Μια σειρά Fourier που δεν συγκλίνει παντού

Θέτω $n_k = 2^{2^k}$ και

$$\begin{aligned}
q_k(t) &= \sum_{m=1}^{n_k} \frac{1}{m} \left(\exp i(2n_k - m)t - \exp i(2n_k + m)t\right) \\
&= \exp i2n_k t \sum_{m=1}^{n_k} \frac{1}{m} \left(\exp i(-mt) - \exp imt\right) = 2i \exp i2n_k t \sum_{m=1}^{n_k} \frac{1}{m} \sin mt
\end{aligned}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$|q_k(t)| = 2 \left| \sum_{m=1}^{n_k} \frac{1}{m} \sin mt \right| \leq 2 + \pi$$

για κάθε t και k (Άσκηση!).

Έστω $a_k > 0$ με $\sum_k a_k < \infty$. Επειδή $\sum_k |a_k q_k(t)| \leq \sum_k a_k$ για κάθε t, η σειρά $\sum_k a_k q_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα, άρα ορίζει συνεχή συνάρτηση:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k q_k(t).$$

Υπολογίζω τα $\hat{f}(n)$. Λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης,

$$\hat{f}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \hat{q}_k(n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αλλά

$$\begin{aligned}
q_k(t) &= \sum_{m=1}^{n_k} \frac{1}{m} \left(\exp i(2n_k - m)t - \exp i(2n_k + m)t\right) \\
\text{άρα} \quad \hat{q}_k(n) &= \sum_{m=1}^{n_k} \frac{1}{m} \left(\delta(2n_k - m, n) - \delta(2n_k + m, n)\right)
\end{aligned}$$

όπου $\delta(i,i) = 1$ και $\delta(i,j) = 0$ όταν $i \neq j$. Για να έχω $\hat{q}_k(n) \neq 0$ πρέπει να υπάρχει $m = 1, \ldots n_k$ ώστε $n = 2n_k - m$ ή $n = 2n_k + m$ αλλά όχι και τα δύο. Κυττάω τα διαστήματα $[n_k, 3n_k]$:

$$[2,6],\ [4,12],\ [16,48],\ [256,762],\ [65356,196608],\ldots$$

Είναι ξένα γιατί $n_{k+1} = 2^{2^{k+1}}(2^{2^k})^2 > 3 \cdot 2^{2^k} = 3n_k$.
α) Αν $n \in [n_k, 2n_k)$ τότε $\delta(2n_k + m, n) = 0$ για κάθε $m = 1, 2, \ldots$ και $\delta(2n_k - m, n) \neq 0$ αν και μόνο αν $m = 2n_k - n$:

$$n \in [n_k, 2n_k) \Longrightarrow \hat{q}_k(n) = \frac{1}{2n_k - n}.$$

β) Αν $n = 2n_k$ τότε $\delta(2n_k + m, n) = \delta(2n_k - m, n) = 0$ για κάθε $m = 1, 2, \ldots$:

$$n = 2n_k \Longrightarrow \hat{q}_k(n) = 0.$$

γ) Αν $n \in (2n_k, 3n_k]$ τότε $\delta(2n_k - m, n) = 0$ για κάθε $m = 1, 2, \ldots$ και $\delta(2n_k + m, n) \neq 0$ αν και μόνο αν $m = n - 2n_k$:

$$n \in (2n_k, 3n_k] \Longrightarrow \hat{q}_k(n) = \frac{-1}{n - 2n_k}.$$

δ) Αν $n \notin \bigcup_k [n_k, 3n_k]$ τότε τότε $\delta(2n_k + m, n) = \delta(2n_k - m, n) = 0$ για κάθε $m = 1, 2, \ldots$, άρα $\hat{q}_k(n) = 0$. Τελικά:

Αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $n \in [n_k, 3n_k] \backslash \{2n_k\}$, τότε $\quad \hat{f}(n) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \hat{q}_i(n) = \dfrac{a_k}{2n_k - n}$

Αν όχι, τότε $\quad \hat{f}(n) = 0$.

$$\hat{f}(n) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \hat{q}_i(n) = \begin{cases} \frac{a_k}{2n_k - n}, & \text{αν} \;\; n \in [n_k, 3n_k] \backslash \{2n_k\} \\ \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έχουμε τώρα

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} \hat{f}(n) e_n$$

$$|S_{3n_k}(0) - S_{2n_k}(0)| = \left| \sum_{n=2n_k+1}^{3n_k} \hat{f}(n) \right| = \left| \sum_{n=2n_k+1}^{3n_k} \frac{a_k}{2n_k - n} \right| = a_k \left| \sum_{n=2n_k+1}^{3n_k} \frac{1}{2n_k - n} \right|$$
$$= a_k \sum_{m=1}^{n_k} \frac{1}{m} \geq a_k \log(n_k) = a_k 2^k \log 2.$$

Θέτοντας $a_k = 2^{-k}$, εξασφαλίζουμε ότι η f είναι καλά ορισμένη, αλλά $|S_{3n_k}(0) - S_{2n_k}(0)| \geq \log 2$, άρα η $(S_n(0))$ δεν συγκλίνει.