8 Μετρήσιμες Συναρτήσεις

Ορισμός 8.1 **Χώρος μέτρου** *είναι μια τριάδα* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *όπου* X *είναι ένα σύνολο,* $\mathcal{M}$ *μια* σ*-άλγεβρα υποσύνόλων του* X *και* μ *ένα* σ*-προσθετικό (θετικό) μέτρο ορισμένο στην* $\mathcal{M}$*.*

Στα επόμενα σταθεροποιούμε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Θα μας απασχολήσει κυρίως το

Παράδειγμα 8.1 $X = \mathbb{R}^d$ *ή* $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(m)$ *και* $\mu = m$, *το μέτρο Lebesgue.*

Τα αποτελέσματα που ακολουθούν εφαρμόζονται όμως γενικότερα, όπως στο

Παράδειγμα 8.2 $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *και* $m(A) = \#A$, *το πλήθος των στοιχείων του* A, *όταν είναι πεπερασμένο, και* $m(A) = \infty$, *όταν είναι άπειρο.*

Ορισμός 8.2 *Μια συνάρτηση* $s : X \to \mathbb{R}$ *λέγεται* **απλή** *αν το σύνολο τιμών της* $s(X)$ *είναι πεπερασμένο.*

Αν $s(X) = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ *τότε*

$$s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$$

όπου $E_k = \{x \in X : s(x) = c_k\}$ *(*η κανονική μορφή της s*). Η οικογένεια* $\{E_1, E_2, \ldots E_n\}$ *είναι διαμέριση του* X*.*

Ορισμός 8.3 *Μια συνάρτηση* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *λέγεται* **μετρήσιμη** *αν για κάθε* $a \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{M}.$$

Παρατηρήσεις 8.3 (ι) Αν $X = \mathbb{R}^d$ ή $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, κάθε συνεχής συνάρτηση είναι μετρήσιμη.

[Απόδειξη: Άσκηση.]

(ιι) Μια απλή συνάρτηση σε κανονική μορφή $s = \sum_k c_k \chi_{E_k}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν $E_k \in \mathcal{M}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.

Πράγματι αν υποθέσουμε ότι $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ και θεωρήσουμε βοηθητικά αριθμούς $b_1, \ldots, b_n$ με $c_1 < b_1 < c_2 < b_2 < \ldots < c_{n-1} < b_{n-1} < c_n$ τότε

$$\begin{aligned} E_n &= \{x \in X : s(x) > b_{n-1}\} \\ E_{n-1} &= \{x \in X : s(x) > b_{n-2}\} \setminus \{x \in X : s(x) > b_{n-1}\} \\ &\ldots \\ E_1 &= \{x \in X : s(x) > b_1\}^c. \end{aligned}$$

(ιιι) Επομένως αν οι s, t είναι απλές μετρήσιμες, το ίδιο ισχύει και για τις

$$s + t,\ s \cdot t,\ \max\{s, t\},\ \min\{s, t\},\ |s|,\ s^+,\ s^-.$$

[Απόδειξη: Άσκηση.]

Λήμμα 8.4 *Μια συνάρτηση $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο*

$$\{x \in X : h(x) \geq a\}$$

είναι μετρήσιμο, ισοδύναμα αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο

$$\{x \in X : h(x) < a\}$$

είναι μετρήσιμο.

Απόδειξη Παρατήρησε ότι αν η h είναι μετρήσιμη, τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$, αν $h(x) \geq a$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $h(x) > a - \frac{1}{n}$ και αντίστροφα, δηλαδή ισχύει η ισότητα

$$\{x \in X : h(x) \geq a\} = \bigcap_n \{x \in X : h(x) > a - \frac{1}{n}\}$$

και άρα το $\{x : h(x) \geq a\}$ ανήκει στην $\mathcal{M}$. Έπεται ότι το σύνολο

$$\{x \in X : h(x) < a\} = \{x : h(x) \geq a\}^c$$

ανήκει επίσης στην $\mathcal{M}$.

Αν τέλος για κάθε $b \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x : h(x) < b\}$ ανήκει στην $\mathcal{M}$ τότε, επειδή

$$\{x \in X : h(x) > a\} = \left(\bigcap_n \{x \in X : h(x) < a + \frac{1}{n}\} \right)^c$$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$, το σύνολο $\{x \in X : h(x) > a\}$ ανήκει στην $\mathcal{M}$, άρα η h είναι μετρήσιμη. $\square$

Πρόταση 8.5 *Αν (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και οι f, g ορίζονται από τις σχέσεις $f(x) = \sup_n f_n(x)$ και $g(x) = \inf_n f_n(x)$ για κάθε $x \in X$ τότε οι f και g είναι μετρήσιμες.*

Απόδειξη (ι) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, αν $f(x) > a$ τότε υπάρχει n ώστε $f_n(x) > a$ και αντίστροφα, δηλαδή

$$\begin{aligned}\{x \in X : f(x) > a\} &\subseteq \{x \in X : \exists n : \ f_n(x) > a\} = \bigcup_n \{x \in X : f_n(x) > a\} \\ &\subseteq \{x \in X : f(x) > a\}\end{aligned}$$

άρα ισχύει η ισότητα

$$\{x \in X : f(x) > a\} = \bigcup_n \{x \in X : f_n(x) > a\}$$

και συνεπώς η f είναι μετρήσιμη.

(ιι) Ομοίως για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα

$$\{x \in X : g(x) < a\} = \bigcup_n \{x \in X : f_n(x) < a\},$$

συνεπώς η g είναι μετρήσιμη.

Πρόταση 8.6 *Αν (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και αν το όριο $f(x) = \lim_n f_n(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in X$ τότε η f είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη Για κάθε $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$\begin{aligned}u_n(x) &= \sup\{f_k(x) : k \geq n\} = \sup\{f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots\} \\ v_n(x) &= \inf\{f_k(x) : k \geq n\}.\end{aligned}$$

Από την προηγούμενη Πρόταση, οι u_n και v_n είναι μετρήσιμες.

Επειδή $\{f_k(x) : k \geq n\} \supseteq \{f_k(x) : k \geq n+1\}$, έχουμε $u_n(x) \geq u_{n+1}(x)$ και $v_n(x) \leq v_{n+1}(x)$. Επομένως οι ακολουθίες $(u_n(x))$ και $(v_n(x))$ συγκλίνουν. Ισχυρίζομαι ότι και οι δύο συγκλίνουν στο $f(x)$.

Επειδή $v_n(x) \leq f_n(x) \leq u_n(x)$ για κάθε n και x, έχουμε

$$\lim_n v_n(x) \equiv v(x) \leq \lim_n f_n(x) = f(x) \leq \lim_n u_n(x) \equiv u(x)$$

για κάθε x, άρα αρκεί να δείξω ότι $v(x) = u(x)$ για κάθε x.

Αν όχι, υπάρχει x με $v(x) < u(x)$. Υπάρχουν τότε $a, b \in \mathbb{R}$ με $v(x) < a < b < u(x)$. Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\inf_{k\geq n} f_k(x) < a < b < \sup_{k\geq n} f_k(x)$$

άρα υπάρχουν $m_n, k_n \geq n$ ώστε

$$f_{m_n}(x) < a < b < f_{k_n}(x)$$

οπότε

$$f_{k_n}(x) - f_{m_n}(x) > b - a \quad \text{για κάθε } \ n$$

πράγμα που σημαίνει ότι η $(f_n(x))$ δεν συγκλίνει.

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$f(x) = \lim_n u_n(x) = \inf_n u_n(x) \quad \text{για κάθε } \ x \in X$$

(η (u_n) είναι φθίνουσα ακολουθία). Επειδή κάθε u_n είναι μετρήσιμη, από την προηγούμενη Πρόταση έπεται ότι και η $f = \inf_n u_n$ θα είναι μετρήσιμη. $\square$

Θεώρημα 8.7 *Έστω $f : X \to [0, +\infty]$ μια συνάρτηση. Τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία (s_n) απλών με $s_n(X) \subseteq [0, +\infty)$ για κάθε n τέτοια ώστε*

$$s_n(x) \to f(x) \qquad \text{για κάθε } x \in X.$$

Αν f φραγμένη, μπορούμε να διαλέξουμε τις s_n ώστε $s_n \to f$ ομοιόμορφα *στο X.*

Η ιδέα της απόδειξης: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτω

$$F_n = \{x \in X : f(x) \geq n\}$$

Χωρίζω το $[0, n)$ σε $n \cdot 2^n$ διαστήματα $[0, \frac{1}{2^n}), [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}), \ldots, [\frac{n2^n-1}{2^n}, \frac{n2^n}{2^n})$ και θεωρώ τις αντίστροφες εικόνες μέσω της f :

$$E_{n,i} = \left\{x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\right\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n2^n.$$

Ορίζω

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}. \qquad \square$$

Θεώρημα 8.8 *Μια συνάρτηση $f :\to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν είναι το όριο μιας ακολουθίας*[1] *(πραγματικών) μετρήσιμων απλών συναρτήσεων.*

Απόδειξη Αν $f(x) = \lim s_n(x)$ όπου s_n μετρήσιμη απλή τότε η f είναι μετρήσιμη από την Πρόταση 8.6.

Αντίστροφα, έστω f μετρήσιμη. Αν επιπλέον $f \geq 0$ τότε από το Θεώρημα 8.7 έχω $f(x) = \lim s_n(x)$ όπου

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n}\chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}$$

με τα $E_{n,i}$ και F_n όπως στο θεώρημα. Αφού η f είναι μετρήσιμη, κάθε $E_{n,i}$ και F_n είναι στην $\mathcal{M}$ και συνεπώς (Παρατήρηση 8.3 (ιι)) η s_n είναι μετρήσιμη.

Έπεται τώρα ότι γενικά αν $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη, τότε, επειδή οι f^+ και f^- είναι μετρήσιμες, υπάρχουν απλές μετρήσιμες συναρτήσεις g_n, h_n ώστε $f^+(x) = \lim g_n(x)$ και $f^-(x) = \lim h_n(x)$, και άρα $f(x) = \lim s_n(x)$ όπου $s_n = g_n - h_n$ είναι μετρήσιμη απλή συνάρτηση. $\square$

Συμπέρασμα Η κλάση των μετρησίμων συναρτήσεων περιέχει τις συνεχείς συναρτήσεις και επίσης είναι κλειστή ως προς τις αλγεβρικές πράξεις:

f, g μετρήσιμες $\;\Rightarrow\;$ $f+g$, $f\cdot g$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, $|f|$, f^+, f^- μετρήσιμες

καθώς και τα κατά σημείο όρια ακολουθιών

$$f_n \,(n \in \mathbb{N}) \text{ μετρήσιμες } \;\Rightarrow\; \sup_n f_n,\ \inf_n f_n,\ \lim_n f_n \text{ μετρήσιμες}$$

(αν το τελευταίο όριο υπάρχει).

[1] όχι κατ'ανάγκην μονότονης

9 Ολοκλήρωση

Ορισμός 9.1 *Έστω* $s : (X, \mathcal{M}, \mu) \to \mathbb{R}^+$ *απλή μετρήσιμη,* $s(X) = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$,

$$s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}.$$

Αν $E \in \mathcal{M}$, *ορίζουμε*

$$I_E(s) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E \cap E_k)$$

(με τη σύμβαση $0 \cdot +\infty = 0$*).*

Ορισμός 9.2 *Αν* $f \geq 0$ *μετρήσιμη και* $E \in \mathcal{M}$, *ορίζουμε*

$$\int_E f d\mu = \int_E f(x) d\mu(x) = \sup\{I_E(s) : s \text{ απλή μετρήσιμη, } 0 \leq s \leq f\}.$$

Δεν αποκλείεται η περίπτωση $\int f d\mu = +\infty$.

Παρατήρηση 9.1 *Αν* s *απλή μετρήσιμη, τότε* $\int_E s d\mu = I_E(s)$.
[Απόδειξη: Άσκηση.]

Αν f μετρήσιμη και $E \in \mathcal{M}$, γράφω $f = f^+ - f^-$, και θεωρώ τα ολοκληρώματα $\int_E f^+ d\mu$ και $\int_E f^- d\mu$. Αν *κάποιο από τα δύο* είναι πεπερασμένο, έχει νόημα η διαφορά τους.

Ορισμός 9.3 *Έστω* f *μετρήσιμη και* $E \in \mathcal{M}$. *Αν κάποιο από τα* $\int_E f^+ d\mu$ *και* $\int_E f^- d\mu$ *(όπου* $f^+ = \max\{f, 0\}$ *και* $f^- = -\min\{f, 0\}$*) είναι πεπερασμένο, ορίζουμε*

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Η f *λέγεται* **(απολύτως) ολοκληρώσιμη ή αθροίσιμη** *αν* και τα δύο *ολοκληρώματα* $\int_E f^+ d\mu$ *και* $\int_E f^- d\mu$ *είναι πεπερασμένα (ισοδύναμα αν* $\int_E f d\mu \in \mathbb{R}$*). Γράφουμε τότε* $f \in \mathcal{L}(\mu)$ *στο* E *ή* $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$.

Παρατηρήσεις 9.2 (α) *Αν* f *μετρήσιμη,* $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) < \infty$ *και* $f|_E$ *φραγμένη, τότε* $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$.

(β) *Αν* f *μετρήσιμη,* $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) < \infty$ *και* $a \leq f(x) \leq b$ *για κάθε* $x \in E$, *τότε*

$$a\mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq b\mu(E).$$

(γ) *Αν* $f, g \in \mathcal{L}(E, \mu)$ *και* $f(x) \leq g(x)$ *για κάθε* $x \in E$, *τότε*

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

(δ) *Αν* $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ *και* $a \in \mathbb{R}$, *τότε* $af \in \mathcal{L}(E, \mu)$ *και* $\int_E af d\mu = a \int_E f d\mu$.
(ε) *Αν* f *μετρήσιμη και* $\mu(E) = 0$, *τότε* $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ *και* $\int_E f d\mu = 0$.
(στ) *Αν* $\mathcal{L}(E, \mu)$ *και* $A \in \mathcal{M}$, $A \subseteq E$, *τότε* $f \in \mathcal{L}(A, \mu)$.

Σκιαγράφηση απόδειξης (α) Αν $|f| \leq M$ στο E, τότε $f^+|_E \leq M$ και $f^-|_E \leq M$, άρα για κάθε απλή μετρήσιμη s με $0 \leq s \leq f^+$ έχουμε $0 \leq s \leq M$ στο E άρα $\int_E s d\mu \leq M\mu(E)$. Έπεται ότι $\int_E f^+ d\mu < \infty$. Ομοίως για την f^-.

(β) Έστω πρώτα $a > 0$. Τότε

(ι) Η συνάρτηση $a\chi_E$ είναι μη αρνητική απλή μετρήσιμη και $a\chi_E(x) \leq f(x)$ για κάθε $x \in E$ συνεπώς $\int_E a\chi_E d\mu \leq \int_E f d\mu$ άρα $a\mu(E) \leq \int_E f d\mu$.

(ιι) Κάθε μη αρνητική απλή μετρήσιμη συνάρτηση s με $s(x) \leq f(x)$ στο E ικανοποιεί $s(x) \leq b$ στο E άρα $\int_E s d\mu \leq b\mu(E)$ και συνεπώς (παίρνοντας sup ως προς s) $\int_E f d\mu \leq b\mu(E)$.

Αν $b < 0$ τότε εφαρμόζοντας τα προηγούμενα στην ανισότητα $0 < -b \leq -f(x) \leq -a$ αποδεικνύουμε τη ζητούμενη ανισότητα (διότι $\int_E f d\mu = -\int_E f^- d\mu$ αφού $f^+|_E = 0$).

Μένει η περίπτωση $a < 0 < b$. Έστω $E^+ = \{x \in E : f(x) \geq 0\}$. Τότε για κάθε $x \in E_+$ έχουμε $0 \leq f^+(x) = f(x) \leq b$, άρα από την προηγούμενη περίπτωση

$$0 \leq \int_E f^+ d\mu = \int_{E^+} f^+ d\mu = \int_{E^+} f d\mu \leq b\mu(E^+)$$

(διότι $f^+(x) = f(x)$ όταν $x \in E^+$ και $f^+(y) = 0$ όταν $y \in E \setminus E_+$). Επίσης για κάθε $x \in E \setminus E_+$ έχουμε $0 \geq -f^-(x) = f(x) \geq a$ άρα

$$a\mu(E \setminus E_+) \leq \int_{E \setminus E_+} f d\mu = -\int_{E \setminus E_+} f^- d\mu = -\int_E f^- d\mu \leq 0$$

(διότι $f^-(x) = -f(x)$ όταν $x \in E \setminus E_+$ και $f^-(y) = 0$ όταν $y \in E_+$). Προσθέτοντας κατά μέλη

$$a\mu(E) \leq a\mu(E \setminus E_+) \leq \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \leq b\mu(E^+) \leq b\mu(E).$$

(γ) Υποθέτω πρώτα ότι $f \geq 0$ (οπότε και $g \geq 0$ στο E). Τότε για κάθε απλή μετρήσιμη s με $0 \leq s \leq f$ έχουμε $0 \leq s \leq g$ στο E άρα $\int_E s d\mu \leq \int_E g d\mu$. Συνεπώς $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

Στην γενική περίπτωση, παρατηρώ ότι $f^+ \leq g^+$ και $f^- \geq g^-$. Πράγματι, αν $f^+(x) = 0$ τότε $f^+(x) = 0 \leq g^+(x)$, και αν $f^+(x) > 0$ τότε $f^+(x) = f(x) \leq g(x)$, άρα $g(x) > 0$ οπότε $g^+(x) = g(x) \geq f^+(x)$. Η ανισότητα $f^- \geq g^-$ προκύπτει ομοίως από τη σχέση $-g \leq -f$.

Από την προηγούμενη παράγραφο έχουμε λοιπόν $\int_E f^+ d\mu \leq \int_E g^+ d\mu$ και $\int_E f^- d\mu \geq \int_E g^- d\mu$ και επομένως

$$\int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \leq \int_E g^+ d\mu - \int_E g^- d\mu.$$

(δ) Η απόδειξη για $a \geq 0$ είναι εύκολη. Η σχέση $\int_E (-f) d\mu = -\int_E f d\mu$ αποδεικνύεται παρατηρώντας ότι $(-f)^+ = f^-$ και ότι $(-f)^- = f^+$.

Πρόταση 9.3 *Αν s απλή μετρήσιμη και $s \geq 0$, ορίζουμε*

$$\phi(A) = \int_A s d\mu \qquad (A \in \mathcal{M}).$$

Τότε η $\phi : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι σ-προσθετική συνολοσυνάρτηση.

Θα δείξουμε αργότερα ότι το συμπέρασμα ισχύει για οποιαδήποτε $f \in \mathcal{L}(\mu)$.

Απόδειξη της Πρότασης Αν $A_1, A_2, \ldots$ είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα και $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, πρέπει να δειχθεί ότι

$$\phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

Έστω πρώτα $s = \chi_E$, όπου $E \in \mathcal{M}$. Τότε

$$\begin{aligned} \phi(A) &= \int_A \chi_E d\mu = I_A(\chi_E) = \mu(A \cap E) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n) \end{aligned}$$

από την σ-προσθετικότητα του μ.

Γενικότερα αν $s = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{E_k}$ είναι σε κανονική μορφή τότε πάλι

$$\begin{aligned}\phi(A) &= \int_A s d\mu = I_A(s) = \sum_{k=1}^N c_k \mu(A \cap E_k) \\ &= \sum_{k=1}^N c_k \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n \cap E_k) = \sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^N c_k \mu(A_n \cap E_k) \right) = \sum_{n=1}^\infty \phi(A_n). \quad \square\end{aligned}$$

Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα του ολοκληρώματος Lebesgue σε σχέση με το ολοκλήρωμα Riemann σχετίζονται με την εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος, δηλαδή με το ερώτημα, σε ποιές περιπτώσεις ισχύει ότι

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int (\lim_n f_n) d\mu$$

(όταν το όριο $\lim_n f_n$ υπάρχει *κατά σημείο*).

Ας παρατηρήσουμε ότι η ισότητα αυτή δεν μπορεί να ισχύει ούτε για απλές συναρτήσεις (όπως θα δείξουμε με το επόμενο παράδειγμα) χωρίς κάποιες επιπλέον συνθήκες. Οι πιό σημαντικές τέτοιες συνθήκες είναι

(α) η ακολουθία (f_n) να είναι *μονότονη* (Θεώρημα 9.5 ή

(β) η ακολουθία (f_n) να *κυριαρχείται* από μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση g, δηλαδή να ισχύει $|f_n| \leq g$ για κάθε n (Θεώρημα 9.13).

Παράδειγμα 9.4 *Έστω $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$, δηλαδή $f_n(x) = n$ όταν $0 < x \leq \frac{1}{n}$ και $f_n(x) = 0$ αλλιώς. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αλλά $\int f_n(x)dx = 1$ για κάθε n, άρα $\int f_n(x)dx \nrightarrow 0$.*

Παρατηρούμε ότι εδώ δεν ικανοποιείται ούτε η συνθήκη (α) ούτε η (β).

Θεώρημα 9.5 (Μονότονης Σύγκλισης) *Αν (f_n) ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων ώστε $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$, τότε*

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int (\lim_n f_n) d\mu.$$

Απόδειξη Για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι αύξουσα και συνεπώς έχει όριο $f(x) \in [0, +\infty]$. Από την Πρόταση 8.6 η f είναι μετρήσιμη, και συνεπώς το $\int f d\mu$ υπάρχει (μπορεί να είναι $+\infty$). Επειδή $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, έχουμε $\int f_n d\mu \le \int f_{n+1} d\mu \le \int f d\mu$ (Παρατήρηση 9.2, (γ)). Επομένως το όριο $a \equiv \lim_n \int f_n d\mu$ υπάρχει (μπορεί να είναι ∞) και

$$a \le \int f d\mu.$$

Μένει να δειχθεί η αντίστροφη ανισότητα. Από τον ορισμό του $\int f d\mu$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε απλή μετρήσιμη συνάρτηση s με $0 \le s \le f$ ισχύει

$$\int s d\mu \le a.$$

Σταθεροποιούμε ένα $c \in (0,1)$ και θα δείξουμε ότι

$$c \int s d\mu \le a.$$

Θέτουμε

$$E_n = \{x \in X : f_n(x) \ge cs(x)\} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Παρατηρούμε ότι $E_n \in \mathcal{M}$ αφού η $f_n - cs$ είναι μετρήσιμη και $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ αφού $f_1 \le f_2 \le \ldots$.

Ισχυρισμός:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X.$$

Πράγματι, έστω $x \in X$. Αν $f(x) = 0$ τότε $s(x) = 0$ άρα $x \in E_n$ για κάθε n. Αν πάλι $f(x) > 0$ τότε $f(x) \ge s(x) > cs(x)$, οπότε εφόσον $f_n(x) \nearrow f(x)$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f_n(x) \ge cs(x)$, άρα $x \in E_n$. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Θεωρούμε το μέτρο ν που ορίζεται από τη σχέση

$$\nu(E) = \int_E s d\mu, \quad E \in \mathcal{M}$$

Έχουμε

$$c\nu(E_n) = c\int_{E_n} s d\mu = \int_{E_n} cs d\mu \le \int_{E_n} f_n d\mu \le \int f_n d\mu.$$

Όταν $n \to \infty$, έχουμε $\nu(E_n) \to \nu(X) = \int s d\mu$ από την σ-προσθετικότητα του ν (Πρόταση 9.3 και Πρόταση 7.2). Επίσης $\int f_n d\mu \to a$. Συνεπώς $c \int s d\mu \le a$. Αφού η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $c \in (0,1)$, θεωρώντας $c \nearrow 1$ προκύπτει

$$\int s d\mu \le a$$

για κάθε απλή μετρήσιμη συνάρτηση s με $0 \leq s \leq f$, και συνεπώς

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu : s \text{ απλή μετρήσιμη}, \ 0 \leq s \leq f \right\} \leq a$$

άρα τελικώς $\int f d\mu = a$. $\square$

Πόρισμα 9.6 *Αν f, g είναι μη αρνητικές και μετρήσιμες, τότε*

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Απόδειξη Περίπτωση (ι) $f, g \geq 0$, απλές: Εδώ το ολοκλήρωμα είναι ένα απλό άθροισμα, κι έτσι το ζητούμενο προκύπτει από την αντίστοιχη ιδιότητα του αθροίσματος. Συγκεκριμένα: Αν

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i} \qquad g = \sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{Fj}$$

όπου $\{E_i\}$ και $\{F_j\}$ είναι διαμερίσεις του X τότε

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i \chi_{E_i \cap F_j} \qquad g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_i \chi_{E_i \cap F_j}$$

$$\text{άρα} \qquad f + g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (c_i + d_j) \chi_{E_i \cap F_j}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} \int (f+g) d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (c_i + d_j) \mu(E_i \cap F_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_j \mu(E_i \cap F_j) = \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

Περίπτωση (ιι) $f, g \geq 0$ μετρήσιμες: υπάρχουν τότε αύξουσες ακολουθίες από απλές μετρήσιμες μη αρνητικές συναρτήσεις $(s_n), (t_n)$ με $s_n \nearrow f$ και $t_n \nearrow g$ (Πρόταση 8.6). Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε

$\int s_n d\mu \nearrow \int f d\mu$ και $\int t_n d\mu \nearrow \int g d\mu$. Επίσης $(s_n + t_n) \nearrow f + g$ οπότε $\int (s_n + t_n) d\mu \nearrow \int (f+g) d\mu$. Αλλά για κάθε n έχουμε $\int (s_n + t_n) d\mu = \int s_n d\mu + \int t_n d\mu$ από την Περίπτωση (ι), άρα

$$\int (f+g) d\mu = \lim \int (s_n + t_n) d\mu = \lim_n \left(\int s_n d\mu + \int t_n d\mu \right) = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Πρόταση 9.7 *Έστω* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *μετρήσιμη και* $E \in \mathcal{M}$. *Αν* $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ *τότε* $|f| \in \mathcal{L}(E, \mu)$ *και*

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

Απόδειξη Έχουμε $f^+ = \max(f, 0)$ και $f^- = -\min(f, 0)$ οπότε $|f| = f^+ + f^-$. Αν $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ τότε $\int_E f^+ d\mu < +\infty$ και $\int_E f^- d\mu < +\infty$ άρα $\int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu < +\infty$. Αλλά από το Πόρισμα 9.6

$$\int_E |f| d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < +\infty.$$

Επίσης,

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

$$\text{άρα} \qquad \int_E (-|f|) d\mu \leq \int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu$$

από την Παρατήρηση 9.2 (γ). Όμως από την ίδια παρατήρηση έχουμε $\int_E (-|f|) d\mu = -\int_E |f| d\mu$ άρα τελικά

$$-\int_E |f| d\mu \leq \int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu. \qquad \square$$

Πρόταση 9.8 *Έστω* f *μετρήσιμη,* $E \in \mathcal{M}$, $g \in \mathcal{L}(E, \mu)$ *και* $|f| \leq g$. *Τότε* $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$.

Απόδειξη Αφού $g \in \mathcal{L}(E, \mu)$ και $|f| \leq g$ έχουμε

$$\int_E |f| d\mu \leq \int_E g d\mu < +\infty.$$

Εφόσον $f^+ \leq |f|$ έχουμε $\int_E f^+ d\mu \leq \int_E |f| d\mu < +\infty$ (Παρατήρηση 9.2 (γ)) και για τον ίδιο λόγο $\int_E f^- d\mu \leq \int_E |f| d\mu < +\infty$. Συνεπώς $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$. $\square$

Θεώρημα 9.9 *Αν $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$, τότε $f+g \in \mathcal{L}(\mu)$ και*

$$\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Απόδειξη Αν $h = f+g$ έχουμε $|h| \leq |f| + |g|$ άρα, εφόσον

$$\int (|f| + |g|)d\mu = \int |f| d\mu + \int |g| d\mu < +\infty,$$

η συνάρτηση h είναι ολοκληρώσιμη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} h = h^+ - h^- &= f^+ - f^- + g^+ - g^- \\ \text{οπότε} \quad h^+ + f^- + g^- &= f^+ + g^+ + h^- \end{aligned}$$

όπου οι συναρτήσεις h^+, f^-, g^-, f^+, g^+, h^- είναι μη αρνητικές. Από το Πόρισμα 9.6,

$$\int h^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu + \int h^- d\mu.$$

Επειδή όλα τα ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα (διότι $f, g, h \in \mathcal{L}(\mu)$), έπεται ότι

$$\begin{aligned} \int h^+ d\mu - \int h^- d\mu &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \\ \text{άρα} \qquad \int h d\mu &= \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

Θεώρημα 9.10 (Beppo Levi) *Αν $f_n \geq 0$ μετρήσιμες και*[2] $f(x) \equiv \sum_n f_n(x)$, *τότε*

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Απόδειξη Θέτουμε $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_n$. Τότε κάθε g_n είναι μη αρνητική και μετρήσιμη και η ακολουθία (g_n) αυξάνεται προς την f, άρα από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης,

$$\int g_n d\mu \to \int f d\mu.$$

[2] το όριο της σειράς υπάρχει στο $[0, +\infty]$ γιατί η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσα

Αλλά από το Πόρισμα 9.6 επαγωγικά έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\int g_n d\mu = \int \sum_{k=1}^{n} f_n d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f_n d\mu$$

και συνεπώς

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int f_n d\mu = \int f d\mu. \qquad \square$$

Πόρισμα 9.11 *Αν f μετρήσιμη και $f \geq 0$ ή $f \in \mathcal{L}(X,\mu)$, τότε η συνολοσυνάρτηση ϕ όπου*

$$\phi(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{M}$$

είναι σ-προσθετικό μέτρο.

Απόδειξη Αν $A_1, A_2, \ldots$ είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα και $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, πρέπει να δειχθεί ότι

$$\phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

Θέτω $f_n = f\chi_{A_n}$, οπότε οι f_n είναι μετρήσιμες και $f = \sum_n f_n$ κατά σημείο. Παρατηρώ ότι

$$\int_X f_n d\mu = \int_{A_n} f d\mu.$$

Στην περίπτωση $f \geq 0$, εφαρμόζω το Θεώρημα Beppo Levi και έχω

$$\phi(A) = \int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

Στην περίπτωση $f \in \mathcal{L}(X,\mu)$ οι συναρτήσεις f^+ και f^- έχουν και οι δύο πεπερασμένα ολοκληρώματα και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Beppo Levi στις f^+ και f^- και το Θεώρημα 9.9 έχουμε

$$\begin{aligned}\phi(A) &= \int (f^+ - f^-) d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n^+ d\mu - \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n^- d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{A_n} f^+ d\mu - \int_{A_n} f^- d\mu \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n). \qquad \square\end{aligned}$$

Θεώρημα 9.12 (Λήμμα Fatou) *Αν (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων μη αρνητικών συναρτήσεων, τότε*[3]

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Απόδειξη Ορίζουμε

$$g_n(x) = \inf\{f_k(x) : k \geq n\} \quad (n \in \mathbb{N}, x \in X)$$

και παρατηρούμε ότι η (g_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων. Επομένως από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε

$$\int \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu.$$

Όμως $g_n \leq f_k$ όταν $k \geq n$ και συνεπώς $\int g_n d\mu \leq \int f_k d\mu$ για κάθε $k \geq n$, άρα $\displaystyle\int g_n d\mu \leq \inf_{k\geq n} \int f_k d\mu$ και συνεπώς

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \int f_k d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Επειδή $\lim\limits_n g_n = \liminf\limits_n f_n$ έχουμε τελικά

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \qquad \square$$

Θεώρημα 9.13 (Κυριαρχημένης Σύγκλισης) *Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει για κάθε $x \in X$ και έστω $f(x) = \lim_n f_n(x)$.*

Αν υπάρχει $g \in \mathcal{L}(\mu)$ ώστε[4] *$|f_n| \leq g$ για κάθε n, τότε $f \in \mathcal{L}(\mu)$ και*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

[3]υπενθύμιση: $\liminf\limits_n a_n = \lim\limits_n (\inf\{a_k : k \geq n\})$

[4]υπενθυμίζουμε ότι η υπόθεση $|f_n| \leq g$ δεν μπορεί εν γένει να παραλειφθεί

Απόδειξη Η f είναι μετρήσιμη διότι κάθε f_n είναι μετρήσιμη. Εφόσον $|f_n| \leq g$ και $g \in \mathcal{L}(\mu)$, έχουμε $f_n \in \mathcal{L}(\mu)$ (Πρόταση 9.8). Για τον ίδιο λόγο (εφόσον $|f| = \lim_n |f_n| \leq g$) έχουμε επίσης $f \in \mathcal{L}(\mu)$.

Παρατηρούμε ότι οι ακολουθίες $(g + f_n)$ και $(g - f_n)$ αποτελούνται από μετρήσιμες μη αρνητικές συναρτήσεις και ότι $g+f_n \to g+f$ και $g-f_n \to g-f$ κατά σημείο. Επομένως από το Λήμμα Fatou έχουμε

$$\begin{aligned} &\int (g+f)d\mu \leq \liminf_n \int (g+f_n)d\mu \\ \text{και} \qquad &\int (g-f)d\mu \leq \liminf_n \int (g-f_n)d\mu. \end{aligned}$$

Από την πρώτη σχέση έχουμε

$$\begin{aligned} \int g d\mu + \int f d\mu = \int (g+f)d\mu &\leq \liminf_n \int (g+f_n)d\mu \\ &= \int g d\mu + \liminf_n \int f_n d\mu \\ \text{οπότε} \quad \int f d\mu &\leq \liminf_n \int f_n d\mu \end{aligned}$$

και από τη δεύτερη

$$\begin{aligned} \int g d\mu - \int f d\mu = \int (g-f)d\mu &\leq \liminf_n \int (g-f_n)d\mu \\ &= \int g d\mu + \liminf_n \int (-f_n)d\mu \\ \text{οπότε} \quad -\int f d\mu &\leq \liminf_n \int (-f_n)d\mu \\ \text{άρα} \quad \int f d\mu &\geq \limsup_n \int f_n d\mu \end{aligned}$$

και συνεπώς[5]

$$\limsup_n \int f_n d\mu \leq \int f d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Κατά συνέπεια[6] το όριο $\lim\limits_n \int f_n d\mu$ υπάρχει και ισούται με $\int f d\mu$.

[5] επειδή $\limsup\limits_n a_n = \lim\limits_n \sup\{a_k : k \geq n\}$ έχουμε $\liminf\limits_n (-a_n) = -\limsup\limits_n a_n$

[6] αν $\limsup_n a_n \leq a \leq \liminf_n a_n$ τότε το όριο $\lim_n a_n$ υπάρχει και ισούται με a.

Για το τελευταίο συμπέρασμα παρατηρούμε ότι $|f_n - f| \to 0$ κατά σημείο και $|f_n - f| \leq 2g$, οπότε εφαρμόζοντας τα προηγούμενα στην ακολουθία $(|f_n - f|)$ προκύπτει ότι
$$\int |f_n - f| d\mu \to 0. \quad \square$$

Σύνολα μέτρου μηδέν

Παρατήρηση 9.14 *Αν f μετρήσιμη και $f \geq 0$ ή $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$, τότε για κάθε $A, B \in \mathcal{M}$ με $A \subseteq B$ και $\mu(B \setminus A) = 0$ ισχύει ότι*
$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu.$$

Απόδειξη Επειδή $B = A \cup (B \setminus A)$ και $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, από το Πόρισμα 9.11 έχουμε
$$\int_B f d\mu = \int_A f d\mu + \int_{B \setminus A} f d\mu.$$
Αλλά $\mu(B \setminus A) = 0$, άρα $\int_{B \setminus A} f d\mu = 0$ από την Παρατήρηση 9.2 (ε). $\square$

Ορισμός 9.4 *Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου και $E \in \mathcal{M}$. Θα λέμε ότι μια ιδιότητα $P(x)$ αληθεύει μ-**σχεδόν παντού στο E ή μ-σχεδόν για κάθε** $x \in E$ αν υπάρχει ένα μετρήσιμο υποσύνολο $A \subseteq E$ με $\mu(A) = 0$ ώστε η $P(x)$ να αληθεύει για κάθε $x \in E \setminus A$.*

Δύο μετρήσιμες συναρτήσεις f, g ταυτίζονται σχεδόν παντού αν και μόνον αν το σύνολο $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ έχει μέτρο μηδέν.

Σ'αυτή την περίπτωση η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν η g είναι ολοκληρώσιμη, και τότε τα ολοκληρώματά τους είναι ίσα.

Δηλαδή το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης δεν μεταβάλλεται, αν αλλάξουμε τις τιμές της σ'ένα σύνολο μηδενικού μέτρου.

Παρατήρηση 9.15 *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_E |f| d\mu = 0$ τότε η f μηδενίζεται σχεδόν παντού στο E (και αντίστροφα).*

Απόδειξη Αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ονομάσω
$$F_n = \{x \in E : |f(x)| > \frac{1}{n}\},$$

τότε κάθε F_n είναι μετρήσιμο και

$$\int_E |f| d\mu \geq \int_{F_n} |f| d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(F_n)$$

άρα $\mu(F_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $\mu(\cup_n F_n) = 0$. Αλλά

$$\bigcup_n F_n = \{x \in E : \text{υπάρχει } n \text{ ώστε } |f(x)| > \frac{1}{n}\} = \{x \in E : f(x) \neq 0\}$$

άρα η f μηδενίζεται σχεδόν παντού στο E. $\square$

Έπεται ότι δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ταυτίζονται σχεδόν παντού αν και μόνον αν $\int |f - g| d\mu = 0$.

Παρατηρούμε επίσης ότι μία μετρήσιμη συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν παίρνει σχεδόν παντού πραγματικές τιμές, δηλαδή αν και μόνον αν το σύνολο $\{x \in X : f(x) = +\infty\} \cup \{x \in X : f(x) = -\infty\}$ έχει μέτρο μηδέν. [*Απόδειξη: Άσκηση.*]

Επειδή τα σύνολα μέτρου μηδέν δεν συνεισφέρουν στην ολοκλήρωση, και επειδή η ένωση *αριθμήσιμου πλήθους* συνόλων μέτρου μηδέν έχει μέτρο μηδέν, τα περισσότερα αποτελέσματα που αναφέρονται σε ολοκλήρωση εξακολουθούν να ισχύουν αν στις υποθέσεις τους η φράση «για κάθε x» αντικατασταθεί από την φράση «μ-σχεδόν για κάθε x». Παραδείγματα αποτελούν τα Θεωρήματα Μονότονης σύγκλισης, Beppo Levi καθώς και το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης.