Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (2013–14)
1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις του Φυλλαδίου 1 ως την Τετάρτη 5 Φεβρουαρίου 2014.

1. Δείξτε ότι: για κάθε $-\pi \leq x \leq \pi$,

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx), \\ |x| &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}, \\ |\sin x| &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}. \end{aligned}$$

2. Δείξτε ότι:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} &= \frac{\pi^2}{12}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1} &= \frac{\pi-2}{4}. \end{aligned}$$

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$.
(α) Δείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|\, dx = 0.$$

[*Υπόδειξη*: εξετάστε πρώτα την περίπτωση που η f είναι συνεχής.]
(β) (Λήμμα Riemann–Lebesgue). Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx = -\int_0^{2\pi} f\big(x + \frac{\pi}{n}\big)\sin nx\, dx.$$

και συμπεράνατε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx = 0.$$

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση με

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' δείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx,$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(x) = a\cos x + b\sin x$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{R}$.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k(f')| + |b_k(f')|}{k}.$$

(β) Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\|f - s_n(f)\|_\infty = 0.$$

7. Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f) > 0$ ώστε $|k\widehat{f}(k)| \leq C(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(β) Εξετάστε αν $\lim\limits_{|k|\to\infty} |k\widehat{f}(k)| = 0$.

(γ) Εξετάστε αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$.

8. Έστω $0 < a \leq \pi$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$.

(α) Δείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \frac{a}{\pi}$ και $\widehat{f}(k) = \frac{\sin(ka)}{\pi k}$ αν $k \neq 0$.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$ ισχύει

$$f(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(γ) Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2}.$$

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, Riemann ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Δείξτε ότι:

(α) Αν $f(x + \pi) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε περιττό ακέραιο k.

(β) Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\widehat{f}(k)} = \hat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, δείξτε ότι ισχύει και το αντίστροφο.

10. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-περιοδικές συναρτήσεις, ολοκληρώσιμες στο $[0, 2\pi]$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx \ \cdot\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x)\, dx.$$