Ασκήσεις ΙΙ: Σειρές Fourier
22 Μαρτίου 2005

Άσκηση 9 Δείξτε ότι αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα σε ένα σύνολο A τότε για κάθε ακολουθία (t_n) του A ισχύει $\lim_n(f_n(t_n) - f(t_n)) = 0$.
Αυτό δείχνει ότι το φαινόμενο Gibbs δεν εμφανίζεται όταν η σειρά Fourier συγκλίνει ομοιόμορφα.

Άσκηση 10 Κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $f = f_a + f_p$ όπου η f_a είναι άρτια και η f_p περιττή. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_a|^2 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_p|^2.$$

Άσκηση 11 Αν $S(f) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(k)e_k$ είναι η σειρά Fourier μιας συνεχούς συνάρτησης, δείξτε ότι η σειρά $S^+(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\hat{f}(k)e_k$ συγκλίνει ως προς την d_2. Δείξτε επίσης ότι για τα μερικά αθροίσματα των σειρών αυτών ισχύει η ανισότητα $\|S_n^+(f)\|_2 \leq \|S_n(f)\|_2$ και εξετάστε αν ισχύει η $\|S_n^+(f)\|_\infty \leq \|S_n(f)\|_\infty$.

Άσκηση 12 Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι 2π περιοδική και ολοκληρώσιμη συνάρτηση, να δειχθεί ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t-x) - f(t)|\,dt = 0.$$

Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα την περίπτωση που η f είναι συνεχής.

Άσκηση 13 Αποδείξαμε, ως πόρισμα της ανισότητας Bessel, ότι αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη, τότε, αν $n \in \mathbb{N}$ και $n \to \infty$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)dt \to 0 \quad \text{και} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)dt \to 0.$$

Με τις ίδιες υποθέσεις, αποδείξτε ότι γενικότερα, αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda \to \infty$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(\lambda t)dt \to 0 \quad \text{και} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(\lambda t)dt \to 0.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε αν θέλετε να χρησιμοποιήσετε την προηγούμενη άσκηση, αφού δείξετε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(\lambda t)dt = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+\frac{\pi}{\lambda})\sin(\lambda t)dt.$$

Παρατήρηση: Οι ακολουθίες (f_n) και (g_n) όπου $f_n(t) = f(t)\sin(nt)$ και $f_n(t) = f(t)\cos(nt)$ ΔΕΝ συγκλίνουν εν γένει, όπως είδαμε, ούτε κατά σημείο.

Άσκηση 14 Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Féjer, αποδείξτε το Θεώρημα Weierstrass:
Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει *πολυώνυμο* $p(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n$ ώστε $\sup\{|f(t) - p(t)| : t \in [a, b]\} < \epsilon$.

Άσκηση 15 Αν $f(t) = |t|$, $t \in [-\pi, \pi]$, βρείτε τη σειρά Fourier της f, και αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Άσκηση 16 Βρείτε τη σειρά Fourier της χαρακτηριστικής συνάρτησης $\chi_{[a,b]}$ ενός διαστήματος $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$. Αποδείξτε ότι, αν $a \neq b$ και $[a, b] \neq [-\pi, \pi]$, η σειρά συγκλίνει στο $\chi_{[a,b]}(x)$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$, αλλά δεν συγκλίνει απόλυτα για κανένα $x \in [a, b]$.