Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (2013–14)
3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Η παράδοση των ασκήσεων δεν απαιτείται, καλό είναι όμως να ασχοληθείτε με τις ασκήσεις του Φυλλαδίου 3 για την τελική εξέταση – μερικές από αυτές θα γίνουν στα τελευταία δύο μαθήματα.

1. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με tA το σύνολο $tA = \{tx \mid x \in A\}$. Δείξτε ότι $\mu^*(tA) = |t|\, \mu^*(A)$.

(β) Έστω $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ για κάθε $x, y \in B$. Δείξτε ότι
$$\mu^*(f(A)) \leq C\mu^*(A)$$
για κάθε $A \subseteq B$.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu(A) = 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $A' = \{x^2 \mid x \in A\}$ έχει επίσης μέτρο $\mu(A') = 0$.

Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα την περίπτωση όπου $A \subseteq [-M, M]$ για κάποιο $M > 0$.

2. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $0 < \mu^*(E) < +\infty$ και έστω $0 < \alpha < 1$. Δείξτε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα I με την ιδιότητα
$$\mu^*(E \cap I) > \alpha\, \ell(I).$$
Υπόδειξη: Υποθέστε το αντίθετο και, για τυχόν $\varepsilon > 0$, θεωρήστε ακολουθία διαστημάτων I_k με $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < \mu^*(E) + \varepsilon$.

3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο με $0 < \mu(A) < +\infty$.

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \mu(A \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο F με $F \subseteq A$ και $\mu(F) = \mu(A)/2$.

4. (α) Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε τα σύνολα
$$\limsup A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_n \text{ για άπειρα } n\}$$
και
$$\liminf A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ υπάρχει } n_0(x) \in \mathbb{N} \text{ ώστε } x \in A_n \text{ για κάθε } n \geq n_0(x)\}.$$
Δείξτε ότι
$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$
(β) Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

1. Τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα.
2. $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$ και αν $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) < +\infty$ τότε
$$\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n).$$
3. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$, τότε $\mu(\limsup A_n) = 0$.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το σύνολο
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$$
είναι σύνολο Borel.

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι
$$A = \bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{diam}\big[f\big(x - 1/n, x + 1/n\big)\big] < \frac{1}{k} \right\}.$$

6. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$$

είναι σύνολο Borel.

7. Έστω $\theta \in (0,1)$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με την διαφορά ότι στο n-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοιχτό διάστημα μήκους $\theta/3^n$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα. Καταλήγουμε σε ένα σύνολο C_θ «τύπου Cantor». Δείξτε ότι:

(α) Το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει ανοιχτά διαστήματα.
(β) Το C_θ είναι υπεραριθμήσιμο.
(γ) Το C_θ είναι μετρήσιμο και $\mu(C_\theta) = 1 - \theta > 0$.

8. (α) Δώστε παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης f με την ιδιότητα η f^2 να είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αν η f^2 είναι μετρήσιμη και το σύνολο $\{x \in A : f(x) > 0\}$ είναι μετρήσιμο, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το B είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in B\}$ είναι μετρήσιμο.

10. (α) Δείξτε ότι αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

(β) Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor–Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

11. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα.

(β) Δείξτε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subset [a,b]$ με $\mu(A) = 0$ ισχύει $\mu(f(A)) = 0$.

12. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

13. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $F : [0,\infty) \to [0,\infty]$ με $F(t) = \mu(\{f > t\})$. Δείξτε ότι η F είναι φθίνουσα, συνεχής από δεξιά, και $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$.

14. Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f \geq 1/n\}} f.$$

15. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f \leq n\}} f.$$

16. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\mu(E) < \infty$, ώστε

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Επιπλέον, δείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E.

17. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\mu(E) < \delta$ τότε $\int_E f < \varepsilon$.

18. Έστω (f_n) μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Είναι σωστό ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int \left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right);$$

Αν προσθέσουμε την υπόθεση ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη;

19. Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \leq f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$. Δείξτε ότι

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

20. Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f < \infty.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο E. Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει αν $\int f = \infty$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε τα $\int_E f$ και $\int_{E^c} f$.]

21. Έστω (f_n), (g_n) και g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leq g_n$, $f_n \to f$, $g_n \to g$ (όλα αυτά σχεδόν παντού) και ότι $\int g_n \to \int g$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int f_n \to \int f$.

22. Έστω (f_n), f ολοκληρώσιμες και έστω ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι $\int |f_n - f| \to 0$ αν και μόνο αν $\int |f_n| \to \int |f|$.

23. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και έστω $E_n = \{x : |f(x)| \geq n\}$. Δείξτε ότι $n\mu(E_n) \to 0$.

24. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $\int_A |f_n - f|\, d\mu \to 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι E_n, E είναι μετρήσιμα υποσύνολα του A και $\mu(E_n \triangle E) \to 0$. Δείξτε ότι

$$\int_{E_n} f_n d\mu \to \int_E f d\mu.$$

25. Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \mu(A) < \infty$. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μια γνησίως θετική μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι: για κάθε $t > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν E είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του A με $\mu(E) > t$, τότε

$$\int_E f\, d\mu \geq \delta.$$