Λήμμα 1 *Αν οι συντελεστές Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f ικανοποιούν $\hat{f}(k) = O(\frac{1}{|k|})$, αν δηλαδή υπάρκει μια σταθερά M ώστε*

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{M}{|k|}, \qquad k \neq 0,$$

τότε τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της f είναι ομοιόμορφα φραγμένα.

Απόδειξη Ξέρουμε ότι οι μέσοι όροι

$$\sigma_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{f}(k) e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(s) f(t-s) ds$$

ικανοποιούν

$$\|\sigma_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K(s)| ds = \|f\|_\infty$$

για κάθε n. Αλλά

$$S_n(f,t) - \sigma_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikt} - \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{f}(k) e^{ikt} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^{n} |k| \hat{f}(k) e^{ikt}$$

και επομένως

$$|S_n(f,t) - \sigma_n(f,t)| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^{n} |k\hat{f}(k)| \leq \frac{2n+1}{n+1} M < 2M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αφού $|k\hat{f}(k)| \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Έχουμε λοιπόν

$$\|S_n(f)\|_\infty \leq \|\sigma_n(f)\|_\infty + 2M \leq \|f\|_\infty + 2M.$$

Παράδειγμα 2 *Τα μερικά αθροίσματα της σειράς*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$$

είναι ομοιόμορφα φραγμένα.[1]

[1] Για μια άλλη απόδειξη, βλ. [Απ 30.16].

Απόδειξη Θέτουμε

$$f(t) = \begin{cases} -\pi - t, & -\pi \leq t < 0 \\ \\ \pi - t, & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι

$$\hat{f}(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \\ \frac{1}{ik}, & k \neq 0 \end{cases}$$

επομένως $|k\hat{f}(k)| \leq 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Αλλά

$$S_n(f,t) = \left(\sum_{k=-n}^{-1} + \sum_{k=1}^{n} \right) \frac{1}{ik} e^{ikt} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{ikt}}{ik} + \frac{e^{-ikt}}{-ik} \right) = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k}$$

άρα από το Λήμμα έχουμε

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k} \right| = \frac{1}{2} |S_n(f,t)| \leq \frac{1}{2}(\|f\|_\infty + 2) = \frac{\pi}{2} + 1.$$

Παρατήρηση 3 *Παρόλο που η ακολουθία* (S_n) *των τριγωνομετρικών πολυωνύμων*

$$S_n = \left(\sum_{k=-n}^{-1} + \sum_{k=1}^{n} \right) \frac{1}{ik} e_k$$

είναι ομοιόμορφα φραγμένη, το «θετικό» ή «αναλυτικό» της κομμάτι

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{ik} e_k$$

δεν είναι, γιατί $P_n(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{ik}$.