

Πράγματι αν η $(s_n(x))_n$ συγκλίνει, τότε πρέπει $\lim_n \sin nx = 0$. Τότε όμως, εφόσον $x \neq 0, \pm\pi$,

$$\begin{aligned} &\sin(n+1)x \to 0 \\ &\Rightarrow \sin nx \cos x + \cos nx \sin x \to 0 \\ &\overset{\sin x \neq 0}{\Longrightarrow} \qquad \cos nx \to 0 \end{aligned}$$

άτοπο, αφού $\cos^2 nx + \sin^2 nx = 0$.

Ομοίως αν η $(c_n(x))_n$ συγκλίνει, τότε πρέπει $\lim_n \cos nx = 0$, οπότε $\cos 2nx \to 0$, δηλαδή $2\cos^2 nx - 1 \to 0$, οπότε $\cos nx \to \frac{1}{\sqrt{2}}$, άτοπο.

Μολονότι οι δύο ακολουθίες δεν συγκλίνουν, είναι φραγμένες (όταν $x \neq 2k\pi$).

Παρατήρηση 1.2 *Αν $x \in (0, 2\pi)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε*

$$\left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \right| \leq \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \tag{2}$$
$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Επιπλέον για κάθε $\delta > 0$ οι δύο ακολουθίες είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο διάστημα $[\delta, 2\pi - \delta]$: Αν $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \right| \leq \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}} \tag{3}$$
$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| \leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

Οι ανισότητες (2) προκύπτουν άμεσα από τις (1) και οι (3) από τις (2), εφόσον $|\sin\frac{x}{2}| \geq \sin\frac{\delta}{2}$ όταν $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$.

Παρατήρηση 1.3 *Οι δύο ακολουθίες δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο διάστημα $(0, 2\pi)$. Δεν υπάρχει δηλαδή αριθμός $M < +\infty$ ώστε $|c_n(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in (0, 2\pi)$.*

Πράγματι, αν π.χ. θέσουμε $x_m = \frac{\pi}{2m+1}$ έχουμε από την (1)

$$c_m(x_m) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2\sin\frac{1}{4m+2}} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{4m+2}}$$

που τείνει στο ∞ καθώς $m \to \infty$.

Παρατήρηση 1.4 *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όλα τα σημεία $\{e^{2\pi inx} : n \in \mathbb{N}\}$ βρίσκονται στη μοναδιαία περιφέρεια $\mathbb{T}$ του $\mathbb{C}$. Αν $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, το σύνολο αυτό είναι πεπερασμένο: $e^{2\pi iqx} = e^{2\pi iq\frac{p}{q}} = 1$, $e^{2\pi i(q+1)x} = e^{2\pi ix}, \ldots$. Αν $x \notin \mathbb{Q}$ το σύνολο αυτό είναι όχι μόνον άπειρο, αλλά είναι πυκνό στην $\mathbb{T}$. Έπεται ότι το σύνολο $\{\sin(2\pi nx) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο $[-1,1]$, όταν $x \notin \mathbb{Q}$.*

Απόδειξη Έστω $z = e^{2\pi ix}$. Αν υπάρχουν διαφορετικοί $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε $z^m = z^n$, τότε $z^{(m-n)} = 1$, οπότε ο αριθμός $2\pi(m-n)x$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο $2\pi k$ του 2π, άρα $x = \frac{k}{m-n} \in \mathbb{Q}$.

Επομένως αν ο x είναι άρρητος, τα σημεία του συνόλου

$$D = \{z, z^2, z^3 \ldots\}$$

είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Έστω $\epsilon \in (0,1)$. Θα δείξω ότι οποιοδήποτε ανοικτό τόξο της περιφέρειας με χορδή μήκους 2ϵ αναγκαστικά θα περιέχει ένα από τα σημεία αυτά.

Πράγματι, αφού η ακολουθία (z^n) είναι φραγμένη, υπάρχουν $n, m \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < |z^n - z^m| < \epsilon$, άρα $0 < |z^{(n-m)} - 1| < \epsilon$.

Θέτοντας τώρα $w = z^{(n-m)}$, έχουμε

$$0 < |w^{k+1} - w^k| = |w - 1| < \epsilon \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς τα σημεία $w, w^2, \ldots \in D$ είναι όλα διαφορετικά σημεία της περιφέρειας $\mathbb{T}$ και σχηματίζουν τόξα με χορδές μήκους μικρότερου από ϵ. Επομένως οποιοδήποτε ανοικτό τόξο C της περιφέρειας με χορδή μήκους 2ϵ αναγκαστικά θα περιέχει κάποιο από αυτά.

Παράδειγμα 1.5

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\sin kx = \sin x + \frac{1}{4}\sin 2x + \ldots + \frac{1}{n^2}\sin nx$$

$$c_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\cos kx = \cos x + \frac{1}{4}\cos 2x + \ldots + \frac{1}{n^2}\cos nx$$

Αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n \geq m$

$$\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2} \sin kx\right| \leq \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

επειδή $|\sin(kx)| \leq 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αλλά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$, άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq m \geq n_o$ να ισχύει $\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2} < \epsilon$ οπότε

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } n \geq m \geq n_o, \quad \left|\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2} \sin kx\right| < \epsilon$$

πράγμα που σημαίνει η ακολουθία των συναρτήσεων (s_n) (είναι βασική, άρα) συγκλίνει *ομοιόμορφα ως προς* x και συνεπώς το όριό της, έστω s, είναι συνεχής συνάρτηση.

Ίδιες παρατηρήσεις ισχύουν και για την ακολουθία (c_n).

Χρησιμοποιήσαμε εδώ το γνωστό (δες [Ru, 7.8, 7.12] ή [Απ, 27.11, 27.12])

Θεώρημα 1.6 *Αν μια ακολουθία (f_n) συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{C}$ (όπου $X \subseteq \mathbb{R}$) είναι* ομοιόμορφα βασική[1]*, τότε συγκλίνει ομοιόμορφα στο X.*

Αν επί πλέον οι f_n είναι συνεχείς στο X, τότε και το όριό τους είναι συνεχής συνάρτηση.

Παράδειγμα 1.7

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin kx = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \ldots + \frac{1}{n} \sin nx$$
$$c_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cos kx = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \ldots + \frac{1}{n} \cos nx$$

Θα δείξουμε ότι και οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν για κάθε $x \neq 2k\pi$ και ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις. Αρκεί να περιορισθούμε στο $(0, 2\pi)$, εφόσον οι δύο ακολουθίες είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα, άρα 2π-περιοδικές συναρτήσεις.

Υπενθυμίζουμε:

[1] δηλαδή ικανοποιεί: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n, m \geq n_o$ να ισχύει *για κάθε* $x \in X$ η ανισότητα $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$

Λήμμα 1.8 (άθροιση κατά μέρη, [Ru 3.41]) *Αν* $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$ *και* $a_k \in \mathbb{C}$, *τότε θέτοντας* $s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ *και* $s_0 = 0$, *έχουμε για κάθε* $m, n \in \mathbb{N}$ *με* $n \geq m \geq 1$,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m$$

Απόδειξη Έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=m}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m}^{n} s_{k-1} b_k \\
&\overset{(j=k-1)}{=} \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{j=m-1}^{n-1} s_j b_{j+1} \\
&= \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_k + s_n b_n - s_{m-1} b_m - \sum_{j=m}^{n-1} s_j b_{j+1} \\
&\overset{(k=j)}{=} \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_k + s_n b_n - s_{m-1} b_m - \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_{k+1} \\
&= \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m.
\end{aligned}$$

Λήμμα 1.9 (Dirichlet, [Απ 27.32])
Έστω (a_k) *ακολουθία συναρτήσεων* $a_k : X \to \mathbb{C}$ *και* (b_k) *ακολουθία μη αρνητικών αριθμών. Αν* (i) *τα μερικά αθροίσματα της σειράς* $\sum a_k$ *είναι ομοιόμορφα φραγμένα, δηλαδή*

(i) *υπάρχει* $M < \infty$ *με* $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\right| \leq M$ *για κάθε* $t \in X$ *και κάθε* $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$

και (iii) $b_n \to 0$,

τότε η σειρά $\sum_k b_k a_k$ *συγκλίνει* ομοιόμορφα.

Απόδειξη Αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n > m$, για κάθε $t \in X$ έχουμε από το Λήμμα

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(t)b_k\right| = \left|\sum_{k=m}^{n-1} s_k(t)(b_k - b_{k+1}) + s_n(t)b_n - s_{m-1}(t)b_m\right| \\
&\leq \sum_{k=m}^{n-1} |s_k(t)|(b_k - b_{k+1}) + |s_n(t)|b_n + |s_{m-1}(t)|b_m \ \ (\text{γιατί } b_n, b_m, b_k - b_{k+1} \geq 0) \\
&\leq \sum_{k=m}^{n-1} M(b_k - b_{k+1}) + Mb_n + Mb_m \\
&= M(b_m - b_n) + Mb_n + Mb_m = 2Mb_m.
\end{aligned}$$

Επομένως, αν δοθεί $\epsilon > 0$, αφού $b_n \to 0$, βρίσκουμε $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $b_m < \frac{\epsilon}{2M}$ όταν $m \geq n_o$, οπότε, για κάθε $t \in X$ και κάθε $n > m \geq n_o$ έχουμε από την προηγούμενη ανισότητα

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(t)b_k\right| < \epsilon$$

και άρα η σειρά είναι ομοιόμορφα βασική και συνεπώς (Θεώρημα 1.6) ομοιόμορφα συγκλίνουσα. □

Θεωρούμε τώρα την ακολουθία (s_n) όπου

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin kx.$$

Εδώ έχουμε $a_k(x) = \sin kx$ και $b_k = \frac{1}{k}$. Η (b_k) φθίνει προς το 0, αλλά τα μερικά αθροίσματα δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένα στο $(0, 2\pi)$ (Παρατήρηση 1.3). Άρα το Λήμμα του Dirichlet δεν εφαρμόζεται απευθείας, γι'αυτό ακολουθούμε την εξής μέθοδο: Αν δοθεί οποιοδήποτε $x_o \in (0, 2\pi)$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $x_o \in [\delta, 2\pi - \delta]$. Ξέρουμε ότι για κάθε $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ ισχύει

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

Επομένως το Λήμμα του Dirichlet εφαρμόζεται στο σύνολο $X_\delta = [\delta, 2\pi - \delta]$ και επομένως η σειρά αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα στο X_δ, έστω στη συνάρτηση f. Επειδή τα μερικά αθροίσματα είναι συνεχείς συναρτήσεις, έπεται ότι και η f θα είναι συνεχής στο ίδιο διάστημα. Έπεται λοιπόν ότι η συνάρτηση f ορίζεται και είναι συνεχής στο x_o. Επειδή το x_o είναι αυθαίρετο σημείο του $(0, 2\pi)$, δείξαμε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, 2\pi)$.

Ίδιες παρατηρήσεις ισχύουν για τις σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos kx \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{ikx}.$$

2 Σειρές Fourier

Αν f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, πώς να βρώ τους συντελεστές;

Παρατήρηση 2.1 *Αν* $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin kx$, *τότε*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx dx \end{aligned}$$

Για την απόδειξη, χρησιμοποιούμε την εύκολη

Παρατήρηση 2.2 *Αν* $n, m \in \mathbb{N}$, *έχουμε*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx &= \begin{cases} 1 & n = m \neq 0 \\ 0 & n \neq m \end{cases} \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx &= \begin{cases} 1 & n = m \neq 0 \\ 0 & n \neq m \end{cases} \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx dx &= 0 \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν, αν $1 \leq n, m \leq N$,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = 2\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos kx dx + \sum_{k=1}^{N} b_k \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin kx dx = a_0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx =$$

$$\frac{a_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos nx dx + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos kx \cos nx dx + \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin kx \cos nx dx = a_n$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx dx =$$

$$\frac{a_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin mx dx + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos kx \sin mx dx + \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx dx = b_m$$

Παρατήρηση 2.3 (Μιγαδική μορφή) *Αν* $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(ikx)dx = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Απόδειξη:

$$\text{Αν } k \neq 0, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(ikx)dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\exp(ikx)}{ik}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Παρατήρηση 2.4 *Αν*

$$f(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp ikx$$

τότε, αν $-N \leq m \leq N$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-imx)dx &= \sum_{k=-N}^{N} \frac{c_k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp ikx \exp(-imx)dx \\ &= \sum_{k=-N}^{N} \frac{c_k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp i(k-m)x dx = c_m. \end{aligned}$$

Γενίκευση: Αν δοθεί συνάρτηση f, ορίζω

$$\begin{aligned} a_n = a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \\ b_m = b_m(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx dx, \quad (m = 1, 2, \ldots) \\ \hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-ikx)dx, \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

αρκεί τα ολοκληρώματα να υπάρχουν.

Με αυτούς τους συντελεστές σχηματίζω τη **σειρά Fourier** $S(f)$ της f:

$$\begin{aligned} S(f, x) &\equiv \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \end{aligned}$$

Άσκηση 2.5 *Δείξτε ότι τα μερικά αθροίσματα των δύο αυτών σειρών ταυτίζονται.*

Δεν εξετάζουμε αυτή τη στιγμή πότε η σειρά Fourier $S(f)$ μιας συνάρτησης συγκλίνει και πού. Απλώς αντιστοιχούμε στην f τη σειρά $S(f)$, δηλαδή τις ακολουθίες $(a_n), (b_n)$ των συντελεστών.

Γράφουμε

$$\begin{aligned} f &\sim \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \qquad \text{ή} \quad f \sim (a_n, b_n) \\ f &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \qquad \text{ή} \quad f \sim (\hat{f}_k) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.6 (Η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(t) = t, \ t \in (-\pi, \pi)$)

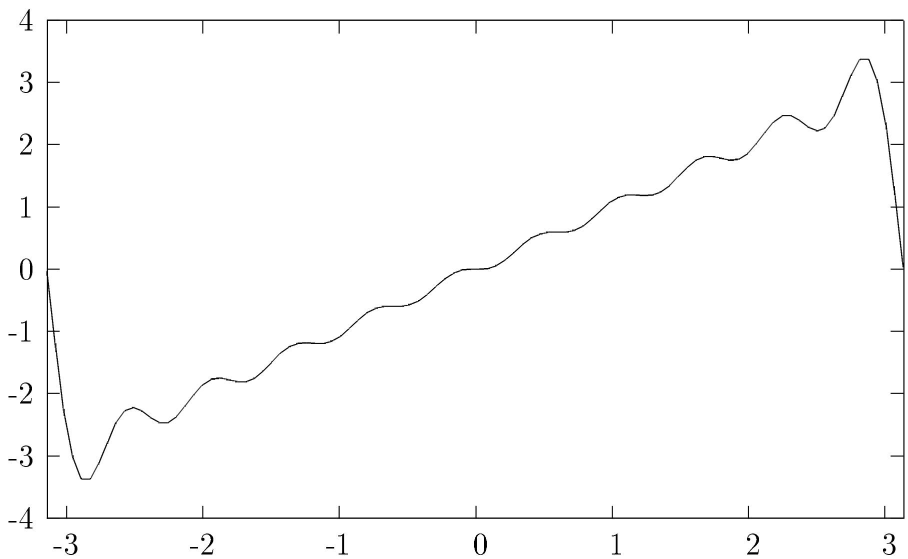
$$(n = 0) \qquad \hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t dt = 0.$$

$$
\begin{aligned}
(n \neq 0) \qquad \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-int}dt = \frac{1}{-2\pi in}\int_{-\pi}^{\pi} t(e^{-int})'dt \\
&= \frac{i}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} t(e^{-int})'dt = \frac{i}{2\pi n}\left(\left[te^{-int}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}dt\right) \\
&= \frac{i}{2\pi n}(\pi e^{-in\pi} - (-\pi)e^{in\pi}) = \frac{i}{n}\frac{e^{in\pi}+e^{-in\pi}}{2} = \frac{i}{n}\cos(n\pi) = \frac{i(-1)^n}{n}
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
f &\sim \sum_{n\neq 0}\frac{i(-1)^n}{n}e^{int} = i\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}e^{int} + \frac{(-1)^{-n}}{-n}e^{-int}\right) \\
&= i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(e^{int}-e^{-int}) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nt}{n} \\
&= 2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t + \dots\right) \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi - nt) \quad (\text{γιατί;}).
\end{aligned}
$$

Όπως έχουμε δείξει (Παράδειγμα 1.7), τα μερικά αθροίσματα της σειράς αυτής σχηματίζουν βασική ακολουθία και επομένως η σειρά συγκλίνει. Συγκλίνει όμως άραγε στην f;



Το μερικό άθροισμα της σειράς μέχρι τον 10ο όρο.

Παράδειγμα 2.7 *Έστω $0 < r < 1$. Ορίζουμε*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin kx.$$

Η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα, άρα η f είναι συνεχής συνάρτηση. Ισχυρισμός:

$$\begin{aligned} &b_n(f) = r^n \quad n = 1, 2, \ldots, \quad a_n(f) = 0 \\ &\text{δηλαδή} \quad S(f) = f \end{aligned}$$

Απόδειξη: Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αν

$$s_N(x) = \sum_{k=1}^{N} r^k \sin kx$$

τότε για κάθε $N \geq n$,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s_N(x) \sin nx dx = r^n, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s_N(x) \cos nx dx = 0.$$

Αλλά (ομοιόμορφη σύγκλιση) αν $\epsilon > 0$ υπάρχει $N_o \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\text{για κάθε } x \in [0, 2\pi], \qquad |s_{N_o}(x) - f(x)| < \epsilon$$

οπότε, διαλέγοντας $N \in \mathbb{N}$ μεγαλύτερο από το n και από το N_o, έχουμε

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx - r^n\right| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s_N(x) \sin nx dx\right| \\ &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x) - s_N(x)||\sin nx| dx \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \epsilon dx = 2\epsilon \end{aligned}$$

άρα $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = r^n$. Ομοίως $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = 0$.

Το παράδειγμα είναι ειδική περίπτωση της ακόλουθης Πρότασης, που αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο:

Πρόταση 2.8 *Αν $\sum |c_k| < \infty$ η σειρά $\sum c_k \exp(ikx)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση g με $\hat{g}(k) = c_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, δηλαδή $S(g) = g$.*

Παρατήρηση 2.9 *Γενικότερα αν μια τριγωνομετρική σειρά $f(x) = \sum_k c_k e^{ikx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε οι συντελεστές Fourier της f είναι οι c_k.*

Δεν είναι όμως αλήθεια εν γένει ότι κάθε συγκλίνουσα τριγωνομετρική σειρά είναι σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης (βλ. π.χ. [Απ 30.21]).

Πρόταση 2.10 (Γραμμικότητα) *Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[0, 2\pi]$ και $\lambda \in \mathbb{C}$,*

$$\begin{aligned} S(f+\lambda g) &= S(f) + \lambda S(g) \\ \text{ισοδύναμα} \quad \widehat{f+\lambda g} &= \hat{f} + \lambda \hat{g}. \end{aligned}$$

Απόδειξη Έπεται άμεσα από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος.

Πρόταση 2.11 *Αν f συνεχής, 2π-περιοδική με ολοκληρώσιμη παράγωγο,*

$$S(f') = \sum_{k=1}^{\infty} (kb_k \cos kx - ka_k \sin kx).$$

Μιγαδική μορφή:

$$\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k) \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Απόδειξη Αποδεικνύουμε τη μιγαδική μορφή: Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \exp(-ikx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[f(x) e^{ikx} \right]_0^{2\pi} - \frac{-ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx) dx = ik\hat{f}(k) \end{aligned}$$

διότι $\left[f(x) e^{ikx} \right]_0^{2\pi} = f(2\pi) e^{2\pi i} - f(0) e^0 = 0$, αφού η f είναι 2π-περιοδική.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$a_k(f') = kb_k(f), \qquad b_k(f') = -ka_k(f), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Άσκηση 2.12 *Αν μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι άρτια, τότε η σειρά Fourier της είναι σειρά συνημιτόνων (δηλαδή $b_n(f) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Αν είναι περιττή, τότε η σειρά Fourier της είναι σειρά ημιτόνων (δηλαδή $a_n(f) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές, τότε $\hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.*

Παρατηρήσεις 2.13 (Περιοδικότητα) (i) Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα, και γενικότερα οι συγκλίνουσες τριγωνομετρικές σειρές, είναι 2π-περιοδικές συναρτήσεις. Για το λόγο αυτό εξετάζουμε σειρές Fourier 2π-περιοδικών συναρτήσεων. Αν μια συνάρτηση f μας δοθεί ορισμένη στο $[0, 2\pi]$ ή στο $[-\pi, \pi]$, και ικανοποιεί $f(0) = f(2\pi)$ (αντίστοιχα $f(-\pi) = f(\pi)$) την επεκτείνουμε περιοδικά σ'όλο το $\mathbb{R}$. Αν όμως $f(0) \neq f(2\pi)$, πριν την επεκτείνουμε πρέπει να την αλλάξουμε ώστε να μπορεί να επεκταθεί περιοδικά. Διαλέγουμε λοιπόν μια τιμή c και ορίζουμε μια νέα συνάρτηση g στο $[0, 2\pi]$ θέτοντας $g(t) = f(t)$ για κάθε $t \in (0, 2\pi)$ και $g(0) = c = g(2\pi)$. Βεβαίως οι συντελεστές Fourier της g θα είναι οι ίδιοι με τους συντελεστές Fourier της f.

(ii) Όταν λέμε ότι μια 2π-περιοδική συνάρτηση f είναι π.χ. συνεχής ή συνεχώς παραγωγίσιμη, ακόμα κι'αν έχει δοθεί αρχικά στο $(0, 2\pi)$, εννοούμε ότι έχει αυτήν την ιδιότητα *αφού επεκταθεί περιοδικά* σ'ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(t) = t$, $(t \in (0, 2\pi))$ δεν έχει συνεχή περιοδική επέκταση στο $\mathbb{R}$, διότι η περιοδική επέκτασή της παρουσιάζει ασυνέχειες στα σημεία $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$. Η συνάρτηση $g(t) = t^2 - \pi^2$, $(t \in [-\pi, \pi])$, που είναι συνεχής 2π-περιοδική, δεν έχει συνεχή 2π-περιοδική παράγωγο (παρότι η g' είναι συνεχής στο $[-\pi, \pi]$).

(iii) Αν μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι περιοδική με περίοδο $\omega > 0$, τότε η σειρά Fourier της ορίζεται ως εξής:

$$f \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{\omega}x\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{\omega}x\right)$$

όπου

$$a_n = a_n(f) = \frac{2}{\omega}\int_0^{\omega} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{\omega}x\right)dx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$
$$b_m = b_m(f) = \frac{2}{\omega}\int_0^{\omega} f(x)\sin\left(\frac{2m\pi}{\omega}x\right)dx, \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

Ασκήσεις 2.14 **(1)** *Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι 2π-περιοδική, τότε*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \int_I f(t)dt$$

όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ οποιοδήποτε διάστημα μήκους 2π. Ειδικότερα,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_I f(t)e^{-ikt}dt.$$

(2) *Αν είναι γνωστή η σειρά Fourier μιας συνάρτησης $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, να βρεθούν οι σειρές Fourier των συναρτήσεων*

$$g_1(t) = g(t) - a, \;\; g_2(t) = g(t - b), \;\; g_3(t) = g(ct), \;\; g_4(t) = e^{idt}g(t),$$

όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

3 Απλές περιπτώσεις σύγκλισης

Πρόταση 3.1 *Αν f είναι συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση και $\sum |\hat{f}(k)| < \infty$ (ισοδύναμα $\sum(|a_k(f) + |b_k(f)| < \infty$) τότε $S_N(f) \to f$ ομοιόμορφα.*

Από την Πρόταση 2.8 ξέρουμε ότι η ακολουθία $(S_N(f))$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση g με $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Πώς όμως θα συμπεράνουμε ότι $f = g$;

Το γεγονός αυτό έπεται από το ακόλουθο βασικό Θεώρημα:

Θεώρημα 3.2 (Θεώρημα Μοναδικότητας) *Αν f και g είναι* συνεχείς *και 2π-περιοδικές συναρτήσεις με $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ (ισοδύναμα $a_n(f) = a_n(g)$ και $b_n(f) = b_n(g)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$), τότε $f = g$.*

Ας σημειώσουμε από τώρα ότι το Θεώρημα δεν αληθεύει ως έχει χωρίς την υπόθεση της συνέχειας. Για παράδειγμα αν η f είναι διαφορετική απο το 0 μόνο σε πεπερασμένο πλήθος σημείων του $[0, 2\pi]$, τότε $\hat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη Έστω $h = f - g$, $h_1 = \frac{h+\bar{h}}{2}$ και $h_2 = \frac{h-\bar{h}}{2i}$. Εφόσον $\hat{h}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$\widehat{h_1}(k) = \frac{1}{2}(\hat{h}(k) + \hat{h}(-k)) = 0$$

(Άσκηση 2.12) για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και ομοίως $\widehat{h_2}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αφού οι h_1 και h_2 παίρνουν πραγματικές τιμές, για να δείξουμε ότι $f = g$ αρκεί να δείξουμε το επόμενο

Λήμμα 3.3 *Έστω $h : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ Riemann-ολοκληρώσιμη με $\hat{h}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε $h(t_0) = 0$ για κάθε $t_0 \in [-\pi, \pi]$ στο οποίο η h είναι συνεχής.*

Απόδειξη Αρκεί να δείξουμε ότι αν $h(t_0) \neq 0$, υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο q ώστε $\int_{-\pi}^{\pi} h(t)q(t)dt \neq 0$. Θεωρώντας εν ανάγκη την $-h$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $h(t_0) > 0$.

(α) Υποθέτουμε πρώτα ότι $t_0 = 0$. Από τη συνέχεια της h στο 0, υπάρχει $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ώστε

$$|t| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad h(t) > \frac{\delta}{2}. \tag{4}$$

Έστω $\varepsilon = \frac{2}{3}(1-\cos\delta) \in (0,1)$ και

$$p(t) = \varepsilon + \cos t$$

Τότε $\cos\delta = 1 - \frac{3\varepsilon}{2}$, άρα αν $\pi \ge |t| \ge \delta$ τότε $\varepsilon + \cos t < \varepsilon + \cos\delta = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, άρα

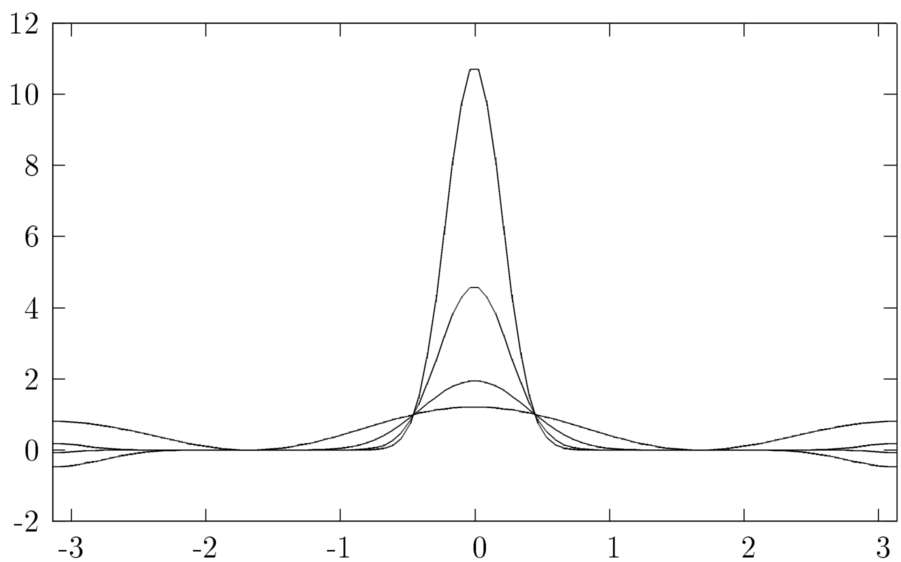
$$\pi \ge |t| \ge \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |p(t)| < 1 - \frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

(αφού $\varepsilon + \cos t > \varepsilon - 1 > -(1 - \frac{\varepsilon}{2})$.) Αλλά $p(0) = 1 + \varepsilon > 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, άρα υπάρχει $\eta \in (0, \delta)$ ώστε

$$|t| < \eta \qquad \Longrightarrow \qquad p(t) > 1 + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Θέτω

$$p_k(t) = (\varepsilon + \cos t)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$



Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα p_2, p_7, p_{16}, p_{25} με $\varepsilon = 1/10$.

Έχουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(t)p_k(t)dt = I_1 + I_2 + I_3$$

όπου

$$I_1 = \int_{|t|\ge\delta} h(t)p_k(t)dt, \quad I_2 = \int_{\eta\le|t|\le\delta} h(t)p_k(t)dt \quad \text{και } I_3 = \int_{|t|<\eta} h(t)p_k(t)dt.$$

Αν $\|h\| = \sup\{|h(t)| : |t| \leq \pi\}$, έχουμε από την (5)

$$|I_1| \leq 2\pi\|h\| \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^k$$

και από τις (4) και (6)

$$I_3 = \int_{|t|<\eta} h(t)p_k(t)dt \geq 2\eta\frac{h(0)}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k$$

άρα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $|I_1| < 1$ και $I_3 > 2$. Επίσης,

$$I_2 = \int_{\eta\leq|t|\leq\delta} h(t)p_k(t)dt \geq 0$$

διότι $h(t) \geq 0$ και $\cos t \geq 0$ στο $(-\delta, \delta)$ αφού $\delta < \pi/2$. Συνεπώς

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(t)p_k(t)dt = I_1 + I_2 + I_3 \geq -|I_1| + 0 + I_3 > 1$$

(β) Γενική περίπτωση: Αν $h(t_0) \neq 0$ και η h είναι συνεχής στο t_0, θέτουμε $q_k(t) = p_k(t - t_0)$ και έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)q_k(t)dt &= \int_{-\pi}^{\pi} h(t)p_k(t - t_0)dt = \int_{-\pi-t_0}^{\pi-t_0} h(s + t_0)p_k(s)ds \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} h(s + t_0)p_k(s)ds\end{aligned}$$

(διότι οι h και p_k είναι 2π-περιοδικές). Εφόσον η συνάρτηση $g(s) = h(s + t_0)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο 0, από το (α) μπορούμε να επιλέξουμε το k ώστε το τελευταίο ολοκλήρωμα να μην μηδενίζεται. $\square$

Για την επόμενη Πρόταση θα μας χρειασθεί ένα αποτέλεσμα, γνωστό από την Πραγματική Ανάλυση ([Ru 7.17], [Απ 27.29, 27.30]). Το διατυπώνουμε στην ειδική περίπτωση που θα το χρειασθούμε:

Πρόταση 3.4 *Αν $f_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις, ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $f_n' \to g$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο την g.*

Απόδειξη Λόγω της *ομοιόμορφης* σύγκλισης $f_n' \to g$, για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε

$$\int_a^x f_n'(t)dt \to \int_a^x g(t)dt.$$

Αλλά από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε

$$\int_a^x f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(a).$$

Επειδή $f_n(x) \to f(x)$ και $f_n(a) \to f(a)$ έπεται ότι

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)dt.$$

Αλλά η g είναι συνεχής συνάρτηση, ως *ομοιόμορφο* όριο συνεχών συναρτήσεων. Κατά συνέπεια το αόριστο ολοκλήρωμά της είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο την g. Δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη και $f' = g$. $\square$

Πρόταση 3.5 *Αν f είναι συνεχής 2π-περιοδική και $\sum |k\hat{f}(k)| < \infty$ τότε η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και η σειρά $\sum ik\hat{f}(k)\exp ikx$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 2\pi]$ στην f'.*

Απόδειξη Θέτουμε $f_N = S_N(f)$. Κατ'αρχήν παρατηρούμε ότι $\sum |\hat{f}(k)| \le \sum |k\hat{f}(k)| < \infty$. Συνεπώς από την Πρόταση 3.1 η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, δηλαδή $f_N \to f$ ομοιόμορφα:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\exp ikx.$$

Όμως έχουμε

$$f_N'(x) = \frac{d}{dx}S_N(f,x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)e^{ikx}\right) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)ike^{ikx}$$

Αλλά από την υπόθεση $\sum |k\hat{f}(k)| < \infty$ συμπεραίνουμε (Πρόταση 2.8) ότι η ακολουθία (f_N') συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση g, δηλαδή

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ik\hat{f}(k)\exp ikx.$$

Έπεται λοιπόν από την Πρόταση 3.4 ότι η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο την συνεχή συνάρτηση g.

Λήμμα 3.6 *Αν η f και οι παράγωγοί της $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ είναι συνεχείς 2π-περιοδικές συναρτήσεις και αν $|f^{(n)}(t)| \leq M$ για κάθε t τότε $|\hat{f}(k)| \leq \frac{M}{|k|^n}$ για κάθε $k \neq 0$.*

Απόδειξη Εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.11 για τις 2π-περιοδικές και συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ έχουμε, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k),\ \widehat{f''}(k) = ik\widehat{f'}(k) = (ik)^2\hat{f}(k),\ \ldots\ \widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n\hat{f}(k).$$

Αλλά

$$|\widehat{f^{(n)}}(k)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(n)}(x)\exp(ikx)dx\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f^{(n)}(x)\exp(ikx)\right|dx \leq M$$

και συνεπώς

$$|\hat{f}(k)| = \left|\frac{\widehat{f^{(n)}}(k)}{(ik)^n}\right| \leq \frac{M}{|k|^n}$$

όταν $k \neq 0$. $\square$

Πρόταση 3.7 *Αν οι f, f' και f'' είναι συνεχείς και 2π-περιοδικές, η σειρά $S(f)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.*

Απόδειξη Επειδή οι f, f' και f'' είναι εξ υποθέσεως συνεχείς στο $[0, 2\pi]$, είναι φραγμένες. Αν M είναι ένας αριθμός ώστε $|f''(t)| \leq M$ για κάθε t, από το Λήμμα έπεται ότι $|\hat{f}(k)| \leq \frac{M}{|k|^2}$ για κάθε $k \neq 0$, και συνεπώς $\sum |\hat{f}(k)| < \infty$.

Το συμπέρασμα έπεται τώρα από την Πρόταση 3.1. $\square$

Άσκηση 3.8 *Να εξετασθεί αν συγκλίνει η τριγωνομετρική σειρά*[2]

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right)$$

και να βρεθεί το όριό της, αν υπάρχει.

Άσκηση 3.9 *Δίδονται οι συναρτήσεις*

$$f_1 : (0, 2\pi] \to \mathbb{R} \text{ με } f_1(t) = t, \quad f_2 : [0, 2\pi) \to \mathbb{R} \text{ με } f_2(t) = t^2 - \pi^2,$$
$$f_3 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \text{ με } f_3(t) = t^2 - \pi^2.$$

(βλ. Παρατήρηση 2.13). Να επεκταθούν περιοδικά στο $\mathbb{R}$ και να βρεθούν οι σειρές Fourier τους. Να εξετασθεί αν οι σειρές αυτές συγκλίνουν και πού. Εφαρμόζονται οι Προτάσεις που μόλις δείξαμε στις συναρτήσεις αυτές;

[2]βλ. τις γραφικές παραστάσεις στην ηλεκτρονική σελίδα του μαθήματος