Ανάλυση Fourier
και
Ολοκλήρωμα Lebesgue

Πρόχειρες Σημειώσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα, 2012

Περιεχόμενα

Μέρος I

Ανάλυση Fourier

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Η **σειρά Fourier** της f είναι η σειρά συναρτήσεων

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

όπου οι **συντελεστές Fourier** a_k και b_k της f ορίζονται από τις σχέσεις

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

και

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx, \qquad k = 1, 2, \dots.$$

Οι συναρτήσεις $f(x)\cos kx$ και $f(x)\sin kx$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες, συνεπώς οι συντελεστές a_k και b_k είναι καλά ορισμένοι. Επιπλέον, για κάθε k έχουμε

$$|a_k| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx \quad \text{και} \quad |b_k| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx.$$

Δηλαδή, οι ακολουθίες $\{a_k\}$ και $\{b_k\}$ είναι φραγμένες.

Το n-οστό **μερικό άθροισμα** της σειράς Fourier της f είναι η συνεχής συνάρτηση

$$s_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει στο πρώτο μέρος του μαθήματος είναι κατά πόσον «η ακολουθία $s_n(f)$ συγκλίνει στην f». Όπως θα φανεί στις επόμενες δύο εισαγωγικές παραγράφους, το ερώτημα έχει καταφατική απάντηση αν περιοριστούμε σε «καλές συναρτήσεις» ή αν θεωρήσουμε «κατάλληλη έννοια σύγκλισης».

1.1 Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Ορισμός 1.1.1 (τριγωνομετρικά πολυώνυμα)**.** Πραγματικό **τριγωνομετρικό πολυώνυμο** είναι κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων $\cos kx$ και $\sin kx$. Δηλαδή, κάθε συνάρτηση της μορφής

$$T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx), \tag{1.1.1}$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_k, \mu_k \in \mathbb{R}$. Ο βαθμός του T είναι ο μικρότερος $n \geq 0$ για τον οποίο το T έχει μια αναπαράσταση αυτής της μορφής. Συμβολίζουμε με $\mathcal{T}_n$ την κλάση όλων των τριγωνομετρικών πολυωνύμων που έχουν βαθμό μικρότερο ή ίσο από n. Παρατηρήστε ότι ο $\mathcal{T}_n$ είναι γραμμικός υπόχωρος του χώρου των συνεχών 2π-περιοδικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Παρατήρηση 1.1.2. Κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο $T(x)$ βαθμού n είναι πολυώνυμο των $\cos x$ και $\sin x$ βαθμού n. Δηλαδή, υπάρχει πολυώνυμο (δύο μεταβλητών) $p(t, s)$ βαθμού n ώστε

$$T(x) = p(\cos x, \sin x). \tag{1.1.2}$$

Η παρατήρηση αυτή είναι άμεση συνέπεια του ακόλουθου λήμματος.

Λήμμα 1.1.3. *Για κάθε $n \geq 1$, οι συναρτήσεις $\cos nx$ και $(\sin(n+1)x)/\sin x$ είναι πολυώνυμα του $\cos x$ βαθμού n.*

Απόδειξη. Δείχνουμε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geq 1$ υπάρχουν $a_{0,n}, \ldots, a_{n-1,n} \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\cos nx = 2^{n-1}\cos^n x + \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,n}\cos^j x. \tag{1.1.3}$$

Παρατηρήστε ότι η (1.1.3) ισχύει τετριμμένα για $n = 1$, ενώ για $n = 2$ γνωρίζουμε ότι

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$$

Υποθέτουμε ότι η (1.1.3) ισχύει για το $\cos kx$, όπου $k \geq 2$. Από την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos[(k+1)x] + \cos[(k-1)x] = 2\cos kx \cos x \tag{1.1.4}$$

παίρνουμε

$$\cos(k+1)x \quad = \quad 2\cos kx\cos x - \cos(k-1)x$$

$$= \quad 2\cos x\left(2^{k-1}\cos^k x+\sum_{j=0}^{k-1}a_{j,k}\cos^j x\right)-2^{k-2}\cos^{k-1}x-\sum_{j=0}^{k-2}a_{j,k-1}\cos^j x$$

$$= \quad 2^k\cos^{k+1}x+\sum_{j=0}^{k}a_{j,k+1}\cos^j x$$

για κατάλληλους $a_{j,k+1}\in\mathbb{R}$. Για τον δεύτερο ισχυρισμό του λήμματος, χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin[(k+1)x]-\sin[(k-1)x]=2\cos kx\sin x \tag{1.1.5}$$

δείχνουμε επαγωγικά ότι, για κάθε $n\geq 1$,

$$\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}=2^n\cos^n x+\sum_{j=0}^{n-1}a_{j,n}\cos^j x \tag{1.1.6}$$

για κατάλληλους $a_{j,n}\in\mathbb{R}$ (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση). □

Παρατήρηση 1.1.4. Θεωρούμε το σύνολο

$$B=\{1,\cos x,\cos^2 x,\dots,\cos^n x,\sin x,\sin x\cos x,\dots,\sin x\cos^{n-1}x\}. \tag{1.1.7}$$

Από το Λήμμα 1.1.3 έχουμε

$$\mathcal{T}_n\subseteq \mathrm{span}(B), \tag{1.1.8}$$

όπου $\mathrm{span}(B)$ είναι ο γραμμικός χώρος που παράγεται από το B. Ειδικότερα, η διάσταση $\dim(\mathcal{T}_n)$ του $\mathcal{T}_n$ είναι μικρότερη ή ίση από $2n+1$, κάτι που είναι φανερό και από το γεγονός ότι

$$\mathcal{T}_n=\mathrm{span}(A), \tag{1.1.9}$$

όπου

$$A=\{1,\cos x,\cos 2x,\dots,\cos nx,\sin x,\dots,\sin nx\}. \tag{1.1.10}$$

Παρατηρήστε ότι $\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)=2n+1$ (με $\mathrm{card}(X)$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου X). Θα δείξουμε ότι το A είναι γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο. Έπεται ότι το A είναι μία βάση του $\mathcal{T}_n$ και ότι $\dim(\mathcal{T}_n)=2n+1$. Επιπλέον, αφού $\mathrm{span}(B)\supseteq\mathcal{T}_n$ και $\dim(\mathrm{span}(B))\leq 2n+1$, συμπεραίνουμε ότι, τελικά,

$$\mathcal{T}_n=\mathrm{span}(B)=\mathrm{span}(A).$$

Ειδικότερα, κάθε πολυώνυμο του $\cos x$, βαθμού μικρότερου ή ίσου από n, ανήκει στην κλάση $\mathcal{T}_n$.

Ορισμός 1.1.5 (εσωτερικό γινόμενο)**.** Έστω $f,g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ δύο Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Ορίζουμε

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,dx \tag{1.1.11}$$

και

$$\|f\|_2=\langle f,f\rangle^{1/2}=\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx\right)^{1/2}. \tag{1.1.12}$$

Από την ανισότητα Cauchy–Schwarz έχουμε

$$|\langle f,g\rangle|\leq\|f\|_2\|g\|_2. \tag{1.1.13}$$

Παρατηρήστε επίσης ότι $\langle g,f\rangle=\langle f,g\rangle$ και $\langle\lambda f+\mu g,h\rangle=\lambda\langle f,h\rangle+\mu\langle g,h\rangle$ αν οι f,g,h είναι Riemann ολοκληρώσιμες και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Πρόταση 1.1.6 (σχέσεις ορθογωνιότητας)**.** *Ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) *Αν $m,n=0,1,2,\dots$ και $m\neq n$ τότε*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\;dx=0.$$

(ii) *Αν $m,n=1,2,\dots$ και $m\neq n$ τότε*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\;dx=0.$$

(iii) *Αν $m=0,1,2,\dots$ και $n=1,2,\dots$ τότε*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\;dx=0.$$

(iv) *Αν $m,n=1,2,\dots$ τότε*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\;dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\;dx=1.$$

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση. Χρησιμοποιήστε τις ταυτότητες

$$\begin{aligned}2\cos\theta\cos\phi &= \cos(\theta-\phi)+\cos(\theta+\phi),\\ 2\sin\theta\cos\phi &= \sin(\theta+\phi)+\sin(\theta-\phi),\\ 2\sin\theta\sin\phi &= \cos(\theta-\phi)-\cos(\theta+\phi),\end{aligned}$$

και τις $2\cos^2\theta=1+\cos 2\theta$, $2\sin^2\theta=1-\cos 2\theta$. □

Πρόταση 1.1.7. *Το σύνολο* $A = \{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \sin x, \ldots, \sin nx\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι αν

$$T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx) \equiv 0, \tag{1.1.14}$$

τότε

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \mu_1 = \cdots = \mu_n = 0. \tag{1.1.15}$$

Αυτό προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 1.1.6. Για παράδειγμα, για κάθε $m = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 = \langle T, \sin mx\rangle &= \lambda_0 \langle 1, \sin mx\rangle + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \langle \cos kx, \sin mx\rangle + \mu_k \langle \sin kx, \sin mx\rangle) \\ &= \mu_m \langle \sin mx, \sin mx\rangle = \mu_m, \end{aligned}$$

διότι $\langle \cos kx, \sin mx\rangle = 0$ για κάθε $0 \leq k \leq n$ και $\langle \sin kx, \sin mx\rangle = 0$ για κάθε $1 \leq k \leq n$, $k \neq m$. Όμοια δείχνουμε ότι $\lambda_m = 0$ για κάθε $m = 0, 1, \ldots, n$. □

Ορισμός 1.1.8. Για κάθε φραγμένη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [-\pi, \pi]\}. \tag{1.1.16}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass (μια απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα Γ).

Θεώρημα 1.1.9. *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση. Για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει πολυώνυμο* p *ώστε*

$$\|f - p\|_\infty = \max\{|f(x) - p(x)| : x \in [a, b]\} < \varepsilon. \tag{1.1.17}$$

Ισοδύναμα, υπάρχει ακολουθία $\{p_m\}$ *πολυωνύμων ώστε* $\|f - p_m\|_\infty \to 0$.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.1.9 θα δείξουμε ότι η κλάση $\mathcal{T}$ όλων των τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι «πυκνή» στον χώρο των συνεχών 2π-περιοδικών συναρτήσεων:

Θεώρημα 1.1.10. *Έστω* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *συνεχής* 2π*-περιοδική συνάρτηση. Για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο* T *ώστε*

$$\|f - T\|_\infty = \max\{|f(x) - T(x)| : x \in \mathbb{R}\} < \varepsilon. \tag{1.1.18}$$

Ισοδύναμα, υπάρχει ακολουθία $\{T_m\}$ *τριγωνομετρικών πολυωνύμων ώστε* $\|f - T_m\|_\infty \to 0$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα τον ισχυρισμό του θεωρήματος, κάνοντας την επιπλέον υπόθεση ότι η f είναι άρτια: δηλαδή, $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$g(y) = f(\arccos y). \tag{1.1.19}$$

Η g είναι καλά ορισμένη, διότι $\arccos y \in [0, \pi]$ για κάθε $y \in [-1, 1]$, και συνεχής, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Από το Θεώρημα 1.1.9, υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|g - p\|_\infty < \varepsilon$. Δηλαδή,

$$|f(\arccos y) - p(y)| < \varepsilon \tag{1.1.20}$$

για κάθε $y \in [-1, 1]$. Ορίζουμε $T(x) = p(\cos x)$. Το T είναι πολυώνυμο του $\cos x$, άρα $T \in \mathcal{T}$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in [0, \pi]$ υπάρχει $y \in [-1, 1]$ ώστε $y = \cos x$, και τότε,

$$|f(x) - T(x)| = |f(x) - p(\cos x)| = |f(\arccos y) - p(y)| < \varepsilon. \tag{1.1.21}$$

Αφού οι f και T είναι άρτιες συναρτήσεις, έπεται ότι

$$\|f - T\|_\infty = \max\{|f(x) - T(x)| : -\pi \leq x \leq \pi\} < \varepsilon, \tag{1.1.22}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

Για την γενική περίπτωση, θεωρούμε τυχούσα συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ορίζουμε

$$f_1(x) = f(x) + f(-x) \quad \text{και} \quad f_2(x) = [f(x) - f(-x)] \sin x. \tag{1.1.23}$$

Παρατηρήστε ότι οι f_1 και f_2 είναι άρτιες, συνεχείς και 2π-περιοδικές. Άρα, μπορούμε να βρούμε τριγωνομετρικά πολυώνυμα T_1 και T_2 ώστε

$$\|f_1 - T_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad \|f_2 - T_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.1.24}$$

Αν θέσουμε

$$T_3(x) = \frac{1}{2}(T_1(x) \sin^2 x + T_2(x) \sin x), \tag{1.1.25}$$

τότε $T_3 \in \mathcal{T}$ και, για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned} |2f(x) \sin^2 x - 2T_3(x)| &= |f_1(x) \sin^2 x + f_2(x) \sin x - T_1(x) \sin^2 x - T_2(x) \sin x| \\ &\leq |(f_1(x) - T_1(x)) \sin^2 x| + |(f_2(x) - T_2(x)) \sin x| \\ &\leq |f_1(x) - T_1(x)| + |f_2(x) - T_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, αν ορίσουμε $f_3(x) = f(x) \sin^2 x$ τότε

$$\|f_3 - T_3\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.1.26}$$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $g(x) := f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Η g είναι συνεχής και 2π-περιοδική. Συνεπώς, ο ίδιος συλλογισμός δείχνει ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο T_4 ώστε, για τη συνάρτηση $f_4(x) = g(x)\sin^2 x$ να ισχύει $\|f_4 - T_4\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Αν ορίσουμε $T_5(x) = T_4(x+\pi/2)$, τότε το T_5 είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο (εξηγήστε γιατί) και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν θέσουμε $y = x + \pi/2$ έχουμε

(1.1.27)
$$|f(x)\cos^2 x - T_5(x)| = |f(x)\cos^2 x - T_4(x+\pi/2)| = |f(y-\pi/2)\sin^2 y - T_4(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνεπώς,

$$\|f_5 - T_5\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.1.28}$$

όπου $f_5(x) = f(x)\cos^2 x$.

Παρατηρήστε ότι $f = f_3 + f_5$, διότι $f(x) = f(x)\sin^2 x + f(x)\cos^2 x$. Ορίζουμε $T = T_3 + T_5$. Τότε, $T \in \mathcal{T}$ και

$$\|f - T\|_\infty = \|(f_3+f_5) - (T_3+T_5)\|_\infty \leq \|f_3 - T_3\|_\infty + \|f_5 - T_5\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{1.1.29}$$

Αυτό αποδεικνύει το Θεώρημα. □

Πόρισμα 1.1.11. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση με την ιδιότητα*

$$a_k(f) = b_k(f) = 0 \tag{1.1.30}$$

για κάθε k. Τότε, $f \equiv 0$.

Απόδειξη. Από την υπόθεση και από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος είναι φανερό ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T(x)\,dx = 0 \tag{1.1.31}$$

για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο T. Από το Θεώρημα 1.1.10 υπάρχει ακολουθία $\{T_m\}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων ώστε $\|f - T_m\|_\infty \to 0$. Τότε, για κάθε m έχουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_m(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(f(x) - T_m(x))\,dx. \tag{1.1.32}$$

Άρα,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_\infty \|f - T_m\|_\infty dx = 2\pi \|f\|_\infty \|f - T_m\|_\infty \to 0. \tag{1.1.33}$$

Έπεται ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 0, \tag{1.1.34}$$

και, αφού η f είναι συνεχής, συμπεραίνουμε ότι $f \equiv 0$. □

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο υπολογίζοντας τη σειρά Fourier ενός τριγωνομετρικού πολυωνύμου

$$T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx).$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.1.6 ελέγχουμε εύκολα ότι: για κάθε $k = 1, \dots, n$ είναι

$$a_k(T) = \langle T, \cos kx \rangle = \lambda_k \langle \cos kx, \cos kx \rangle = \lambda_k, \tag{1.1.35}$$

ενώ, αν $k > n$ έχουμε

$$a_k(T) = \langle T, \cos kx \rangle = 0. \tag{1.1.36}$$

Όμοια, για κάθε $k = 1, \dots, n$ είναι

$$b_k(T) = \langle T, \sin kx \rangle = \mu_k \langle \sin kx, \sin kx \rangle = \mu_k, \tag{1.1.37}$$

ενώ, αν $k > n$ έχουμε

$$b_k(T) = \langle T, \sin kx \rangle = 0. \tag{1.1.38}$$

Τέλος,

$$a_0(T) = 2\lambda_0. \tag{1.1.39}$$

Έπεται ότι, για κάθε $m \geq n$,

$$\begin{aligned} s_m(T)(x) &= \frac{a_0(T)}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k(T) \cos kx + b_k(T) \sin kx) \\ &= \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx) \\ &= T(x). \end{aligned}$$

Δηλαδή, η σειρά Fourier του T ταυτίζεται με το T:

Πρόταση 1.1.12. *Έστω T τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n. Για κάθε $m \geq n$ έχουμε*

$$s_m(T) \equiv T. \tag{1.1.40}$$

Συνεπώς,

$$S[T] \equiv T. \tag{1.1.41}$$

Η Πρόταση 1.1.12 δείχνει ότι το πρόβλημα της σύγκλισης της σειράς Fourier $S[f]$ στην f έχει καταφατική απάντηση στην περίπτωση που η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο: αν το n ξεπεράσει τον βαθμό του τριγωνομετρικού πολυωνύμου f τότε ήδη έχουμε $s_n(f) \equiv f$. Από την άλλη πλευρά, το Θεώρημα 1.1.10 δείχνει ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι $\|\cdot\|_\infty$-πυκνά στις συνεχείς συναρτήσεις. Αυτό ενισχύει την ελπίδα ότι το πρόβλημα της σύγκλισης της $S[f]$ στην f μπορεί να έχει καταφατική απάντηση για μια κλάση συναρτήσεων ευρύτερη από αυτήν των τριγωνομετρικών πολυωνύμων.

1.2 L^2-σύγκλιση: μια εισαγωγή

Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Θα εξετάσουμε αν $s_n(f) \to f$ ως προς την $\|\cdot\|_2$. Δηλαδή, αν

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n(f)\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(f)(x))^2 dx = 0.$$

Η απάντηση είναι καταφατική και βασίζεται στο επόμενο λήμμα, το οποίο αποδεικνύει ότι το n-οστό μερικό άθροισμα $s_n(f)$ της σειράς Fourier της f είναι το πλησιέστερο προς την f τριγωνομετρικό πολυώνυμο της κλάσης $\mathcal{T}_n$ αν θεωρήσουμε την $\|\cdot\|_2$-απόσταση.

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $n \geq 0$,*

$$\|f - s_n(f)\|_2 = \min\{\|f - T\|_2 : T \in \mathcal{T}_n\}. \tag{1.2.1}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχόν $T \in \mathcal{T}_n$. Τότε,

$$T(x) = \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx) \tag{1.2.2}$$

για κάποιους $\lambda_k, \mu_k \in \mathbb{R}$. Γράφουμε

$$\|f - T\|_2^2 = \langle f - T, f - T\rangle = \|f\|_2^2 - 2\langle f, T\rangle + \|T\|_2^2. \tag{1.2.3}$$

Υπολογίζουμε τα $\langle f, T\rangle$ και $\|T\|_2^2$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle f, T\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T(x)\,dx \\
&= \frac{\lambda_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx + \mu_k \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right) \\
&= \frac{\lambda_0 a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k(f) + \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k(f).
\end{aligned}$$

Αν στη θέση της f βάλουμε το T, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $a_k(T) = \lambda_k$ και $b_k(T) = \mu_k$ παίρνουμε

$$\|T\|_2^2 = \langle T, T\rangle = \frac{\lambda_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 + \sum_{k=1}^n \mu_k^2. \tag{1.2.4}$$

Αν θεωρήσουμε σαν T το $s_n(f)$, χρησιμοποιώντας την $\langle f, T\rangle = \frac{\lambda_0 a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k(f) + \sum_{k=1}^n \mu_k b_k(f)$ αλλά και την (1.2.4), έχουμε

$$\langle f, s_n(f)\rangle = \|s_n(f)\|_2^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2. \tag{1.2.5}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|f - T\|_2^2 &= \|f\|_2^2 + \frac{\lambda_0^2 - 2\lambda_0 a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n (\lambda_k^2 - 2\lambda_k a_k(f)) + \sum_{k=1}^n (\mu_k^2 - 2\mu_k b_k(f)) \\
&= \|f\|_2^2 + \frac{(\lambda_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^n (\lambda_k - a_k)^2 + \sum_{k=1}^n (\mu_k - b_k)^2 \\
&\quad - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)\right) \\
&\geq \|f\|_2^2 - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)\right) \\
&= \|f\|_2^2 - \|s_n(f)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\lambda_k = a_k$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$ και $\mu_k = b_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Δηλαδή, αν $T \equiv s_n(f)$. Δηλαδή, δείξαμε ότι

$$\|f - s_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|s_n(f)\|_2^2 \leq \|f - T\|_2^2 \tag{1.2.6}$$

για κάθε $T \in \mathcal{T}_n$. □

Σημείωση. Στην πορεία της απόδειξης του προηγούμενου θεωρήματος είδαμε ότι

$$s_n(f)\|_2^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2),$$

δηλαδή η ακολουθία $(\|s_n(f)\|_2)$ είναι αύξουσα. Επίσης,

$$\|f\|_2^2 - \|s_n(f)\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 \geq 0.$$

Αυτή είναι η πολύ βασική ανισότητα του Bessel:

Θεώρημα 1.2.2 (ανισότητα Bessel)**.** *Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $n \geq 0$ ισχύει η ανισότητα*

$$\|s_n(f)\|_2^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leq \|f\|_2^2, \tag{1.2.7}$$

όπου $a_k = a_k(f)$ και $b_k = b_k(f)$ είναι οι συντελεστές Fourier της f. Συνεπώς,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \|f\|_2^2. \tag{1.2.8}$$

Πόρισμα της ανισότητας του Bessel είναι το γεγονός ότι οι ακολουθίες $\{a_k(f)\}$ και $\{b_k(f)\}$ είναι μηδενικές.

Θεώρημα 1.2.3 (Λήμμα Riemann–Lebesgue)**.** *Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε,*

$$\lim_{k\to\infty} a_k(f) = \lim_{k\to\infty} b_k(f) = 0. \tag{1.2.9}$$

Απόδειξη. Από την ανισότητα του Bessel βλέπουμε ότι οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$$

συγκλίνουν. Είναι τώρα άμεσο ότι οι ακολουθίες $\{a_k\}$ και $\{b_k\}$ συγκλίνουν στο 0. □

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η ανισότητα (1.2.8) είναι στην πραγματικότητα ισότητα (ταυτότητα του Parseval). Αποδεικνύουμε αυτόν τον ισχυρισμό ξεκινώντας από την κλάση των συνεχών συναρτήσεων.

Πρόταση 1.2.4. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, 2π-περιοδική συνάρτηση. Τότε,*

$$\|f\|_2^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2). \tag{1.2.10}$$

Απόδειξη. Ξεκινώντας από την $\|f - s_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|s_n(f)\|_2^2$, αν δείξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n(f)\|_2 = 0, \tag{1.2.11}$$

θα συμπεράνουμε ότι

$$\|f\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \|s_n(f)\|_2^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2). \tag{1.2.12}$$

Θα βασιστούμε στο Θεώρημα 1.1.10. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο T ώστε

$$\|f - T\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}. \tag{1.2.13}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \|f - T\|_2 &= \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f - T\|_\infty^2 dx\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{2}\|f - T\|_\infty < \varepsilon. \end{aligned}$$

Έστω n_0 ο βαθμός του T. Από το Θεώρημα 1.2.1 έπεται ότι

$$\|f - s_{n_0}(f)\|_2 \leq \|f - T\|_2 < \varepsilon. \tag{1.2.14}$$

Παρατηρώντας τώρα ότι, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$\|s_n(f)\|_2^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n_0}(a_k^2 + b_k^2) = \|s_{n_0}(f)\|_2^2, \tag{1.2.15}$$

γράφουμε

$$\|f - s_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|s_n(f)\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 - \|s_{n_0}(f)\|_2^2 = \|f - s_{n_0}(f)\|_2^2, \tag{1.2.16}$$

δηλαδή, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\|f - s_n(f)\|_2 \leq \|f - s_{n_0}(f)\|_2 < \varepsilon. \tag{1.2.17}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\|f - s_n(f)\|_2 \to 0$. □

Για να περάσουμε στην κλάση των Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, χρησιμοποιούμε το εξής προσεγγιστικό Λήμμα.

Λήμμα 1.2.5. *Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ και $g(-\pi) = g(\pi)$ ώστε $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$. Μπορούμε να βρούμε διαμέριση $P = \{-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = \pi\}$ του $[-\pi, \pi]$ ώστε $U(f, P) - L(f, P) < \delta$. Συμβολίζουμε με f^* την κλιμακωτή συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

$$f^*(x) = \sup_{x_{j-1} \leq y \leq x_j} f(y), \qquad x \in [x_{j-1}, x_j), \quad 1 \leq j \leq N. \tag{1.2.18}$$

Από τον τρόπο ορισμού της f^* έχουμε $|f^*| \leq \|f\|_\infty$. Επιπλέον,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - f(x)|\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f^*(x) - f(x))\, dx < \delta. \tag{1.2.19}$$

Πράγματι,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f^*(x) - f(x))\, dx = U(f,P) - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \leq U(f,P) - L(f,P) < \delta. \tag{1.2.20}$$

Τροποποιούμε τώρα την f^* ώστε να πάρουμε μια συνεχή συνάρτηση g με $g(-\pi) = g(\pi)$ η οποία να προσεγγίζει κι αυτή την f με την έννοια του λήμματος. Για αρκετά μικρό $\eta > 0$, θέτουμε $g(x) = f^*(x)$ αν η απόσταση του x από καθένα από τα σημεία $x_0, \ldots, x_N$ είναι $\geq \eta$. Στην η-περιοχή του x_j για $j = 1, \ldots, N-1$, ορίζουμε την g να είναι η γραμμική συνάρτηση που ικανοποιεί τις $g(x_j \pm \eta) = f^*(x_j \pm \eta)$. Κοντά στο $x_0 = -\pi$, παίρνουμε την g γραμμική με $g(-\pi) = 0$ και $g(-\pi + \eta) = f^*(-\pi + \eta)$. Όμοια, κοντά στο $x_N = \pi$, παίρνουμε την g γραμμική με $g(\pi) = 0$ και $g(\pi - \eta) = f^*(\pi - \eta)$.

Αφού $g(-\pi) = g(\pi)$, μπορούμε να επεκτείνουμε την g σε μια συνεχή περιοδική συνάρτηση σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Η απόλυτη τιμή αυτής της επέκτασης παραμένει φραγμένη από $\|f\|_\infty$. Επιπλέον, η g διαφέρει από την f^* μόνο στα $N+1$ διαστήματα μήκους 2η ή η γύρω από τα $x_0, \ldots, x_N$. Συνεπώς,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - g(x)|\, dx \leq 2BN \cdot 2\eta. \tag{1.2.21}$$

Αν επιλέξουμε το η αρκετά μικρό, παίρνουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - g(x)|\, dx < \delta. \tag{1.2.22}$$

Η τριγωνική ανισότητα μας δίνει

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx < 2\delta. \tag{1.2.23}$$

Παρατηρώντας ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2\, dx \leq 2\|f\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx, \tag{1.2.24}$$

βλέπουμε ότι μπορούμε να πετύχουμε

$$\|f - g\|_2 < \varepsilon \tag{1.2.25}$$

αν επιλέξουμε το $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε $\frac{1}{2\pi}(2\delta)(2\|f\|_\infty) < \varepsilon^2$ – εξηγήστε τους τελευταίους ισχυρισμούς. □

Θεώρημα 1.2.6 (ταυτότητα του Parseval). *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Τότε,*

$$\|f\|_2^2 := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2). \tag{1.2.26}$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το Λήμμα 1.2.5 υπάρχει συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση g ώστε $\|f-g\|_2 < \varepsilon/3$. Τότε,

$$\|f - s_n(f)\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g - s_n(g)\|_2 + \|s_n(g) - s_n(f)\|_2. \tag{1.2.27}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\|s_n(g) - s_n(f)\|_2 = \|s_n(g-f)\|_2 \leq \|g-f\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.2.28}$$

Συνεπώς,

$$\|f - s_n(f)\|_2 < \frac{2\varepsilon}{3} + \|g - s_n(g)\|_2. \tag{1.2.29}$$

Από την Πρόταση 1.2.4 έχουμε $\|g - s_n(g)\|_2 \to 0$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, $\|g - s_n(g)\|_2 < \varepsilon/3$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $\|f - s_n(f)\|_2 < \varepsilon$. Αυτό δείχνει ότι $\|f - s_n(f)\|_2 \to 0$, δηλαδή $\|s_n(f)\|_2^2 \to \|f\|_2^2$ και έπεται το Θεώρημα. □

Η ταυτότητα του Parseval μας δίνει μια δεύτερη απόδειξη του Πορίσματος 1.1.11:

Πόρισμα 1.2.7. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση με την ιδιότητα $a_k(f) = b_k(f) = 0$ για κάθε k. Τότε, $f \equiv 0$.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση και από την ταυτότητα του Parseval έπεται ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 0. \tag{1.2.30}$$

Αφού η f είναι συνεχής, συμπεραίνουμε ότι $f \equiv 0$. □

Μια πολύ χρήσιμη εφαρμογή αυτού του αποτελέσματος είναι το ακόλουθο κριτήριο για την ομοιόμορφη σύγκλιση της $S[f]$ στην f.

Θεώρημα 1.2.8. *Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. Υποθέτουμε ότι*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|) < +\infty. \tag{1.2.31}$$

Τότε, η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Δηλαδή,

$$s_n(f) \xrightarrow{\text{ομ}} f. \tag{1.2.32}$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση ότι $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f)| + |b_k(f)|) < +\infty$ και από το κριτήριο του Weierstrass βλέπουμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$s_n(f)(x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ και

$$g(x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx), \qquad x \in [-\pi, \pi]. \tag{1.2.33}$$

Παρατηρήστε ότι: για κάθε $k \geq 0$ και για κάθε $n \geq k$ έχουμε

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(f)(x) \cos kx dx = a_k(f), \tag{1.2.34}$$

και, για κάθε $k \geq 1$ και για κάθε $n \geq k$ έχουμε

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(f)(x) \sin kx dx = b_k(f). \tag{1.2.35}$$

Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της $s_n(f)$ στην g έπεται ότι, για κάθε $k \geq 0$,

$$a_k(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos kx \, dx = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(f)(x) \cos kx \, dx = a_k(f). \tag{1.2.36}$$

και, όμοια, για κάθε $k \geq 1$,

$$b_k(g) = b_k(f). \tag{1.2.37}$$

Αφού οι συνεχείς συναρτήσεις f και g έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier, το Πόρισμα 1.2.7 δείχνει ότι $g \equiv f$. Συνεπώς, $s_n(f) \xrightarrow{\text{ομ}} f$. $\square$

1.3 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Δείξτε ότι:

(α) Αν το T είναι περιττή συνάρτηση, τότε $\lambda_k = 0$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$.

(β) Αν το T είναι άρτια συνάρτηση, τότε $\mu_k = 0$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.

2. Δείξτε ότι: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυώνυμο $p(t)$ βαθμού $2k$ ώστε $\sin^{2k} x = p(\cos x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. Αποδείξτε πλήρως την Πρόταση 1.1.6: οι συναρτήσεις $1, \cos x, \ldots, \cos nx, \sin x, \ldots, \sin nx$ είναι ορθογώνιες.

4. Ορίζουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < 2\pi$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, και επεκτείνουμε την f σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S[f](x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Ομάδα Β′

5. Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ ώστε $|g(x)| \leq \|f\|_\infty$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ και

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon.$$

6. Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ ώστε $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $\|f - h\|_2 < \varepsilon$.

(γ) Δείξτε ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο T ώστε $\|f - T\|_2 < \varepsilon$.

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Δείξτε ότι

$$\lim_{t \to 0} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^2 dx = 0.$$

8. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$S[f](x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση με

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' δείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx,$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(x) = a \cos x + b \sin x$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{R}$.

Ομάδα Γ′

10. (α) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \sin jx.$$

Δείξτε ότι: αν $k > m$ τότε

$$|A_k(x) - A_m(x)| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) Αν $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$, δείξτε ότι

$$\left| \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j \sin jx \right| \leq \frac{\lambda_{m+1}}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $n \geq k > m \geq 1$ και για κάθε $0 < x < \pi$.

11. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $M > 0$. Αν $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ και $k\lambda_k \leq M$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, δείξτε ότι

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sin kx \right| \leq (\pi + 1)M$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [*Υπόδειξη:* Μπορείτε να υποθέσετε ότι $0 < x < \pi$. Γράψτε, αν θέλετε,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sin kx = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sin kx + \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k \sin kx,$$

όπου $m = \min\{N, \lfloor \pi/x \rfloor\}$.]

12. Έστω $0 < \alpha \leq 1$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{\alpha}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε, για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$|a_k(f)| \leq \frac{C}{k^{\alpha}} \qquad \text{και} \qquad |b_k(f)| \leq \frac{C}{k^{\alpha}}.$$

Κεφάλαιο 2

Σειρές Fourier

2.1 Μιγαδική μορφή και παραδείγματα

Ορισμός 2.1.1 (μιγαδικές συναρτήσεις στον μοναδιαίο κύκλο)**.** Συμβολίζουμε με $\mathbb{T}$ τον μοναδιαίο κύκλο

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}. \tag{2.1.1}$$

Αν $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι μια συνάρτηση με μιγαδικές τιμές, ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

$$f(\theta) = F(e^{i\theta}). \tag{2.1.2}$$

Παρατηρήστε ότι η f είναι 2π-περιοδική. Αντίστροφα, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι μια 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε η $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με $F(e^{i\theta}) = f(\theta)$ είναι καλά ορισμένη (πράγματι, αν $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ για κάποιους $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ τότε $\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$ για κάποιον ακέραιο k, άρα $f(\theta_1) = f(\theta_2)$ από την 2π-περιοδικότητα της f). Έχουμε λοιπόν μια $1-1$ αντιστοιχία ανάμεσα στις συναρτήσεις $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ και τις 2π-περιοδικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Με βάση αυτήν την αντιστοιχία, λέμε ότι η F είναι ολοκληρώσιμη αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο (άρα σε κάθε) διάστημα μήκους 2π, η F είναι συνεχής αν η f είναι συνεχής, η F είναι παραγωγίσιμη αν η f είναι παραγωγίσιμη, η F είναι συνεχώς παραγωγίσιμη αν η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ούτω καθεξής.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση, τότε η f γράφεται στην μορφή $f = u + iv$, όπου $u(x) = \mathrm{Re}(f(x))$ και $v(x) = \mathrm{Im}(f(x))$, $x \in [a,b]$. Λέμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν οι u, v είναι Riemann ολοκληρώσιμες, και ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx. \tag{2.1.3}$$

Θα χρησιμοποιούμε συχνά το εξής: αν η $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{2.1.4}$$

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = Re^{i\theta_0}, \quad \text{όπου } R=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \text{ και } \theta_0\in\mathbb{R},$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| &= e^{-i\theta_0}\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b e^{-i\theta_0}f(x)\,dx\\ &= \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta_0}f(x))\,dx \leq \int_a^b |e^{-i\theta_0}f(x)|\,dx\\ &= \int_a^b |f(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Ορισμός 2.1.2 (σειρά Fourier)**.** Έστω $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ ορίζουμε τον k-οστό **συντελεστή Fourier** της f μέσω της

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx. \tag{2.1.5}$$

Από την (2.1.4) έχουμε

$$|\widehat{f}(k)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx \leq \|f\|_\infty, \tag{2.1.6}$$

χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $|e^{-ikx}|=1$. Συνεπώς, η ακολουθία $\{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι φραγμένη.

Η **σειρά Fourier** της f είναι η σειρά συναρτήσεων

$$S[f](x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)e^{ikx}. \tag{2.1.7}$$

Το n**-οστό μερικό άθροισμα** της σειράς Fourier της f είναι το μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$s_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ikx}. \tag{2.1.8}$$

Γενικά, με τον όρο **μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο** εννοούμε κάθε συνάρτηση της μορφής

$$T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \tag{2.1.9}$$

όπου $n \geq 0$ και $c_k \in \mathbb{C}$, $|k| \leq n$.

Αν $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, θεωρούμε την $f(\theta) = F(e^{i\theta})$ και ορίζουμε τους συντελεστές Fourier της f μέσω του περιορισμού της f στο $[-\pi, \pi]$, χρησιμοποιώντας την (2.1.5).

Παρατήρηση 2.1.3 (σύνδεση με τα προηγούμενα)**.** Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Γενικεύοντας τους ορισμούς της Παραγράφου 1.1, για κάθε $k \geq 0$ ορίζουμε

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \tag{2.1.10}$$

και για κάθε $k \geq 1$ ορίζουμε

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx. \tag{2.1.11}$$

Παρατηρήστε ότι: αν $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx - i \, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{a_k(f) - ib_k(f)}{2}, \tag{2.1.12}$$

και

$$\widehat{f}(-k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx + i \, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{a_k(f) + ib_k(f)}{2}. \tag{2.1.13}$$

Επίσης,

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{a_0(f)}{2}. \tag{2.1.14}$$

Παίρνουμε έτσι την εξής Πρόταση.

Πρόταση 2.1.4. *Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ισχύουν οι*

$$a_k(f) = \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k) \ \text{ και } \ b_k(f) = i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)). \tag{2.1.15}$$

Επίσης, $a_0(f) = 2\widehat{f}(0)$ *και*

$$s_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx). \tag{2.1.16}$$

Δηλαδή, ο νέος ορισμός μας για το n*-οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της* f *συμφωνεί με αυτόν της Παραγράφου* 1.1.

Απόδειξη. Οι ισότητες $a_0(f) = 2\widehat{f}(0)$, $a_k(f) = \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k)$ και $b_k(f) = i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k))$ προκύπτουν άμεσα από τις (2.1.12), (2.1.13) και (2.1.14). Για την (2.1.16) γράφουμε

$$\begin{aligned}
s_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} + \sum_{k=-n}^{-1} \widehat{f}(k)e^{ikx} \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} + \sum_{k=1}^{-n} \widehat{f}(-k)e^{-ikx} \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)(\cos kx + i\sin kx) + \sum_{k=1}^{-n} \widehat{f}(-k)(\cos kx - i\sin kx) \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k))\cos kx + \sum_{k=1}^{n} i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k))\sin kx \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx),
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την (2.1.15). □

Το βασικό λοιπόν πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι το εξής: αν $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, ή ισοδύναμα, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα μήκους 2π, θα εξετάσουμε αν η ακολουθία $s_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}$ «συγκλίνει» στην f.

Παραδείγματα

(α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(\theta) = \theta$ στο $[-\pi, \pi)$ και την επεκτείνουμε σε 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Η f είναι προφανώς ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές Fourier της f. Αφού η f είναι περιττή, έχουμε

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \theta \, d\theta = 0. \tag{2.1.17}$$

Για κάθε $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta e^{-ik\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta\left[-\frac{e^{-ik\theta}}{ik}\right]' d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\,\frac{-\theta e^{-ik\theta}}{ik}\,\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ik\theta}}{ik}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\,\frac{-\pi e^{-ik\pi} - \pi e^{ik\pi}}{ik} = -\frac{1}{2k}\,\frac{e^{ik\pi}+e^{-ik\pi}}{i} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{ik}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ik\theta}}{ik}\,d\theta = 0$. Έπεται ότι

(2.1.18)
$$S[f](\theta) = \sum_{k\neq 0}\frac{(-1)^{k+1}}{ik}e^{ik\theta} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}e^{ik\theta} - (-1)^{-k+1}e^{-ik\theta}}{ik} = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin k\theta}{k}.$$

Θα μπορούσε κανείς, εναλλακτικά, να παρατηρήσει πρώτα ότι $a_k(f) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, διότι η f είναι περιττή. Αυτό σημαίνει ότι

(2.1.19)
$$S[f](\theta) = \sum_{k\neq 0} b_k(f)\sin k\theta.$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη, ακριβώς όπως παραπάνω, μπορείτε να υπολογίσετε τους συντελεστές $b_k(f)$ και να καταλήξετε πάλι στην (2.1.18).

(β) **Ο πυρήνας του Dirichlet**. Έστω $n \geq 0$. Ο n-οστός **πυρήνας Dirichlet** είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

(2.1.20)
$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}, \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

Παρατηρήστε ότι $D_n(0) = 2n+1$. Θα δείξουμε ότι: αν $0 < |x| \leq \pi$,

(2.1.21)
$$D_n(x) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin(x/2)}.$$

Για τον σκοπό αυτό, θέτουμε $\omega = e^{ix}$ και γράφουμε

(2.1.22)
$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\omega^k + \sum_{k=-n}^{-1}\omega^k = \sum_{k=0}^{n}\omega^k + \sum_{k=1}^{n}(1/\omega)^k.$$

Παρατηρήστε ότι

(2.1.23)
$$\sum_{k=0}^{n}\omega^k = \frac{1-\omega^{n+1}}{1-\omega},$$

και

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\omega}\right)^k=\frac{1}{\omega}\,\frac{1-\omega^{-n}}{1-\frac{1}{\omega}}=\frac{\omega^{-n}-1}{1-\omega}. \tag{2.1.24}$$

Συνεπώς,

$$D_n(x)=\frac{\omega^{-n}-\omega^{n+1}}{1-\omega}=\frac{e^{-inx}-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}=\frac{e^{ix/2}}{e^{ix/2}}\,\frac{e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}-e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{-ix/2}-e^{ix/2}}, \tag{2.1.25}$$

απ' όπου προκύπτει η (2.1.21). Ο πυρήνας του Dirichlet εμφανίζεται πολύ φυσιολογικά στη μελέτη του βασικού μας προβλήματος. Αρκεί να παρατηρήσετε ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier μιας συνάρτησης f αναπαρίστανται ως εξής:

$$\begin{aligned} s_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ikx}=\sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)e^{-iky}dy\right)e^{ikx}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\left(\sum_{k=-n}^{n}e^{ik(x-y)}\right)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)D_n(x-y)\,dy. \end{aligned}$$

Στην Παράγραφο 2.3 και σε επόμενες Παραγράφους θα συζητήσουμε αυτό το θέμα διεξοδικά.

2.2 Μοναδικότητα σειρών Fourier

Στις παραγράφους §1.1 και §1.2 είδαμε ότι αν μια συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει όλους τους συντελεστές $a_k(f)$ και $b_k(f)$ ίσους με μηδέν, τότε $f\equiv 0$. Σε αυτήν την παράγραφο δείχνουμε το ακόλουθο ισχυρότερο θεώρημα μοναδικότητας.

Θεώρημα 2.2.1. *Εστω $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $\widehat{f}(k)=0$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$. Αν η f είναι συνεχής στο σημείο $\theta_0\in\mathbb{T}$ τότε $f(\theta_0)=0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f παίρνει πραγματικές τιμές. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f ορίζεται στο $[-\pi,\pi]$ και ότι $\theta_0=0$. [Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση: αν η f είναι συνεχής στο θ_0, τότε η $g(x)=f(x+\theta_0)$ είναι συνεχής στο 0 – υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της g.]

Θα υποθέσουμε ότι $f(0)>0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο (τελείως ανάλογα αποκλείουμε την περίπτωση $f(0)<0$). Η ιδέα είναι να ορίσουμε κατάλληλη ακολουθία $\{p_m\}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων τα οποία παρουσιάζουν «κορυφή» στο σημείο 0 και από αυτήν τους την ιδιότητα να συμπεράνουμε ότι

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}p_m(\theta)f(\theta)\,d\theta=+\infty.$$

Αυτό είναι προφανώς άτοπο, αφού η υπόθεση ότι $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ δείχνει ότι όλα τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι ίσα με 0 (εξηγήστε γιατί).

Αρχικά, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, είναι φραγμένη συνάρτηση: υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(\theta)| \leq M$ για κάθε $\theta \in [-\pi, \pi]$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της συνέχειας για την f στο σημείο 0, βρίσκουμε $0 < \delta < \pi/2$ ώστε $f(\theta) > f(0)/2$ για κάθε $\theta \in (-\delta, \delta)$.

Παρατηρούμε ότι $\cos\theta \leq \cos\delta < 1$ αν $\delta \leq |\theta| \leq \pi$. Συνεπώς, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε

$$|\varepsilon + \cos\theta| < 1 - \varepsilon/2 \tag{2.2.1}$$

για κάθε $\delta \leq |\theta| \leq \pi$. Αρκεί να επιλέξουμε $0 < \varepsilon < \frac{2(1-\cos\delta)}{3}$. Τότε, αν $\varepsilon + \cos\theta \geq 0$ έχουμε $|\varepsilon + \cos\theta| = \varepsilon + \cos\theta \leq \varepsilon + \cos\delta < 1 - \varepsilon/2$ από την επιλογή του ε, ενώ αν $\varepsilon + \cos\theta < 0$ έχουμε $|\varepsilon + \cos\theta| = -\cos\theta - \varepsilon \leq 1 - \varepsilon < 1 - \varepsilon/2$.

Ορίζουμε

$$p(\theta) = \varepsilon + \cos\theta, \qquad \theta \in [-\pi, \pi]. \tag{2.2.2}$$

Τότε, $p(0) = 1 + \varepsilon$, συνεπώς υπάρχει $0 < \eta < \delta$ ώστε

$$p(\theta) \geq 1 + \varepsilon/2, \qquad \theta \in (-\eta, \eta). \tag{2.2.3}$$

Τώρα, για κάθε $m = 1, 2, \ldots$, ορίζουμε

$$p_m(\theta) = [p(\theta)]^m = (\varepsilon + \cos\theta)^m. \tag{2.2.4}$$

Παρατηρήστε ότι κάθε p_m είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο (εξηγήστε γιατί). Αφού $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_m(\theta) f(\theta)\, d\theta = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.2.5}$$

Γράφουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_m(\theta) f(\theta)\, d\theta = \int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} p_m(\theta) f(\theta)\, d\theta + \int_{\eta \leq |\theta| < \delta} p_m(\theta) f(\theta)\, d\theta + \int_{|\theta| < \eta} p_m(\theta) f(\theta)\, d\theta, \tag{2.2.6}$$

και παρατηρούμε ότι:

(i) Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\left| \int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} p_m(\theta) f(\theta)\, d\theta \right| \leq 2\pi M (1 - \varepsilon/2)^m \to 0 \tag{2.2.7}$$

όταν $m \to \infty$.

(ii) Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int_{\eta\leq|\theta|<\delta} p_m(\theta)f(\theta)\,d\theta \geq 0 \tag{2.2.8}$$

διότι $p(\theta) \geq 0$ και $f(\theta) \geq 0$ στο $\{\theta : \eta \leq |\theta| < \delta\}$. Για την πρώτη ανισότητα παρατηρήστε ότι $p(\theta) = \varepsilon + \cos\theta \geq \varepsilon + \cos\delta > 0$ διότι $0 < \delta < \pi/2$.

(iii) Για το τρίτο ολοκλήρωμα ισχύει το κάτω φράγμα

$$\int_{|\theta|<\eta} p_m(\theta)f(\theta)\,d\theta \geq 2\eta\frac{f(0)}{2}(1+\varepsilon/2)^m. \tag{2.2.9}$$

Αφού

$$\lim_{m\to\infty}(1+\varepsilon/2)^m = +\infty, \tag{2.2.10}$$

συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} p_m(\theta)f(\theta)\,d\theta = +\infty. \tag{2.2.11}$$

Έτσι, οδηγούμαστε σε άτοπο στην περίπτωση που η f παίρνει πραγματικές τιμές.

Στην γενική περίπτωση που η f παίρνει τιμές στο $\mathbb{C}$, γράφουμε $f(\theta) = u(\theta) + iv(\theta)$, όπου οι u και v είναι ολοκληρώσιμες πραγματικές συναρτήσεις. Αν θέσουμε $g(\theta) = \overline{f(\theta)}$, έχουμε

$$u(\theta) = \frac{f(\theta)+g(\theta)}{2} \quad\text{και}\quad v(\theta) = \frac{f(\theta)-g(\theta)}{2i}. \tag{2.2.12}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\widehat{g}(k) = \overline{\widehat{f}(k)} = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.2.13}$$

Έπεται ότι

$$\widehat{u}(k) = \frac{\widehat{f}(k)+\widehat{g}(k)}{2} = 0 \qquad \text{και} \qquad \widehat{v}(k) = \frac{\widehat{f}(k)-\widehat{g}(k)}{2i} = 0 \tag{2.2.14}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο θ_0. Από την συνέχεια των u και v στο θ_0, από το γεγονός ότι οι συντελεστές Fourier των u και v μηδενίζονται και από το αποτέλεσμα στην πραγματική περίπτωση, συμπεραίνουμε ότι $u(\theta_0) = v(\theta_0) = 0$. Άρα, $f(\theta_0) = u(\theta_0) + iv(\theta_0) = 0$. $\square$

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.2.1 είναι η εξής Πρόταση (που έχουμε ήδη συζητήσει στην πραγματική περίπτωση):

Θεώρημα 2.2.2 (μοναδικότητα σειρών Fourier). *Αν η $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής και $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$.* □

Ένα πόρισμα του θεωρήματος μοναδικότητας είναι η καταφατική απάντηση στο ερώτημα της σημειακής (και μάλιστα ομοιόμορφης) σύγκλισης της $s_n(f)$ στην f αν η σειρά των συντελεστών Fourier της f συγκλίνει απολύτως.

Θεώρημα 2.2.3. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty. \tag{2.2.15}$$

Τότε, η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Δηλαδή,

$$s_n(f) \xrightarrow{\text{ομ}} f. \tag{2.2.16}$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση ότι $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$ βλέπουμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$s_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} \tag{2.2.17}$$

είναι ομοιόμορφα βασική: πράγματι, για κάθε $m > n$ έχουμε

$$\|s_m(f) - s_n(f)\|_\infty = \max_{x\in\mathbb{T}} |s_m(f)(x) - s_n(f)(x)| \leq \sum_{n<|k|\leq m} |\widehat{f}(k)| \to 0 \tag{2.2.18}$$

όταν $m, n \to \infty$. Συνεπώς, η $\{s_n(f)\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Δηλαδή, η

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}, \qquad x \in \mathbb{T} \tag{2.2.19}$$

ορίζεται καλά και είναι συνεχής. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και για κάθε $n \geq |k|$, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(f)(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(j)e^{i(j-k)x}dx = \widehat{f}(k), \tag{2.2.20}$$

διότι $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)x}dx = 0$ αν $j \neq k$. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της $s_n(f)$ στην g έπεται ότι

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(f)(x)e^{-ikx}dx = \widehat{f}(k). \tag{2.2.21}$$

Αφού οι συνεχείς συναρτήσεις f και g έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier, από το Θεώρημα 2.2.2 συμπεραίνουμε ότι $g \equiv f$. Συνεπώς, $s_n(f) \xrightarrow{\text{ομ}} f$. □

Ένα φυσιολογικό ερώτημα που προκύπτει από το Θεώρημα 2.2.3 είναι να δοθούν ικανές συνθήκες ώστε η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|$ να συγκλίνει: αυτό εξασφαλίζει, όπως είδαμε, την ομοιόμορφη σύγκλιση της $S[f]$ στην f. Είναι σχετικά εύκολο να δει κανείς ότι αν η f είναι αρκετά λεία (π.χ. δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη) τότε οι συντελεστές Fourier «φθίνουν αρκετά γρήγορα»:

Πρόταση 2.2.4. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο – γράφουμε $f \in C^2(\mathbb{T})$. Τότε, υπάρχει σταθερά $C = C(f) > 0$ ώστε*

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C(f)}{k^2}, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{2.2.22}$$

Έπεται ότι $s_n(f) \xrightarrow{\text{ομ}} f$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $k \neq 0$ και ολοκληρώνουμε κατά μέρη: γράφουμε

$$\begin{aligned}
2\pi \widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta \\
&= \left[f(\theta) \, \frac{-e^{-ik\theta}}{ik} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) e^{-ik\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) e^{-ik\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{ik} \left[f'(\theta) \, \frac{-e^{-ik\theta}}{ik} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{(ik)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(\theta) e^{-ik\theta} d\theta \\
&= -\frac{1}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(\theta) e^{-ik\theta} d\theta,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι, αφού οι f και f' είναι 2π-περιοδικές,

$$\left[f(\theta) \, \frac{-e^{-ik\theta}}{ik} \right]_{-\pi}^{\pi} = \left[f'(\theta) \, \frac{-e^{-ik\theta}}{ik} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0. \tag{2.2.23}$$

Συνεπώς,

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{k^2} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(\theta) \, d\theta \right| \leq \frac{C(f)}{k^2}, \tag{2.2.24}$$

όπου

$$C(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(\theta)| \, d\theta. \tag{2.2.25}$$

Ο τελευταίος ισχυρισμός της Πρότασης έπεται από το Θεώρημα 2.2.3 και από το γεγονός ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$. □

Παρατήρηση 2.2.5. Στην πορεία της απόδειξης της Πρότασης 2.2.4 είδαμε ότι ισχύουν τα εξής:
(α) Αν η $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{ik}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta)e^{-ik\theta}d\theta = \frac{1}{ik}\widehat{f}'(k) \tag{2.2.26}$$

για κάθε $k \neq 0$. Από την περιοδικότητα της f είναι φανερό ότι

$$2\pi\widehat{f}'(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) = f(\pi) - f(-\pi) = 0. \tag{2.2.27}$$

Συνεπώς,

$$\widehat{f}'(k) = ik\widehat{f}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.2.28}$$

(α) Αν η $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε

$$\widehat{f}(k) = -\frac{1}{k^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(\theta)e^{-ik\theta}d\theta = -\frac{1}{k^2}\widehat{f}'(k) \tag{2.2.29}$$

για κάθε $k \neq 0$. Από την περιοδικότητα της f' είναι φανερό ότι

$$2\pi\widehat{f''}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f''(\theta) = f'(\pi) - f'(-\pi) = 0. \tag{2.2.30}$$

Συνεπώς,

$$\widehat{f''}(k) = -k^2\widehat{f}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.2.31}$$

Παρατήρηση 2.2.6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Είδαμε ότι αν $f \in C^2(\mathbb{T})$ τότε $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$. Όπως θα δούμε αργότερα, η σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|$ εξασφαλίζεται και με ασθενέστερες υποθέσεις για την f. Αρκεί να υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Ακόμα ασθενέστερη ικανή συνθήκη για την σύγκλιση της $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|$ είναι η f να ικανοποιεί **συνθήκη Hölder τάξης** $\alpha > 1/2$: δηλαδή, να υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{\alpha} \tag{2.2.32}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

2.3 Συνελίξεις και καλοί πυρήνες

Αν f και g είναι 2π-περιοδικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, η **συνέλιξη** $f*g$ των f και g ορίζεται στο $[-\pi,\pi]$ μέσω της

$$(f*g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)g(x-y)\,dy. \tag{2.3.1}$$

Η τιμή της συνάρτησης είναι καλά ορισμένη για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$, αφού το γινόμενο ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Η συνέλιξη μπορεί να ιδωθεί σαν «μέσος με βάρη». Για παράδειγμα, αν $g\equiv 1$ τότε η $f*g$ είναι σταθερή, με τιμή

$$(f*1)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\,dy. \tag{2.3.2}$$

Δηλαδή, ισούται με τη μέση τιμή της f στο $[-\pi,\pi]$. Από μια άλλη οπτική γωνία, η συνέλιξη $(f*g)(x)$ συχνά αντικαθιστά, υπό μία έννοια, το κατά σημείο γινόμενο $f(x)g(x)$ των f και g.

Οι συνελίξεις μπαίνουν στη μελέτη μας μέσω της παρατήρησης ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier μιας συνάρτησης f αναπαρίστανται ως εξής:

$$\begin{aligned} s_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ikx}=\sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)e^{-iky}dy\right)e^{ikx}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\left(\sum_{k=-n}^{n}e^{ik(x-y)}\right)dy=(f*D_n)(x),\end{aligned}$$

όπου D_n είναι ο n-οστός πυρήνας του Dirichlet, που ορίζεται από την σχέση

$$D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}. \tag{2.3.3}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι για την κατανόηση των μερικών αθροισμάτων $s_n(f)$ αρκεί να μελετήσουμε την συνέλιξη $f*D_n$.

Στην επόμενη πρόταση παραθέτουμε τις βασικές ιδιότητες των συνελίξεων.

Πρόταση 2.3.1. *Έστω f,g και $h:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ολοκληρώσιμες 2π-περιοδικές συναρτήσεις. Τότε:*

(i) $f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$.

(ii) $(cf)*g=c(f*g)=f*(cg)$ *για κάθε* $c\in\mathbb{C}$.

(iii) $f*g=g*f$.

(iv) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

(v) *Η* $f * g$ *είναι συνεχής.*

(vi) $\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$.

Οι πρώτες τέσσερις προτάσεις περιγράφουν τις αλγεβρικές ιδιότητες των συνελίξεων: γραμμικότητα, μεταθετικότητα και προσεταιριστικότητα. Η πέμπτη πρόταση δείχνει ότι η συνέλιξη $f * g$ δύο συναρτήσεων είναι «πιο ομαλή» από τις f και g. Η $f * g$ είναι συνεχής ενώ οι f και g είναι απλώς ολοκληρώσιμες κατά Riemann. Τέλος, η έκτη πρόταση παίζει πολύ βασικό ρόλο στη μελέτη των σειρών Fourier. Γενικά, οι συντελεστές Fourier του γινομένου fg δύο συναρτήσεων δεν είναι γινόμενα των αντίστοιχων συντελεστών Fourier των f και g. Αν όμως αντικαταστήσουμε το γινόμενο των f και g με την συνέλιξή τους $f * g$, τότε έχουμε αυτήν την σχέση.

Απόδειξη. Οι ιδιότητες (i) και (ii) προκύπτουν άμεσα από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος.

Οι υπόλοιπες ιδιότητες αιτιολογούνται εύκολα αν κάνουμε την πρόσθετη υπόθεση ότι οι f και g είναι συνεχείς. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά της ολοκλήρωσης. Για την απόδειξη της (iii), σταθεροποιούμε $x \in \mathbb{R}$ και, χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $u = x - y$, γράφουμε

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,dy = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)g(u)\,du.$$

Αφού οι f, g είναι 2π-περιοδικές, η συνάρτηση $F(u) = f(x-u)g(u)$ είναι επίσης 2π-περιοδική. Συνεπώς,

$$\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)g(u)\,du = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u)\,du. \tag{2.3.4}$$

Τότε,

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u)f(x-u)\,du = (g * f)(x). \tag{2.3.5}$$

Η (iv) αποδεικνύεται κι αυτή με αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης και κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
[(f * g) * h](x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(y)h(x-y)\,dy \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(y-t)h(x-y)\,dt\,dy \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(y-t)h(x-y)\,dy\,dt \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \int_{-\pi}^{\pi} g(y-t)h((x-t)-(y-t))\,dy\,dt.
\end{aligned}$$

Η συνάρτηση $G(u) = g(u)h(x-t-u)$ είναι 2π-περιοδική. Με την αλλαγή μεταβλητής $u = y-t$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y-t)h((x-t)-(y-t))\,dy &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-t}^{\pi-t} g(u)h(x-t-u)\,du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)h(x-t-u)\,du = (g*h)(x-t).\end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στην προηγούμενη σχέση παίρνουμε

$$[(f*g)*h](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(g*h)(x-t)\,dt = [f*(g*h)](x).$$

Για την απόδειξη της (vi) γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f*g)(x)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,dy\right)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)e^{-ik(x-y)}dx\right)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}dx\right)dy \\ &= \widehat{f}(k)\widehat{g}(k).\end{aligned}$$

Τέλος, δείχνουμε ότι αν οι f και g είναι συνεχείς, τότε η $f*g$ είναι συνεχής. Αρχικά, γράφουμε

$$(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)[g(x_1-y)-g(x_2-y)]\,dy. \tag{2.3.6}$$

Αφού η g είναι συνεχής, είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα. Όμως, η g είναι ταυτόχρονα περιοδική, συνεπώς είναι ομοιόμορφα συνεχής σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Αν μας δώσουν κάποιο $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε: αν $|s-t| < \delta$ τότε $|g(s)-g(t)| < \varepsilon$. Αν υποθέσουμε ότι $|x_1-x_2| < \delta$, τότε έχουμε $|(x_1-y)-(x_2-y)| < \delta$ για κάθε y, συνεπώς

$$\begin{aligned}|(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2)| &\leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(y)[g(x_1-y)-g(x_2-y)]\,dy\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)|\,|g(x_1-y)-g(x_2-y)|\,dy \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)|\,dy \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}2\pi\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η $f * g$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχής. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της Πρότασης, με την πρόσθετη υπόθεση ότι οι f και g είναι συνεχείς.

Στην γενική περίπτωση, όπου οι f και g υποτίθενται απλώς ολοκληρώσιμες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα που έχουμε αποδείξει ως τώρα (για συνεχείς f και g), σε συνδυασμό με το επόμενο λήμμα προσέγγισης.

Λήμμα 2.3.2. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπάρχει ακολουθία $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ συνεχών συναρτήσεων στον $\mathbb{T}$ ώστε*

$$\|f_m\|_\infty \leq \|f\|_\infty, \quad \text{για κάθε } m = 1, 2, \ldots, \tag{2.3.7}$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_m(x)|\, dx \to 0, \qquad \text{όταν } m \to \infty. \tag{2.3.8}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f παίρνει πραγματικές τιμές (στην γενική περίπτωση, εφαρμόζουμε το ίδιο επιχείρημα χωριστά για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f). Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.2.5, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε συνεχή $f_m : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ώστε $\|f_m\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ και

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_m(x)|\, dx < \frac{1}{m}. \tag{2.3.9}$$

Τότε, η ακολουθία $\{f_m\}$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. □

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα, ολοκληρώνουμε την απόδειξη της πρότασης ως εξής. Εφαρμόζουμε το Λήμμα και παίρνουμε ακολουθίες $\{f_m\}$ και $\{g_m\}$ συνεχών συναρτήσεων με $\|f_m\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ και $\|g_m\|_\infty \leq \|g\|_\infty$, οι οποίες προσεγγίζουν τις f και g αντίστοιχα. Τότε,

$$f * g - f_m * g_m = (f - f_m) * g + f_m * (g - g_m). \tag{2.3.10}$$

Από τις ιδιότητες της ακολουθίας $\{f_m\}$,

$$\begin{aligned} |(f - f_m) * g(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f_m(x-y)|\, |g(y)|\, dy \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \|g\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |f(y) - f_m(y)|\, dy \\ &\to 0 \qquad \text{όταν } m \to \infty. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $(f - f_m) * g \to 0$ ομοιόμορφα ως προς x. Όμοια,

$$|(f_m * (g - g_m))(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_m(y)|\, |g(x-y) - g_m(x-y)|\, dy$$

$$\begin{aligned}
&\le \frac{1}{2\pi}\|f_m\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |g(y)-g_m(y)|\,dy\\
&\le \frac{\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(y)-g_m(y)|\,dy\\
&\to 0 \qquad \text{όταν } m\to\infty,
\end{aligned}$$

δηλαδή $f_m * (g-g_m) \to 0$ ομοιόμορφα, συνεπώς $f_m * g_m \to f * g$ ομοιόμορφα. Αφού οι $f_m * g_m$ είναι συνεχείς, συμπεραίνουμε ότι η $f*g$ είναι επίσης συνεχής. Αυτό αποδεικνύει την (v).

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την (vi). Αν σταθεροποιήσουμε κάποιον k, έχουμε

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(k)-\widehat{f_m}(k)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_m(x))e^{-ikx}dx\right|\\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f_m(x)|\,dx,
\end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\widehat{f_m}(k)\to\widehat{f}(k)$ όταν $m\to\infty$. Όμοια δείχνουμε ότι $\widehat{g_m}(k)\to\widehat{g}(k)$. Αφού η $\{f_m * g_m\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f*g$, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|(f_m*g_m)(x)-(f*g)(x)|\,dx \le \|(f_m*g_m)-(f*g)\|_\infty \to 0. \tag{2.3.11}$$

Τότε, όπως παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι

$$\widehat{f_m * g_m}(k) \to \widehat{f*g}(k) \tag{2.3.12}$$

όταν $m\to\infty$. Είδαμε όμως προηγουμένως ότι $\widehat{f_m}(k)\widehat{g_m}(k)=\widehat{f_m*g_m}(k)$, διότι οι f_m και g_m είναι συνεχείς. Η (vi) προκύπτει αν αφήσουμε το m να πάει στο άπειρο. Οι ιδιότητες (iii) και (iv) αποδεικνύονται με παρόμοια επιχειρήματα. □

Ορισμός 2.3.3 (καλοί πυρήνες)**.** Μια ακολουθία $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ συναρτήσεων $K_n:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ λέγεται ακολουθία **καλών πυρήνων** (ή **προσέγγιση της μονάδας**) αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = 1. \tag{2.3.13}$$

(ii) Υπάρχει σταθερά $M>0$ ώστε, για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(x)|\,dx \le M. \tag{2.3.14}$$

(iii) Για κάθε $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta\le|x|\le\pi} |K_n(x)|\,dx = 0. \tag{2.3.15}$$

Πολύ συχνά, δουλεύουμε με μη αρνητικούς πυρήνες: έχουμε $K_n(x) \ge 0$ για κάθε n και για κάθε x. Σε αυτήν την περίπτωση, η ιδιότητα (β) προκύπτει άμεσα από την (α) και δεν χρειάζεται να συμπεριληφθεί στον ορισμό. Η ιδιότητα (α) μας λέει ότι η K_n ορίζει μια «κατανομή μοναδιαίας μάζας» στον μοναδιαίο κύκλο και η ιδιότητα (γ) μας λέει ότι, καθώς το n μεγαλώνει, αυτή η μάζα «συγκεντρώνεται κοντά στο μηδέν».

Η σχέση των συνελίξεων και των ακολουθιών καλών πυρήνων με το πρόβλημα της σύγκλισης των σειρών Fourier γίνεται φανερή από το επόμενο βασικό θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.4. *Έστω $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία καλών πυρήνων και έστω $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, για κάθε $x\in\mathbb{T}$ στο οποίο η f είναι συνεχής, έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty} (f * K_n)(x) = f(x). \tag{2.3.16}$$

Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής παντού στον $\mathbb{T}$, τότε

$$f * K_n \xrightarrow{o\mu} f. \tag{2.3.17}$$

Απόδειξη. Ισοδύναμα, δουλεύουμε με μια 2π-περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο x και θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Από τη συνέχεια της f στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $|y| < \delta$ τότε $|f(x-y) - f(x)| < \frac{\varepsilon\pi}{M}$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (α) της $\{K_n\}$, γράφουμε

$$\begin{aligned}
(f * K_n)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) f(x-y)\,dy - f(x)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) f(x-y)\,dy - f(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)\,dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)[f(x-y) - f(x)]\,dy.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
|(f * K_n)(x) - f(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)[f(x-y) - f(x)]\,dy\right|\\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{|y|<\delta} |K_n(y)|\,|f(x-y) - f(x)|\,dy\\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|y|\le\pi} |K_n(y)|\,|f(x-y) - f(x)|\,dy.
\end{aligned}$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι: αν $|y| < \delta$ τότε $|f(x-y) - f(x)| < \frac{\varepsilon\pi}{M}$. Χρησιμοποιώντας και την ιδιότητα (β) της $\{K_n\}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{|y|<\delta} |K_n(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,dy &\leq \frac{\varepsilon}{2M}\int_{|y|<\delta}|K_n(y)|\,dy \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2M}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(y)|\,dy \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε την ιδιότητα (γ) της $\{K_n\}$ για το συγκεκριμένο δ: έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi} |K_n(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,dy &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi}|K_n(y)|\,(|f(x-y)|+|f(x)|\,dy \\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi}|K_n(y)|\,dy \to 0 \end{aligned}$$

καθώς το $n\to\infty$. Συνεπώς, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n\geq n_0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi}|K_n(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,dy < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.3.18}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι

$$|(f*K_n)(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.3.19}$$

για κάθε $n\geq n_0$. Άρα, $(f*K_n)(x)\to f(x)$ καθώς το $n\to\infty$.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, παρατηρήστε ότι αν η f είναι παντού συνεχής στον $\mathbb{T}$ τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αυτό σημαίνει ότι το $\delta>0$ που επιλέξαμε στην αρχή της απόδειξης μπορεί να επιλεγεί ανεξάρτητα από το x (εξαρτάται μόνο από το ε). Συνεπώς, το επιχείρημα που ακολούθησε δείχνει ότι η σύγκλιση της $f*K_n$ στην f είναι ομοιόμορφη. □

Παρατήρηση 2.3.5. Το Θεώρημα 2.3.4 και η ταυτότητα $s_n(f)(x) = (f*D_n)(x)$, όπου D_n είναι ο πυρήνας του Dirichlet, θέτουν φυσιολογικά το ερώτημα αν η ακολουθία $\{D_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Από την $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ και την $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}dx = 0$ αν $k\neq 0$, είναι φανερό ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1 \tag{2.3.20}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$, δηλαδή ικανοποιείται η ιδιότητα (α). Όμως, υπάρχει σταθερά $c>0$ ώστε, για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(x)|\,dx \geq c\log n, \tag{2.3.21}$$

δηλαδή δεν ικανοποιείται η ιδιότητα (β). Η απόδειξη της (2.3.21) αφήνεται για τις Ασκήσεις αυτού του Κεφαλαίου: μπορεί μάλιστα κανείς να δώσει πολύ ακριβείς ασυμπτωτικές εκτιμήσεις για το ολοκλήρωμα της $|D_n|$. Το μεγάλο «μειονέκτημα» του πυρήνα του Dirichlet είναι ότι δεν διατηρεί πρόσημο: παίρνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές.

Αν η $\{D_n\}$ ήταν ακολουθία καλών πυρήνων, τότε από το Θεώρημα 2.3.4 θα είχαμε

$$s_n(f) = f * D_n \xrightarrow{\text{ομ}} f \tag{2.3.22}$$

για κάθε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Όπως θα δούμε στο επόμενο Κεφάλαιο, το πρόβλημα της κατά σημείο σύγκλισης της $\{s_n(f)\}$ στην f είναι πολύπλοκο, ακόμα και στην περίπτωση των συνεχών συναρτήσεων (η απάντηση είναι αρνητική).

Στην επόμενη Παράγραφο εξετάζουμε ασθενέστερες έννοιες σύγκλισης της $\{s_n(f)\}$ στην f, για τις οποίες έχουμε θετικά αποτελέσματα.

2.4 Αθροισιμότητα σειρών Fourier

2.4α′ Cesàro αθροισιμότητα και το θεώρημα του Fejér

Θεωρούμε μια σειρά μιγαδικών αριθμών

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots . \tag{2.4.1}$$

Το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς είναι το

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k = c_0 + c_1 + \cdots + c_n. \tag{2.4.2}$$

Λέμε ότι η σειρά συγκλίνει στον $s \in \mathbb{C}$ αν $\lim s_n = s$.

Αν θεωρήσουμε το παράδειγμα της σειράς

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots , \tag{2.4.3}$$

παρατηρούμε ότι η ακολουθία $\{s_n\}$ των μερικών της αθροισμάτων παίρνει διαδοχικά τις τιμές $1, 0, 1, 0, \ldots$ και δεν συγκλίνει. Δεδομένου ότι τα μερικά αθροίσματα παίρνουν «εξίσου» τις τιμές 0 και 1, έχει κάποιο νόημα να πούμε ότι, κατά μέσο όρο, είναι ίσα με $1/2$, δηλαδή ο $1/2$ είναι «κατά κάποιον τρόπο» το «άθροισμα» της σειράς. Η ιδέα αυτή μπορεί να περιγραφεί αυστηρά αν ορίσουμε την ακολουθία $\{\sigma_n\}$ των μέσων όρων των πρώτων n μερικών αθροισμάτων μιας σειράς. Αν μας δοθεί η σειρά (2.4.1), θέτουμε

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n} \tag{2.4.4}$$

για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Η ποσότητα σ_n είναι ο **n-οστός Cesàro μέσος** της ακολουθίας $\{s_k\}$ (θα την λέμε και **n-οστό άθροισμα Cesàro** της σειράς $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$).

Αν υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma \in \mathbb{C}$, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ είναι **Cesàro αθροίσιμη** στον σ. Όταν μιλάμε για σειρές συναρτήσεων, εξετάζουμε την κατά σημείο και την ομοιόμορφη Cesàro αθροισιμότητά τους σε κάποια συνάρτηση.

Στο παράδειγμα της σειράς (2.4.3) είναι πολύ εύκολο να ελέγξουμε ότι $\sigma_n \to 1/2$. Δηλαδή, η συγκεκριμένη σειρά αποκλίνει αλλά είναι Cesàro αθροίσιμη στον $1/2$. Μια άλλη χρήσιμη παρατήρηση είναι ότι αν μια σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ συγκλίνει και $s = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = s$, τότε $\sigma_n \to s$, δηλαδή η σειρά είναι Cesàro αθροίσιμη στον s (δείτε το Παράρτημα Β).

Ορισμός 2.4.1 (πυρήνας του Fejér)**.** Ο n-οστός **πυρήνας του Fejér** είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$F_n(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_{n-1}(x)}{n}, \qquad n \geq 1. \tag{2.4.5}$$

όπου D_n είναι ο πυρήνας του Dirichlet. Παρατηρήστε ότι ο πυρήνας του Fejér ισούται με

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} D_s(x) = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{k=-s}^{s} e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{|k|\leq s\leq n-1} 1\right)e^{ikx} = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\frac{n-|k|}{n}e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{ikx}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση 2.4.2. Από την γραμμικότητα της συνέλιξης βλέπουμε ότι, αν f είναι μια 2π-περιοδική ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε για την

$$\sigma_n(f)(x) := \frac{s_0(f)(x) + s_1(f)(x) + \cdots + s_{n-1}(f)(x)}{n} \tag{2.4.6}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma_n(f)(x) &= \frac{(f*D_0)(x) + (f*D_1)(x) + \cdots + (f*D_{n-1})(x)}{n} \\ &= \left(f * \frac{D_0 + D_1 + \cdots + D_{n-1}}{n}\right)(x) \\ &= (f*F_n)(x). \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\sigma_n(f) \equiv f * F_n. \tag{2.4.7}$$

Παρατηρήστε ότι κάθε $\sigma_n(f)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από $n-1$, διότι είναι μέσος όρος των $s_k(f)$, $0 \leq k \leq n-1$, τα οποία έχουν την ίδια ιδιότητα.

Η βασική παρατήρηση αυτής της παραγράφου είναι ότι η $\{F_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων.

Πρόταση 2.4.3. *Για κάθε $n \geq 1$, ο n-οστός πυρήνας του Fejér δίνεται από τις*

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}, \qquad x \neq 2k\pi \tag{2.4.8}$$

και

$$F_n(x) = n, \qquad x = 2k\pi. \tag{2.4.9}$$

Η ακολουθία $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων.

Απόδειξη. Έστω $x \neq 2k\pi$. Έχουμε δείξει ότι, για κάθε $s = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$D_s(x) = \frac{\sin\left(s+\frac{1}{2}\right)x}{\sin(x/2)}. \tag{2.4.10}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\sin\left(s+\frac{1}{2}\right)x}{\sin(x/2)} &= \frac{1}{2\sin^2(x/2)}\sum_{s=0}^{n-1} 2\sin(x/2)\sin\left(s+\frac{1}{2}\right)x \\
&= \frac{1}{2\sin^2(x/2)}\sum_{s=0}^{n-1}[\cos sx - \cos(s+1)x] \\
&= \frac{1}{2\sin^2(x/2)}(1-\cos nx) \\
&= \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}
\end{aligned}$$

Διαιρώντας με n παίρνουμε την

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} D_s(x) = \frac{1}{n}\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}. \tag{2.4.11}$$

Αν $x = 2k\pi$, έχουμε $D_s(x) = 2s+1$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$. Συνεπώς,

$$F_n(2k\pi) = \frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n} = \frac{n^2}{n} = n. \tag{2.4.12}$$

Παρατηρήστε ότι

$$F_n(x) \geq 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.4.13}$$

Αφού η $\{F_n\}$ είναι ακολουθία μη-αρνητικών πυρήνων, για να ελέγξουμε ότι είναι ακολουθία καλών πυρήνων αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες (α) και (γ). Η πρώτη ισχύει προφανώς: αφού

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_s(x)\,dx = 1 \tag{2.4.14}$$

για κάθε $s \geq 0$, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_s(x)\,dx = 1 \tag{2.4.15}$$

για κάθε $n \geq 1$. Για την ιδιότητα (γ) παρατηρούμε ότι, από την (2.4.8), για κάθε $\delta \in (0,\pi)$ και για κάθε $\delta < |x| \leq \pi$, έχουμε

$$|F_n(x)| = F_n(x) = \frac{1}{n}\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)} \leq \frac{1}{n\sin^2(x/2)} \leq \frac{1}{n\sin^2(\delta/2)}. \tag{2.4.16}$$

Είναι τώρα φανερό ότι

$$\int_{\delta\leq|x|\leq\pi} |F_n(x)|\,dx \leq \frac{2\pi}{n\sin^2(\delta/2)} \to 0 \tag{2.4.17}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.3.4 και της Πρότασης 2.4.3 είναι το εξής.

Θεώρημα 2.4.4. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η σειρά Fourier $S[f]$ της f είναι Cesáro αθροίσιμη στην f σε κάθε σημείο συνέχειας της f: αν η f είναι συνεχής στο $x \in \mathbb{T}$, τότε*

$$\sigma_n(f)(x) \to f(x). \tag{2.4.18}$$

Επιπλέον, αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{T}$, τότε η σειρά Fourier $S[f]$ της f είναι ομοιόμορφα Cesáro αθροίσιμη στην f: δηλαδή,

$$\sigma_n(f) \xrightarrow{o\mu} f. \tag{2.4.19}$$

Άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος 2.4.4 είναι το θεώρημα μοναδικότητας 2.2.1.

Θεώρημα 2.4.5. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν η f είναι συνεχής στο σημείο $\theta_0 \in \mathbb{T}$ τότε $f(\theta_0) = 0$.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε

$$s_n(f)(\theta_0) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ik\theta_0} = 0 \tag{2.4.20}$$

για κάθε n. Άρα,

$$\sigma_n(f)(\theta_0) = \frac{s_0(f)(\theta_0) + s_1(f)(\theta_0) + \cdots + s_{n-1}(f)(\theta_0)}{n} = 0 \tag{2.4.21}$$

για κάθε n. Αφού η f είναι συνεχής στο θ_0, το Θεώρημα 2.4.4 μας λέει ότι

$$\sigma_n(f)(\theta_0) \to f(\theta_0). \tag{2.4.22}$$

Έπεται ότι $f(\theta_0) = 0$. □

Δεδομένου ότι οι Cesàro μέσοι $\sigma_n(f)$ μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα, μια δεύτερη άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.4.4 είναι η πυκνότητα των τριγωνομετρικών πολυωνύμων στο χώρο των συνεχών $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ (στην Παράγραφο 1.1 είχαμε αποδείξει με διαφορετικό τρόπο το ίδιο αποτέλεσμα, στην πραγματική περίπτωση).

Θεώρημα 2.4.6. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχει ακολουθία $\{T_n\}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων ώστε $\|f - T_n\|_\infty \to 0$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.4.4 έχουμε

$$\sigma_n(f) \xrightarrow{\text{ομ}} f.$$

Παίρνοντας $T_n := \sigma_n(f)$ έχουμε το ζητούμενο. □

2.4β΄ Abel αθροισιμότητα και ο πυρήνας του Poisson

Μια σειρά μιγαδικών αριθμών $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ λέγεται **Abel αθροίσιμη** στον $s \in \mathbb{C}$ αν για κάθε $0 \leq r < 1$ η σειρά

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k \tag{2.4.23}$$

συγκλίνει, και

$$\lim_{r \to 1^-} A(r) = s. \tag{2.4.24}$$

Οι ποσότητες $A(r)$ λέγονται **Abel μέσοι** της σειράς $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$. Αποδεικνύεται ότι αν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ συγκλίνει στον s τότε είναι και Abel αθροίσιμη στον s. Αποδεικνύεται επίσης ότι αν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον s τότε είναι και Abel αθροίσιμη στον s. Το παράδειγμα της σειράς

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots \tag{2.4.25}$$

δείχνει ότι μια σειρά μπορεί να είναι Abel αθροίσιμη χωρίς να είναι Cesàro αθροίσιμη. Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)r^k = \frac{1}{(1+r)^2} \tag{2.4.26}$$

για κάθε $0 \le r < 1$, συνεπώς

$$\lim_{r\to 1^-} A(r) = \frac{1}{4}. \tag{2.4.27}$$

Όμως, η σειρά αυτή δεν είναι Cesàro αθροίσιμη: θα έπρεπε να ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n/n) = 0$. Για αποδείξεις των παραπάνω ισχυρισμών παραπέμπουμε στο Παράρτημα B και τις σχετικές ασκήσεις.

Ορισμός 2.4.7 (πυρήνας του Poisson)**.** Για κάθε $0 \le r < 1$ θεωρούμε την συνάρτηση $P_r : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ που ορίζεται μέσω της

$$P_r(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta}. \tag{2.4.28}$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Weierstrass βλέπουμε ότι η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει απολύτως για κάθε θ και ομοιόμορφα σαν σειρά συναρτήσεων στο $[-\pi, \pi]$. Η συνάρτηση P_r λέγεται r-**πυρήνας του Poisson**. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς (2.4.28) έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$\widehat{P_r}(k) = r^{|k|}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.4.29}$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι ο πυρήνας P_r παίρνει μη αρνητικές πραγματικές τιμές: δίνεται μάλιστα από την

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}. \tag{2.4.30}$$

Για την απόδειξη της τελευταίας ισότητας θέτουμε $\omega = re^{i\theta}$. Τότε,

$$P_r(\theta) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} r^k (e^{i\theta})^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} r^{-k}(e^{-i\theta})^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(re^{i\theta})^k + \sum_{s=1}^{\infty}(re^{-i\theta})^s$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\omega^k + \sum_{s=1}^{\infty}\overline{\omega}^s = \frac{1}{1-\omega} + \frac{\overline{\omega}}{1-\overline{\omega}}$$
$$= \frac{1-\overline{\omega}+(1-\omega)\overline{\omega}}{(1-\omega)(1-\overline{\omega})} = \frac{1-|\omega|^2}{|1-\omega|^2}.$$

Δεδομένου ότι $|\omega| = r$ και $1-\omega = 1-re^{i\theta} = (1-r\cos\theta) - ir\sin\theta$, καταλήγουμε στην

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{(1-r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}. \tag{2.4.31}$$

Θα αποδείξουμε ότι η οικογένεια $\{P_r\}_{0\leq r\leq 1}$ είναι *οικογένεια καλών πυρήνων*. Δεδομένου ότι το σύνολο δεικτών είναι τώρα το διάστημα $[0,1)$, αυτό που χρειάζεται να τροποποιήσουμε είναι η συνθήκη (γ). Ουσιαστικά ζητάμε το εξής: για κάθε ακολουθία $\{r_n\}$ στο $[0,1)$ με $r_n \to 1^-$, ζητάμε η ακολουθία $\{P_{r_n}\}_{n=1}^{\infty}$ να είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Η συνθήκη (β) είναι άμεση συνέπεια της συνθήκης (α) αφού οι P_r παίρνουν μη αρνητικές πραγματικές τιμές. Αποδεικνύουμε λοιπόν την εξής Πρόταση.

Πρόταση 2.4.8. *Για κάθε $0 \leq r < 1$ έχουμε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\,d\theta = 1, \tag{2.4.32}$$

και για κάθε $0 < \delta < \pi$ ισχύει ότι

$$\lim_{r\to 1^-}\int_{\delta\leq |x|\leq\pi} P_r(\theta)\,d\theta = 0. \tag{2.4.33}$$

Απόδειξη. Έστω $0 \leq r < 1$. Αφού η σειρά συναρτήσεων $P_r(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik\theta}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\pi,\pi]$, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\,d\theta = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{r^{|k|}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}d\theta = \frac{r^0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^0 d\theta = 1, \tag{2.4.34}$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}d\theta = 0$ αν $k \neq 0$. Έστω τώρα $0 < \delta < \pi$ και έστω $1/2 \leq r < 1$. Έχουμε
(2.4.35)
$$1-2r\cos\theta + r^2 = (1-r)^2 + 2r(1-\cos\theta) \geq (1-r)^2 + 2r(1-\cos\delta) \geq c_\delta = 1-\cos\delta > 0$$

για κάθε $\delta \leq |\theta| \leq \pi$ (διότι $\cos\theta \leq \cos\delta$). Συνεπώς,

$$0 \leq \int_{\delta\leq|\theta|\leq\pi} P_r(\theta)\,d\theta \leq \int_{\delta\leq|\theta|\leq\pi}\frac{1-r^2}{c_\delta}\,d\theta \leq \frac{2\pi}{c_\delta}(1-r^2) \to 0 \tag{2.4.36}$$

όταν $r \to 1^-$. Έπεται η (2.4.33). □

Ορισμός 2.4.9 (Abel μέσοι της f)**.** Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $0 \leq r < 1$ ορίζουμε τον r-**Abel μέσο** της f μέσω της

$$A_r(f)(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\widehat{f}(k)e^{ik\theta}. \tag{2.4.37}$$

Αφού η ακολουθία $\{|\widehat{f}(k)|\}$ είναι φραγμένη, το κριτήριο του Weierstrass δείχνει ότι η σειρά συναρτήσεων στο δεξιό μέλος συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\mathbb{T}$. Παρατηρήστε ότι $A_r(f)(\theta)$ είναι ο r-Abel μέσος της σειράς Fourier $S[f]$ της f.

Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της σειράς (2.4.37), μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
A_r(f)(\theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\widehat{f}(k)e^{ik\theta} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)e^{-ik\varphi}d\varphi\right)e^{ik\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{-ik(\varphi-\theta)}\right)d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)P_r(\theta-\varphi)\,d\varphi \\
&= (f * P_r)(\theta).
\end{aligned}$$

Αφού η $\{P_r\}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων, παίρνουμε αμέσως το εξής.

Θεώρημα 2.4.10. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η σειρά Fourier $S[f]$ της f είναι Abel αθροίσιμη στην f σε κάθε σημείο συνέχειας της f: αν η f είναι συνεχής στο $x \in \mathbb{T}$, τότε*

$$A_r(f)(x) \to f(x). \tag{2.4.38}$$

Επιπλέον, αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{T}$, τότε η σειρά Fourier $S[f]$ της f είναι ομοιόμορφα Abel αθροίσιμη στην f: δηλαδή,

$$A_r(f) \xrightarrow{\text{ομ}} f. \tag{2.4.39}$$

2.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. (α) Δείξτε ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητο.

(β) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$e^{i\lambda_1 x}, e^{i\lambda_2 x}, \ldots, e^{i\lambda_n x}$$

είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητες. Χρειάζεται η υπόθεση ότι όλοι οι λ_j είναι θετικοί;

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα. Δείξτε ότι: για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\,dx = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\,dx,$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,dx.$$

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, Riemann ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η f είναι άρτια, τότε $\widehat{f}(-k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S[f]$ είναι σειρά συνημιτόνων.

(β) Αν η f είναι περιττή, τότε $\widehat{f}(-k) = -\widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S[f]$ είναι σειρά ημιτόνων.

(γ) Αν $f(x+\pi) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε περιττό ακέραιο k.

(δ) Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\hat{f}(k)} = \hat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, Riemann ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\tau_a(x) = f(x-a).$$

Περιγράψτε το γράφημα της τ_a σε σχέση με αυτό της f. Είναι η τ_a περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της τ_a συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, Riemann ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$g_m(x) = f(mx).$$

Περιγράψτε το γράφημα της g_m σε σχέση με αυτό της f. Είναι η g_m περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της g_m συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

6. Θεωρούμε την περιττή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[0, \pi]$ ορίζεται από την

$$f(x) = x(\pi - x).$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)^3}.$$

7. Έστω $0 < \delta < \pi$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{\delta} & \text{αν } |x| \leq \delta \\ 0 & \text{αν } \delta \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos k\delta}{k^2 \pi \delta} \cos kx.$$

8. Θεωρούμε την 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[-\pi, \pi]$ ορίζεται από την

$$f(x) = |x|.$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \pi/2$ και

$$\widehat{f}(k) = \frac{-1 + (-1)^k}{\pi k^2}, \qquad k \neq 0.$$

Γράψτε τη σειρά Fourier $S[f]$ της f σαν σειρά συνημιτόνων και ημιτόνων. Θέτοντας $x = 0$ δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ομάδα Β′

9. Έστω $[a, b]$ κλειστό διάστημα που περιέχεται στο εσωτερικό του $[-\pi, \pi]$. Θεωρούμε την $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ που ορίζεται στο $[-\pi, \pi]$ από τις $f(x) = 1$ αν $x \in [a, b]$ και $f(x) = 0$ αλλιώς, και την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S[f](x) = \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{2\pi i k} e^{ikx}.$$

Δείξτε ότι η $S[f]$ δεν συγκλίνει απολύτως για κανένα $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η $S[f](x)$ συγκλίνει.

10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική, η οποία ανήκει στην κλάση C^m (είναι m-φορές παραγωγίσιμη και η $f^{(m)}$ είναι συνεχής). Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f) > 0$ ώστε

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C(f)}{|k|^m}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

11. Έστω f, f_n ($n \in \mathbb{N}$) συναρτήσεις 2π-περιοδικές, ολοκληρώσιμες στο $[-\pi, \pi]$, οι οποίες ικανοποιούν την

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_n(x)|\, dx = 0.$$

Δείξτε ότι

$$\widehat{f_n}(k) \to \widehat{f}(k) \quad \text{όταν } n \to \infty,$$

ομοιόμορφα ως προς k. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| < \varepsilon.$$

12. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$f(x^-) := \lim_{t\to x^-} f(t) \quad \text{και} \quad f(x^+) := \lim_{t\to x^+} f(t).$$

Δείξτε ότι η σειρά Fourier $S[f]$ της f είναι Cesàro αθροίσιμη στο σημείο x: πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x) = \lim_{n\to\infty} (f * F_n)(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Για την απόδειξη τροποποιήστε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.4.

13. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$f(x^-) := \lim_{t\to x^-} f(t) \quad \text{και} \quad f(x^+) := \lim_{t\to x^+} f(t).$$

Δείξτε ότι η σειρά Fourier $S[f]$ της f είναι Abel αθροίσιμη στο σημείο x: πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{r\to 1^-} A_r(f)(x) = \lim_{r\to 1^-} (f * P_r)(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Για την απόδειξη τροποποιήστε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.4 και χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} P_r(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} P_r(x)\, dx.$$

Ομάδα Γ΄

14. (α) Έστω $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση των ρητών του $(0,1)$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \chi_{[0,+\infty)}(x - q_k)$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη και ασυνεχής σε κάθε q_k (δηλαδή, ασυνεχής σε ένα πυκνό υποσύνολο του $[0,1]$).

(β) Έστω $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση των ρητών του $(0,1)$. Ορίζουμε $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $g(0) = 0$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} g(x - q_k)$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη, ασυνεχής σε κάθε q_k και δεν είναι μονότονη σε κανένα υποδιάστημα του $[0,1]$.

15. Έστω $M > 0$ και έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχείς συναρτήσεις που μηδενίζονται έξω από το $[-M, M]$. Ορίζουμε $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μέσω της

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y)\, dy.$$

(α) Δείξτε ότι η $f*g$ είναι καλά ορισμένη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι $(f*g)(x) = 0$ αν $|x| > 2M$.

(β) Δείξτε ότι $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$, όπου

$$\|u\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|\, dx.$$

16. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τον πυρήνα του Dirichlet

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Δείξτε ότι: υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε

$$L_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx \geq c \log n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

[*Υπόδειξη*: Παρατηρήστε πρώτα ότι $|D_n(x)| \geq \frac{c\sin((n+\frac{1}{2})x)}{|x|}$ και, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής, συμπεράνατε ότι

$$\left| L_n - c\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{|t|}\, dt \right| \leq C$$

για κάποια σταθερά $C > 0$ ανεξάρτητη από το n.]

17. Δείξτε ότι

$$\left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\log n \right| \leq C_1$$

για κάποια σταθερά $C_1 > 0$ ανεξάρτητη από το n.

18. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα. Δείξτε ότι

$$\|s_n(f)\|_\infty \leq C\log(1+n)\|f\|_\infty,$$

όπου $C > 0$ σταθερά ανεξάρτητη από την f και από το n.

19. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχής ώστε $\|f\|_\infty = 1$ και

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \operatorname{sign} D_n(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{n},$$

όπου $\operatorname{sign} u$ είναι το πρόσημο του u (και $\operatorname{sign} 0 = 0$). Συμπεράνατε ότι

$$\|s_n(f)\|_\infty \geq L_n - \varepsilon.$$

20. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$Q_n(t) = \alpha_n \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n,$$

όπου η θετική σταθερά α_n επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\, dt = 1.$$

Δείξτε ότι: αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε

$$f * Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f.$$

Παρατηρήστε ότι αυτό δίνει ακόμα μία απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

21. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$G_n(x) = F_n(x) \sin nx,$$

όπου F_n είναι ο n-οστός πυρήνας του Fejér. Δείξτε ότι: αν $T \in \mathcal{T}_n$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n, τότε

$$T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συμπεράνατε ότι

$$|T'(x)| \leq 2n\|T\|_\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτή είναι μια «ασθενής» έκδοση της ανισότητας του Bernstein, η οποία ισχυρίζεται ότι $\|T'\|_\infty \leq n\|T\|_\infty$ για κάθε $T \in \mathcal{T}_n$.

Κεφάλαιο 3

Σύγκλιση σειρών Fourier

3.1 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ένα μη κενό σύνολο V λέγεται *γραμμικός χώρος* (ή *διανυσματικός χώρος*) πάνω από το $\mathbb{R}$ αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+ : V \times V \to V$ (την πρόσθεση) και $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ (τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό) που ικανοποιούν τα εξής:

1. Αξιώματα της πρόσθεσης: Για κάθε $x, y, z \in V$ ισχύουν οι $x+y = y+x$ και $x+(y+z) = (x+y)+z$. Επίσης, υπάρχει ένα στοιχείο $\mathbf{0} \in V$ ώστε, για κάθε $x \in V$, $\mathbf{0}+x = x$. Τέλος, για κάθε $x \in V$ υπάρχει (μοναδικό) $-x \in V$ ώστε $x + (-x) = \mathbf{0}$.

2. Αξιώματα του πολλαπλασιασμού: Για κάθε $x, y \in V$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ισχύουν οι $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, $1x = x$, $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ και $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Άμεσες συνέπειες των αξιωμάτων του γραμμικού χώρου είναι, για παράδειγμα, οι

$$0x = \mathbf{0}, \qquad \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}, \qquad -x = (-1)x.$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα τέτοιου είδους ιδιότητες (η δομή του γραμμικού χώρου θα θεωρηθεί, σε γενικές γραμμές, γνωστή). Τα στοιχεία του V θα λέγονται σημεία (ή και διανύσματα). Πολύ συχνά, θεωρούμε βαθμωτό πολλαπλασιασμό $\cdot : \mathbb{C} \times V \to V$. Αν ικανοποιούνται τα αντίστοιχα αξιώματα, λέμε ότι ο V είναι γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$.

Κλασικό παράδειγμα γραμμικού χώρου πάνω από το $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο $\mathbb{R}^d$ όλων των d-άδων πραγματικών αριθμών $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$. Η πρόσθεση ορίζεται κατά συντεταγμένες, μέσω της

$$(x_1, x_2, \ldots, x_d) + (y_1, y_2, \ldots, y_d) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_d + y_d). \tag{3.1.1}$$

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται ο πολλαπλασιασμός με τον $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_d) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_d). \tag{3.1.2}$$

Όμοια, ο χώρος $\mathbb{C}^d$ των d-άδων $(z_1, z_2, \dots, z_d)$ μιγαδικών αριθμών γίνεται γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$ αν ορίσουμε πρόσθεση κατά συντεταγμένες, δηλαδή

$$(z_1, z_2, \dots, z_d) + (w_1, w_2, \dots, w_d) = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \dots, z_d + w_d) \tag{3.1.3}$$

και πολλαπλασιασμό με τον $\lambda \in \mathbb{C}$ μέσω της

$$\lambda(z_1, z_2, \dots, z_d) = (\lambda z_1, \lambda z_2, \dots, \lambda z_d). \tag{3.1.4}$$

Ορισμός 3.1.1 (εσωτερικό γινόμενο πάνω από το $\mathbb{R}$)**.** Έστω V γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$. **Εσωτερικό γινόμενο** στον V είναι μια συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ (απεικονίζει κάθε ζεύγος $(x, y) \in V \times V$ σε κάποιον πραγματικό αριθμό $\langle x, y \rangle$) με τις εξής ιδιότητες:

(i) $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$ για κάθε $x, y \in V$.

(ii) $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$ για κάθε $x, y, z \in V$ και για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in V$.

Αν $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον V, ορίζουμε την **επαγόμενη νόρμα** στον V ως εξής:

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}, \qquad x \in V. \tag{3.1.5}$$

Παρατηρήστε ότι $\|x\| \geq 0$. Αν, επιπλέον, από την $\|x\| = 0$ έπεται ότι, αναγκαστικά, $x = 0$, τότε λέμε ότι το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι *γνήσια θετικό*.

Το σύνηθες (γνήσια θετικό) εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^d$ ορίζεται μέσω της

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d, \tag{3.1.6}$$

όπου $x = (x_1, \dots, x_d)$ και $y = (y_1, \dots, y_d)$. Η επαγόμενη νόρμα είναι η

$$\|x\| = \langle x, x \rangle = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}, \tag{3.1.7}$$

η οποία επάγει την συνήθη Ευκλείδεια απόσταση $\|x - y\|$ στον $\mathbb{R}^d$.

Ορισμός 3.1.2 (εσωτερικό γινόμενο πάνω από το $\mathbb{C}$)**.** Έστω V γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$. **Εσωτερικό γινόμενο** στον V είναι μια συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ (απεικονίζει κάθε ζεύγος $(x, y) \in V \times V$ σε κάποιον μιγαδικό αριθμό $\langle x, y \rangle$) με τις εξής ιδιότητες:

(i) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ για κάθε $x, y \in V$.

(ii) $\langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$ για κάθε $x,y,z\in V$ και για κάθε $a,b\in\mathbb{C}$. Σε συνδυασμό με την προηγούμενη ιδιότητα βλέπουμε ότι, τώρα, το μιγαδικό εσωτερικό γινόμενο είναι «συζυγώς γραμμικό» ως προς την δεύτερη μεταβλητή. Δηλαδή,

$$\langle x, ay+bz\rangle = \overline{a}\langle x,y\rangle + \overline{b}\langle x,z\rangle$$

για κάθε $x,y,z\in V$ και για κάθε $a,b\in\mathbb{C}$.

(iii) $\langle x,x\rangle \geq 0$ για κάθε $x\in V$, όπως στην πραγματική περίπτωση.

Η **επαγόμενη νόρμα** στον V είναι, πάλι, η

$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}, \qquad x\in V. \tag{3.1.8}$$

Αν, επιπλέον, από την $\|x\|=0$ έπεται ότι, αναγκαστικά, $x=0$, τότε λέμε ότι το εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι *γνήσια θετικό.*

Το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^d$ ορίζεται μέσω της

$$\langle z,w\rangle = \sum_{i=1}^{d} z_i\overline{w_i} = z_1\overline{w_1}+\cdots+z_d\overline{w_d}, \tag{3.1.9}$$

όπου $z=(z_1,\ldots,z_d)$ και $w=(w_1,\ldots,w_d)\in\mathbb{C}^d$. Η επαγόμενη νόρμα είναι η

$$\|z\| = \langle z,z\rangle = \sqrt{|z_1|^2+\cdots+|z_d|^2}. \tag{3.1.10}$$

Ορισμός 3.1.3 (καθετότητα)**.** Έστω V ένας γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$, πάνω από το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$. Τα x και $y\in V$ λέγονται **κάθετα** ή **ορθογώνια** αν

$$\langle x,y\rangle = 0. \tag{3.1.11}$$

Τότε, θα γράφουμε $x\perp y$.

Μέσω της έννοιας της καθετότητας, παίρνουμε τρεις πολύ βασικές ιδιότητες που ισχύουν σε κάθε χώρο με εσωτερικό γινόμενο:

1. Πυθαγόρειο Θεώρημα. *Αν $x\perp y$ τότε*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2. \tag{3.1.12}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου και τον ορισμό της νόρμας, γράφουμε

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle\\ &= \langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle = \|x\|^2+\|y\|^2,\end{aligned}$$

διότι $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = 0$, αφού $x \perp y$. $\Box$.

2. Ανισότητα Cauchy–Schwarz. *Για κάθε $x, y \in V$,*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|. \tag{3.1.13}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την μιγαδική περίπτωση (η πραγματική είναι απλούστερη). Υποθέτουμε πρώτα ότι $\|y\| = 0$. Θα δείξουμε ότι $\langle x, y\rangle = 0$ για κάθε $x \in V$, δηλαδή η ανισότητα Cauchy–Schwarz ισχύει τότε σαν ισότητα (για οποιοδήποτε $x \in V$). Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$0 \leq \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + t\langle y, x\rangle + t\langle x, y\rangle + \|ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle),$$

διότι $\|ty\| = |t|\,\|y\| = 0$ και $\langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle = 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)$. Αν $\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) > 0$, καταλήγουμε σε άτοπο παίρνοντας $t \to -\infty$, ενώ αν $\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) < 0$, καταλήγουμε σε άτοπο παίρνοντας $t \to +\infty$. Συνεπώς, $\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) = 0$. Εντελώς ανάλογα, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$0 \leq \|x + ity\|^2 = \|x\|^2 + it\langle y, x\rangle - it\langle x, y\rangle + \|ity\|^2 = \|x\|^2 + 2t\mathrm{Im}(\langle x, y\rangle),$$

διότι $\|ty\| = |t|\,\|y\| = 0$ και $\langle y, x\rangle - \langle x, y\rangle = -2i\mathrm{Im}(\langle x, y\rangle)$. Αν $\mathrm{Im}(\langle x, y\rangle) > 0$, καταλήγουμε σε άτοπο παίρνοντας $t \to -\infty$, ενώ αν $\mathrm{Im}(\langle x, y\rangle) < 0$, καταλήγουμε σε άτοπο παίρνοντας $t \to +\infty$. Συνεπώς, $\mathrm{Im}(\langle x, y\rangle) = 0$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι $\langle x, y\rangle = 0$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\|y\|^2 = \langle y, y\rangle > 0$. Θέτουμε $t = \langle x, y\rangle / \langle y, y\rangle$ και παρατηρούμε ότι $y \perp (x - ty)$. Πράγματι,

$$\langle x - ty, y\rangle = \langle x, y\rangle - t\langle y, y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle = 0,$$

από τον ορισμό του t. Έπεται ότι $ty \perp (x - ty)$. Γράφοντας $x = (x - ty) + ty$ και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα, παίρνουμε

$$\|x\|^2 = \|x - ty\|^2 + \|ty\|^2 \geq \|ty\|^2 = |t|^2\|y\|^2. \tag{3.1.14}$$

Συνεπώς, $|t|\,\|y\| \leq \|x\|$ και έπεται ότι

$$|\langle x, y\rangle| = |t|\,\|y\|^2 \leq \|x\|\,\|y\|. \tag{3.1.15}$$

3. Τριγωνική Ανισότητα. *Η νόρμα $\|\cdot\|$ που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \tag{3.1.16}$$

για κάθε $x, y \in V$.

Απόδειξη. Έστω $x, y \in V$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

Τα πιο σημαντικά παραδείγματα χώρων με εσωτερικό γινόμενο, που σχετίζονται με τη μελέτη των σειρών Fourier, είναι ο $\ell^2(\mathbb{Z})$ και ο χώρος $\mathcal{R}$ των Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$.

Παράδειγμα 3.1.4 (ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$)**.** Ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$ πάνω από το $\mathbb{C}$ είναι ο χώρος των (δίπλευρων) άπειρων ακολουθιών μιγαδικών αριθμών

$$a = (\dots, a_{-k}, \dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots) \tag{3.1.17}$$

για τις οποίες

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty. \tag{3.1.18}$$

Οι πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ορίζονται κατά συντεταγμένη, ακριβώς όπως στην περίπτωση του $\mathbb{C}^d$. Πρέπει βέβαια να ελέγξουμε ότι ο $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι γραμμικός χώρος. Πιο συγκεκριμένα, ότι αν $a, b \in \ell^2(\mathbb{Z})$ τότε $a + b \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$a^{(n)} = (\dots, 0, a_{-n}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$$

και

$$b^{(n)} = (\dots, 0, b_{-n}, \dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_n, 0, \dots)$$

και, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα για την Ευκλείδεια νόρμα στην περίπτωση της πεπερασμένης διάστασης, ελέγχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|a^{(n)} + b^{(n)}\| &= \left(\sum_{k=-n}^{n} |a_k + b_k|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{k=-n}^{n} |a_k|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=-n}^{n} |b_k|^2 \right)^{1/2} \\
&= \|a^{(n)}\| + \|b^{(n)}\| \leq \|a\| + \|b\|.
\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ βλέπουμε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k + b_k|^2 \leq (\|a\| + \|b\|)^2 < +\infty,$$

δηλαδή $a + b \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Ταυτόχρονα, έχουμε δείξει την τριγωνική ανισότητα $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ για τη νόρμα

$$\|a\| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{1/2}, \tag{3.1.19}$$

η οποία επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle a,b\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\overline{b_k}. \tag{3.1.20}$$

Το γεγονός ότι η συνάρτηση $(a,b)\mapsto\langle a,b\rangle$ ορίζεται καλά (δηλαδή, η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\overline{b_k}$ συγκλίνει (απολύτως) για κάθε $a,b\in\ell^2(\mathbb{Z})$) και ικανοποιεί τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου, αφήνεται ως άσκηση. Παρατηρήστε επίσης ότι το εσωτερικό γινόμενο του $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι γνήσια θετικό. Αν $\|a\|=0$ τότε

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = 0,$$

δηλαδή $a_k=0$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$. Συνεπώς, $a=0$.

Επίσης, ο $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι **πλήρης**. Αν $\{a^{(m)}\}$ είναι μια ακολουθία στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ η οποία είναι **βασική**, δηλαδή «για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $m_0=m_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ ώστε $\|a^{(m)}-a^{(s)}\|<\varepsilon$ για κάθε $m,s\geq m_0$», τότε η $\{a^{(m)}\}$ είναι $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα, δηλαδή «υπάρχει $a\in\ell^2(\mathbb{Z})$ ώστε $\lim_{m\to\infty}\|a-a^{(m)}\|=0$». Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού αφήνεται ως άσκηση. Οι χώροι $\mathbb{R}^d$ και $\mathbb{C}^d$ είναι επίσης πλήρεις ως προς τη νόρμα που επάγεται από το σύνηθες εσωτερικό τους γινόμενο. Οι «πλήρεις χώροι με εσωτερικό γινόμενο» είναι οι λεγόμενοι **χώροι Hilbert**.

Παράδειγμα 3.1.5 (ο χώρος $\mathcal{R}$). Συμβολίζουμε με $\mathcal{R}$ τον χώρο των Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$, ή ισοδύναμα, των Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$. Ο $\mathcal{R}$ είναι γραμμικός χώρος, με πρόσθεση την

$$(f+g)(\theta)=f(\theta)+g(\theta) \tag{3.1.21}$$

και βαθμωτό πολλαπλασιασμό τον

$$(\lambda f)(\theta)=\lambda f(\theta). \tag{3.1.22}$$

Ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{R}$ ως εξής: αν $f,g\in\mathcal{R}$, θέτουμε

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}\,d\theta. \tag{3.1.23}$$

Οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου ελέγχονται εύκολα. Η επαγόμενη νόρμα είναι η

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta\right)^{1/2}. \tag{3.1.24}$$

Το εσωτερικό γινόμενο του $\mathcal{R}$ δεν είναι γνήσια θετικό: αν η f μηδενίζεται στο $[0,2\pi]$ με την εξαίρεση πεπερασμένων το πλήθος σημείων, τότε $f\neq 0$, η f είναι ολοκληρώσιμη και $\|f\|_2=0$.

Επίσης, με την ορολογία του προηγούμενου παραδείγματος, ο $\mathcal{R}$ δεν είναι πλήρης. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με

$$f(\theta) = \begin{cases} \ln(1/\theta) & \text{αν } 0 < \theta \leq 2\pi \\ 0 & \text{αν } \theta = 0 \end{cases}$$

τότε η f δεν είναι φραγμένη, άρα δεν ανήκει στον $\mathcal{R}$. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, όπου

$$f_n(\theta) = \begin{cases} \ln(1/\theta) & \text{αν } \frac{1}{n} < \theta \leq 2\pi \\ 0 & \text{αν } 0 \leq \theta \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Κάθε f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη, και μπορούμε να ελέγξουμε ότι η $\{f_n\}$ είναι βασική ακολουθία του $\mathcal{R}$. Όμως, δεν υπάρχει $g \in \mathcal{R}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} \|g - f_n\| = 0$. Η απόδειξη αυτών των ισχυρισμών αφήνεται ως άσκηση.

3.2 L^2-σύγκλιση σειρών Fourier

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να γενικεύσουμε τα αποτελέσματα της Παραγράφου 1.2.

Θεώρημα 3.2.1. *Εστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - s_n(f)(\theta)|^2 d\theta = 0. \tag{3.2.1}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τον χώρο $\mathcal{R}$ των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}\, d\theta \tag{3.2.2}$$

και την επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|_2$ που ορίζεται από την σχέση

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta. \tag{3.2.3}$$

Με αυτόν τον συμβολισμό, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n(f)\|_2 = 0. \tag{3.2.4}$$

Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ θέτουμε $e_k(\theta) = e^{ik\theta}$ και παρατηρούμε ότι η οικογένεια $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι ορθοκανονική. Δηλαδή,

$$\langle e_k, e_m \rangle = \begin{cases} 1 & \text{αν } k = m \\ 0 & \text{αν } k \neq m \end{cases}$$

Αν $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, θέτουμε $a_k = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Παρατηρήστε ότι *οι συντελεστές Fourier της f είναι τα εσωτερικά γινόμενα της f με τα στοιχεία της ορθοκανονικής οικογένειας* $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$:

$$\langle f, e_k\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}d\theta = a_k. \tag{3.2.5}$$

Ειδικότερα,

$$s_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k. \tag{3.2.6}$$

Από το γεγονός ότι η $\{e_k\}$ είναι ορθοκανονική οικογένεια και από το γεγονός ότι $a_k = \langle f, e_k\rangle$ έπεται τώρα ότι η διαφορά $f - s_n(f) = f - \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k$ είναι κάθετη στο e_k για κάθε $|k| \leq n$. Συνεπώς,

$$f - s_n(f) \perp \sum_{k=-n}^{n} b_k e_k \tag{3.2.7}$$

για κάθε επιλογή μιγαδικών αριθμών b_k. Από αυτήν την παρατήρηση προκύπτουν δύο συμπεράσματα.

Πρώτον, επιλέγοντας $b_k = a_k$ και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα για την διάσπαση

$$f = (f - s_n(f)) + s_n(f) = \left(f - \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k\right) + \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k, \tag{3.2.8}$$

παίρνουμε

$$\|f\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 + \left\|\sum_{k=-n}^{n} a_k e_k\right\|_2^2. \tag{3.2.9}$$

Όμως, η οικογένεια $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι ορθοκανονική, άρα

$$\left\|\sum_{k=-n}^{n} a_k e_k\right\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |a_k|^2, \tag{3.2.10}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\|f\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 + \sum_{k=-n}^{n} |a_k|^2. \tag{3.2.11}$$

Το δεύτερο συμπέρασμα που προκύπτει από την (3.2.7) είναι το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 3.2.2 (βέλτιστη προσέγγιση)**.** *Έστω $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με συντελεστές Fourier a_k. Για κάθε επιλογή μιγαδικών συντελεστών c_k, $|k|\leq n$, έχουμε*

$$\|f-s_n(f)\|_2\leq\left\|f-\sum_{k=-n}^{n}c_ke_k\right\|_2. \tag{3.2.12}$$

Επιπλέον, ισότητα ισχύει ακριβώς όταν $c_k=a_k$ για κάθε $|k|\leq n$.

Απόδειξη. Γράφουμε

$$f-\sum_{k=-n}^{n}c_ke_k=(f-s_n(f))+\sum_{k=-n}^{n}b_ke_k, \tag{3.2.13}$$

όπου $b_k=a_k-c_k$, και εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Είναι

$$\left\|f-\sum_{k=-n}^{n}c_ke_k\right\|_2^2=\|f-s_n(f)\|_2^2+\sum_{k=-n}^{n}|a_k-c_k|^2\geq\|f-s_n(f)\|_2^2, \tag{3.2.14}$$

με ισότητα ακριβώς όταν $\sum_{k=-n}^{n}|a_k-c_k|^2=0$, δηλαδή $c_k=a_k$ για κάθε $|k|\leq n$. □

Παρατήρηση 3.2.3. Η γεωμετρική ερμηνεία του Λήμματος είναι η εξής: αν θεωρήσουμε τον υπόχωρο $\mathcal{T}_n$ των τριγωνομετρικών πολυωνύμων που έχουν βαθμό το πολύ ίσο με n, τότε για κάθε $f\in\mathcal{R}$, το πλησιέστερο σημείο του $\mathcal{T}_n$ προς την f είναι το $s_n(f)$. Είναι η «ορθογώνια προβολή» της f στον υπόχωρο $\mathcal{T}_n$.

Συνεχίζουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1. Θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα βέλτιστης προσέγγισης και το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι «πυκνά» στον χώρο των συνεχών συναρτήσεων $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$.

Υποθέτουμε αρχικά, επιπλέον, ότι η f είναι συνεχής. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon>0$ και βρίσκουμε $n_0\in\mathbb{N}$ και τριγωνομετρικό πολυώνυμο p βαθμού n_0 ώστε

$$\|f-p\|_\infty=\max_{\theta\in\mathbb{T}}|f(\theta)-p(\theta)|<\varepsilon. \tag{3.2.15}$$

Ειδικότερα,

$$\|f-p\|_2=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)-p(\theta)|^2d\theta\right)^{1/2}\leq\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f-p\|_\infty^2d\theta\right)^{1/2}<\varepsilon. \tag{3.2.16}$$

Από το Λήμμα 3.2.2,

$$\|f-s_{n_0}(f)\|_2\leq\|f-p\|_2<\varepsilon. \tag{3.2.17}$$

Τώρα, για κάθε $n\geq n_0$ έχουμε $s_{n_0}(f)\in\mathcal{T}_n$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, πάλι από το Λήμμα 3.2.2 (στον $\mathcal{T}_n$ αυτή τη φορά),

$$\|f-s_n(f)\|_2\leq\|f-s_{n_0}(f)\|_2<\varepsilon. \tag{3.2.18}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\|f - s_n(f)\|_2 \to 0$ στην περίπτωση που η f είναι συνεχής.

Στη γενική περίπτωση, όπου η f είναι απλώς ολοκληρώσιμη, βρίσκουμε πρώτα συνεχή συνάρτηση g ώστε $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ και

$$\int_0^{2\pi} |f(\theta) - g(\theta)|\, d\theta < \frac{\pi\varepsilon^2}{4(\|f\|_\infty + 1)}. \tag{3.2.19}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\|f-g\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)-g(\theta)|^2 d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)-g(\theta)|\,(|f(\theta)| + |g(\theta)|)\, d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)-g(\theta)|\,(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)\, d\theta \\
&\leq \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)-g(\theta)|\, d\theta \\
&< \frac{\varepsilon^2}{4},
\end{aligned}$$

δηλαδή, $\|f-g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Για την συνεχή g βρίσκουμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε $\|g-p\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε,

$$\|f-p\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g-p\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{3.2.20}$$

Κατόπιν, συνεχίζουμε όπως πριν: χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.2.2, δείχνουμε ότι $\|f - s_n(f)\|_2 \to 0$. □

Μια άμεση συνέπεια της απόδειξης του Θεωρήματος 3.2.1 είναι η **ταυτότητα του Parseval**:

Θεώρημα 3.2.4 (ταυτότητα του Parseval)**.** *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε,*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2. \tag{3.2.21}$$

Απόδειξη. Έχουμε δει ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)|^2 + \|f - s_n(f)\|_2^2. \tag{3.2.22}$$

Αφού $\|f - s_n(f)\|_2 \to 0$, έπεται το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 3.2.5. Στην απόδειξη της $\|f\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 + \|s_n(f)\|_2^2$ χρησιμοποιήθηκε μόνο το γεγονός ότι το $\{e^{ik\theta} : |k| \leq n\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο. Με το ίδιο επιχείρημα μπορείτε εύκολα να ελέγξετε ότι: αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε όρθοκανονικό σύνολο $E = \{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ συναρτήσεων από την $\mathcal{R}$ και αν, για τυχόν n, θεωρήσουμε την συνάρτηση $f_n = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k$, τότε

$$\|f\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f_n\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2. \tag{3.2.23}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 \leq \|f\|_2^2, \tag{3.2.24}$$

για κάθε ορθοκανονικό σύνολο $E = \{e_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{R}$. Αυτή είναι η (γενική) **ανισότητα του Bessel**. Ισότητα στην ανισότητα του Bessel ισχύει για κάθε $f \in \mathcal{R}$, ακριβώς όταν το E είναι **βάση του** $\mathcal{R}$, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k \right\|_2 = 0 \tag{3.2.25}$$

για κάθε $f \in \mathcal{R}$.

Παρατήρηση 3.2.6. Μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση $T : \mathcal{R} \to \ell^2(\mathbb{Z})$ θέτοντας

$$T(f) = \{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}. \tag{3.2.26}$$

Παρατηρήστε ότι η T είναι γραμμική: αν $f, g \in \mathcal{R}$ και $a, b \in \mathbb{C}$, τότε

$$T(af + bg) = aT(f) + bT(g). \tag{3.2.27}$$

Επιπλέον, η ταυτότητα του Parseval δείχνει ότι η T είναι ισομετρία: για κάθε $f \in \mathcal{R}$,

$$\|T(f)\| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} = \|f\|_2. \tag{3.2.28}$$

Όπως έχουμε παρατηρήσει, ο $\mathcal{R}$ δεν είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|_2$, ενώ ο $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|$. Αυτό έχει ως συνέπεια το ότι *η T δεν είναι επί.* Αν ήταν, τότε ο $\mathcal{R}$ θα ήταν **ισομετρικά ισομορφικός** με τον $\ell^2(\mathbb{Z})$, άρα θα ήταν πλήρης (εξηγήστε γιατί).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι: *υπάρχουν ακολουθίες $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ με την ιδιότητα $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < +\infty$, για τις οποίες δεν υπάρχει $f \in \mathcal{R}$ ώστε $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.*

Άλλη, άμεση αλλά σημαντική, συνέπεια της ταυτότητας του Parseval είναι το Λήμμα Riemann–Lebesgue.

Θεώρημα 3.2.7 (Λήμμα Riemann–Lebesgue)**.** *Έστω $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, $\widehat{f}(k)\to 0$ όταν $|k|\to\infty$.* □

Παρατήρηση 3.2.8. Συχνά, χρησιμοποιούμε το Λήμμα Riemann–Lebesgue στην εξής μορφή: αν η $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$a_k(f)=\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin(k\theta)\,d\theta\to 0 \quad \text{και} \quad b_k(f)=\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(k\theta)\,d\theta\to 0 \tag{3.2.29}$$

όταν $k\to\infty$. Από τις σχέσεις που συνδέουν τους $\widehat{f}(k)$, $a_k(f)$ και $b_k(f)$, ελέγχουμε εύκολα ότι η πρόταση «$a_k(f)\to 0$ και $b_k(f)\to 0$ όταν $k\to\infty$» είναι ακριβώς ισοδύναμη με την «$\widehat{f}(k)\to 0$ όταν $|k|\to\infty$» (εξηγήστε γιατί).

Κλείνουμε αυτήν την Παράγραφο με μια γενίκευση της ταυτότητας του Parseval.

Πρόταση 3.2.9. *Έστω $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}\,d\theta=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}. \tag{3.2.30}$$

Απόδειξη. Αν V είναι ένας γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$, τότε

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\big[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2\big]. \tag{3.2.31}$$

Η ταυτότητα αυτή ελέγχεται άμεσα, με πράξεις. Παρατηρήστε τώρα ότι

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}\big[\|f+g\|_2^2-\|f-g\|_2^2+i\|f+ig\|_2^2-i\|f-ig\|_2^2\big]$$

και

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}=\frac{1}{4}\big[\|\widehat{f}(k)+\widehat{g}(k)\|^2-\|\widehat{f}(k)-\widehat{g}(k)\|^2+i\|\widehat{f}(k)+i\widehat{g}(k)\|^2-i\|\widehat{f}(k)-i\widehat{g}(k)\|^2\big].$$

Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα, αν εφαρμόσουμε την ταυτότητα του Parseval για τις $f+g$, $f-g$, $f+ig$ και $f-ig$. □

3.3 Σημειακή σύγκλιση και η αρχή της τοπικότητας

Το αποτέλεσμα της προηγούμενης Παραγράφου δεν μπορεί να εξασφαλίσει την ύπαρξη σημείων $\theta_0\in\mathbb{T}$ για τα οποία $s_n(f)(\theta_0)\to f(\theta_0)$. Γενικά, το πρόβλημα της σημειακής σύγκλισης είναι το δυσκολότερο στη μελέτη των σειρών Fourier. Το βασικό θεώρημα αυτής της Παραγράφου δείχνει ότι αν υποθέσουμε την ύπαρξη παραγώγου για την f στο θ_0 τότε η απάντηση είναι καταφατική.

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\theta_0 \in \mathbb{T}$, τότε*

$$s_n(f)(\theta_0) \to f(\theta_0). \tag{3.3.1}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε μια συνάρτηση $F : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ με

$$F(t) = \begin{cases} \frac{f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)}{t} & \text{αν } 0 < |t| \leq \pi \\ -f'(\theta_0) & \text{αν } t = 0 \end{cases}$$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο θ_0, από τον ορισμό της F βλέπουμε ότι $\lim_{t\to 0} F(t) = F(0)$, δηλαδή η F είναι συνεχής στο 0. Ειδικότερα, η F είναι φραγμένη σε μια περιοχή $(-\eta, \eta)$ του 0. Η f είναι φραγμένη, συνεπώς η F είναι φραγμένη στο $[-\pi, -\eta] \cup [\eta, \pi]$:

$$|F(t)| \leq \frac{|f(\theta_0 - t)| + |f(\theta_0)|}{|t|} \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\eta} \tag{3.3.2}$$

αν $\eta \leq |t| \leq \pi$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι η F είναι φραγμένη στο $[-\pi, \pi]$. Επιπλέον, η F είναι ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ για κάθε $0 < \delta < \pi$. Έπεται ότι η F είναι ολοκληρώσιμη (εξηγήστε γιατί, χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann).

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $s_n(f)(\theta_0) = (f * D_n)(\theta_0)$, γράφουμε

$$\begin{aligned} s_n(f)(\theta_0) - f(\theta_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta_0 - t) D_n(t)\, dt - f(\theta_0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta_0 - t) D_n(t)\, dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta_0) D_n(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)] D_n(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t)\, t D_n(t)\, dt. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} tD_n(t) &= t\, \frac{\sin(n + 1/2)t}{\sin(t/2)} \\ &= \frac{t}{\sin(t/2)} \big(\sin(nt) \cos(t/2) + \cos(nt) \sin(t/2) \big) \\ &= \frac{t \cos(t/2)}{\sin(t/2)} \sin(nt) + t \cos(nt) \\ &= g_1(t) \sin(nt) + g_2(t) \cos(nt), \end{aligned}$$

όπου οι συναρτήσεις $g_1(t) = \frac{t \cos(t/2)}{\sin(t/2)}$ και $g_2(t) = t$ είναι συνεχείς στο $[-\pi, \pi]$ (η g_1 επεκτείνεται συνεχώς στο 0, διότι $\lim_{t\to 0} \frac{t \cos(t/2)}{\sin(t/2)} = 2$). Τώρα, αφού οι $F(t) g_1(t)$ και

$F(t)g_2(t)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[-\pi,\pi]$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} s_n(f)(\theta_0) - f(\theta_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\, tD_n(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)g_1(t)\sin(nt)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)g_2(t)\,\cos(nt)\,dt \\ &\to 0+0=0 \end{aligned}$$

όταν $n\to\infty$, από το Λήμμα Riemann–Lebesgue. □

Παρατήρηση 3.3.2. Εξετάζοντας την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1 παρατηρούμε ότι το συμπέρασμα $s_n(f)(\theta_0)\to f(\theta_0)$ εξακολουθεί να ισχύει αν κάνουμε την εξής ασθενέστερη υπόθεση για την f: «η f είναι ολοκληρώσιμη και ικανοποιεί **συνθήκη Lipschitz** στο θ_0, δηλαδή, υπάρχει $M>0$ ώστε

$$|f(\theta_0-t)-f(\theta_0)|\leq M|t| \tag{3.3.3}$$

για κάθε $t\in[-\pi,\pi]$». Μπορούμε τότε να επαναλάβουμε την απόδειξη χωρίς καμία τροποποίηση.

Μια σημαντική συνέπεια του Θεωρήματος 3.3.1 είναι η **αρχή τοπικότητας του Riemann**: η σύγκλιση ή μη της ακολουθίας $s_n(f)(\theta_0)$ εξαρτάται μόνο από τη συμπεριφορά της f *σε μια περιοχή του* θ_0. Αυτό δεν είναι καθόλου προφανές αν σκεφτούμε ότι τα μερικά αθροίσματα $s_n(f)(\theta_0)$ ορίζονται μέσω των συντελεστών Fourier $\widehat{f}(k)$, $|k|\leq n$, της f και οι συντελεστές Fourier προκύπτουν με ολοκλήρωση στο $[-\pi,\pi]$, δηλαδή παίρνουν υπ' όψιν τους τις τιμές της f σε *ολόκληρο το* $[-\pi,\pi]$.

Θεώρημα 3.3.3. *Έστω $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $\theta_0\in\mathbb{T}$ και για κάποιο ανοικτό διάστημα $I\subset\mathbb{T}$ ώστε $\theta_0\in I$, ισχύει*

$$f(\theta)=g(\theta)\qquad \text{για κάθε } \theta\in I. \tag{3.3.4}$$

Τότε,

$$s_n(f)(\theta_0)-s_n(g)(\theta_0)\to 0. \tag{3.3.5}$$

Ειδικότερα, η $\{s_n(f)(\theta_0)\}$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\{s_n(g)(\theta_0)\}$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $h=f-g:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$. Η h είναι ολοκληρώσιμη και $h(\theta)=0$ για κάθε $\theta\in I$. Αφού το θ_0 είναι εσωτερικό σημείο του I, η h είναι παραγωγίσιμη στο θ_0, με $h'(\theta_0)=0$.

Από το Θεώρημα 3.3.1 βλέπουμε ότι

$$s_n(h)(\theta_0)\to h(\theta_0)=0. \tag{3.3.6}$$

Όμως,

$$s_n(h)(\theta_0)=s_n(f-g)(\theta_0)=s_n(f)(\theta_0)-s_n(g)(\theta_0). \tag{3.3.7}$$

Έπεται το ζητούμενο. □

3.4 Μια συνεχής συνάρτηση με σειρά Fourier που αποκλίνει σε ένα σημείο

Σε αυτήν την Παράγραφο θα δούμε ότι η υπόθεση ότι η $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ είναι *παντού συνεχής* δεν είναι αρκετή για να εξασφαλίσει την

$$f(x)=S[f](x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)e^{ikx} \tag{3.4.1}$$

για κάθε $x\in\mathbb{T}$. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε το εξής:

Θεώρημα 3.4.1. *Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ για την οποία*

$$\limsup_{n\to\infty}|s_n(f)(0)|=+\infty. \tag{3.4.2}$$

Δηλαδή, η $S[f](0)$ αποκλίνει.

Σημαντικό ρόλο στην απόδειξη παίζουν οι **τριγωνομετρικές σειρές**

$$\sum_{k\neq 0}\frac{e^{ikx}}{k}\qquad \text{και}\qquad \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{e^{ikx}}{k}. \tag{3.4.3}$$

Λήμμα 3.4.2. *Θεωρούμε την συνάρτηση*

$$f(x)=\begin{cases} i(\pi-x) & \text{αν } 0<x<\pi\\ -i(\pi+x) & \text{αν } -\pi<x<0\end{cases}$$

και την επεκτείνουμε περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Τότε, η σειρά Fourier της f είναι η

$$S[f](x)=\sum_{k\neq 0}\frac{e^{ikx}}{k}. \tag{3.4.4}$$

Απόδειξη. Η f είναι περιττή, άρα $\widehat{f}(0)=0$. Αν $k\neq 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
2\pi\widehat{f}(k) &= -i\int_{-\pi}^{0}(\pi+x)e^{-ikx}dx+i\int_{0}^{\pi}(\pi-x)e^{-ikx}dx\\
&= \left[-i(\pi+x)\frac{-e^{-ikx}}{ik}\right]_{-\pi}^{0}+i\int_{-\pi}^{0}\frac{e^{-ikx}}{ik}\,dx\\
&\quad+\left[i(\pi-x)\frac{-e^{-ikx}}{ik}\right]_{0}^{\pi}+i\int_{0}^{\pi}\frac{e^{-ikx}}{ik}\,dx\\
&= -i\pi\frac{-1}{ik}-i\pi\frac{-1}{ik}+i\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ikx}}{ik}\,dx\\
&= \frac{\pi}{k}+\frac{\pi}{k}=\frac{2\pi}{k},
\end{aligned}$$

διότι $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikx}}{ik}\,dx = 0$. Έπεται ότι, για κάθε $k \neq 0$,

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{k}, \tag{3.4.5}$$

και αυτό αποδεικνύει το Λήμμα. $\square$

Θα χρειαστούμε το εξής γενικό αποτέλεσμα, το οποίο παρουσιάζει ανεξάρτητο ενδιαφέρον.

Πρόταση 3.4.3. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν η $\{|k\widehat{f}(k)|\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι φραγμένη ακολουθία, τότε τα μερικά αθροίσματα $s_n(f)$ της σειράς Fourier της f είναι ομοιόμορφα φραγμένα:*

$$\sup_n \|s_n(f)\|_\infty < +\infty. \tag{3.4.6}$$

Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|s_n(f)(x)| \leq M \tag{3.4.7}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in \mathbb{T}$.

Για την απόδειξη της Πρότασης 3.4.3 χρειαζόμαστε το αντίστοιχο αποτέλεσμα για τους Cesàro μέσους της $S[f]$, το οποίο ισχύει σε πλήρη γενικότητα.

Λήμμα 3.4.4. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ισχύει ότι*

$$\sup_n \|\sigma_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty < +\infty. \tag{3.4.8}$$

Δηλαδή,

$$|\sigma_n(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \tag{3.4.9}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in \mathbb{T}$.

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in \mathbb{T}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(f)(x)| &= |(f * F_n)(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t)\,dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)F_n(t)|\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|\,F_n(t)\,dt \\
&\leq \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = \|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Βασικό ρόλο στην απόδειξη έπαιξε το γεγονός ότι ο πυρήνας F_n παίρνει μη αρνητικές πραγματικές τιμές. □

Απόδειξη της Πρότασης 3.4.3. Από την υπόθεση, υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|k\widehat{f}(k)| \leq M \tag{3.4.10}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{T}$. Θεωρούμε την διαφορά

$$\begin{aligned} s_n(f)(x) - \sigma_{n+1}(f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} - \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \widehat{f}(k)e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n+1}\, \widehat{f}(k)e^{ikx}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$|s_n(f)(x) - \sigma_{n+1}(f)(x)| \leq \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k\widehat{f}(k)|}{n+1} \leq \frac{(2n+1)M}{n+1} \leq 2M. \tag{3.4.11}$$

Τότε, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.4.4 βλέπουμε ότι

$$|s_n(f)(x)| \leq |s_n(f)(x) - \sigma_{n+1}(f)(x)| + |\sigma_{n+1}(f)(x)| \leq 2M + \|f\|_\infty.$$ □

Η Πρόταση 3.4.3 εφαρμόζεται στα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της συνάρτησης f του Λήμματος 3.4.2. Η σειρά

$$\sum_{k\neq 0} \frac{e^{ikx}}{k} \tag{3.4.12}$$

είναι σειρά Fourier ολοκληρώσιμης συνάρτησης και είναι φανερό ότι $|k\widehat{f}(k)| \leq 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς, υπάρχει $M > 0$ ώστε, για κάθε $x \in \mathbb{T}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{1\leq |k|\leq n} \frac{e^{ikx}}{k} \right| = |s_n(f)(x)| \leq M. \tag{3.4.13}$$

Παίρνουμε έτσι το εξής:

Λήμμα 3.4.5. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο*

$$f_n(x) = \sum_{1\leq |k|\leq n} \frac{e^{ikx}}{k}. \tag{3.4.14}$$

Υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n(x)| \leq M$ για κάθε n και για κάθε x. □

Περνάμε τώρα στην τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{e^{ikx}}{k}. \tag{3.4.15}$$

Με βάση την Πρόταση 3.4.3 μπορούμε να αποδείξουμε ότι *δεν υπάρχει* ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ώστε

$$S[g](x) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{e^{ikx}}{k}. \tag{3.4.16}$$

Πράγματι, αν υπήρχε τέτοια g, παρατηρώντας ότι $|k\widehat{g}(k)| \leq 1$ θα συμπεραίναμε, ακριβώς όπως στην περίπτωση του Λήμματος 3.4.5, ότι

$$\sup_n \|s_n(g)\|_\infty < +\infty. \tag{3.4.17}$$

Ειδικότερα, η ακολουθία $\{s_n(g)(0)\}$ θα έπρεπε να είναι φραγμένη. Όμως,

$$|s_n(g)(0)| = \left| \sum_{k=-n}^{-1} \frac{1}{k} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq c \log n \tag{3.4.18}$$

για κάποια σταθερά $c > 0$ ανεξάρτητη από το n. Δηλαδή, $|s_n(g)(0)| \to +\infty$ και οδηγούμαστε σε άτοπο.

Θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν ακριβώς την ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων. Με λίγο διαφορετικό συμβολισμό, έχουμε δείξει το εξής:

Λήμμα 3.4.6. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο*

$$g_n(x) = \sum_{k=-n}^{-1} \frac{e^{ikx}}{k}. \tag{3.4.19}$$

Υπάρχει $c > 0$ ώστε $|g_n(0)| \geq c \log n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.1. Χρησιμοποιώντας τις ακολουθίες των τριγωνομετρικών πολυωνύμων $\{f_n\}$ και $\{g_n\}$ κάνουμε την εξής κατασκευή.

(α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$p_n(x) = e^{i2nx} f_n(x) = \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{e^{i(k+2n)x}}{k}. \tag{3.4.20}$$

Παρατηρήστε ότι ο «φορέας» του p_n (δηλαδή το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ για τα οποία $\widehat{p_n}(m) \neq 0$) περιέχεται στο διάστημα $[n, 3n]$. Επίσης, για κάθε x,

$$|p_n(x)| = |e^{i2nx} f_n(x)| = |f_n(x)| \leq M, \tag{3.4.21}$$

από το Λήμμα 3.4.5.

Όμοια, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$q_n(x) = e^{i2nx} g_n(x) = \sum_{k=-n}^{-1} \frac{e^{i(k+2n)x}}{k}. \tag{3.4.22}$$

Παρατηρήστε ότι ο «φορέας» του q_n περιέχεται στο διάστημα $[n, 2n]$. Επίσης,

$$|q_n(0)| = |g_n(0)| \geq c \log n, \tag{3.4.23}$$

από το Λήμμα 3.4.6. Τέλος, παρατηρήστε ότι

$$s_{2n}(p_n) = q_n. \tag{3.4.24}$$

(β) Θεωρούμε μια ακολουθία $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ θετικών πραγματικών αριθμών ώστε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ να συγκλίνει. Κατόπιν, επιλέγουμε γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{N_k\}$ φυσικών αριθμών, η οποία ικανοποιεί τα εξής:

(i) $N_{k+1} > 3N_k$ για κάθε $k \geq 1$.

(ii) $a_k \log N_k \to +\infty$ όταν $k \to \infty$.

Για παράδειγμα, μπορούμε να επιλέξουμε $a_k = \frac{1}{k^2}$ και $N_k = 3^{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$.

(γ) Τώρα, ορίζουμε $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ως εξής:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p_{N_k}(x). \tag{3.4.25}$$

Από το κριτήριο του Weierstrass, η σειρά συναρτήσεων του δεξιού μέλους συγκλίνει ομοιόμορφα: αν $r_k(x) = a_k p_{N_k}(x)$, τότε

$$\|r_k\|_\infty = a_k \|p_{N_k}\|_\infty \leq M a_k, \tag{3.4.26}$$

και

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|r_k\|_\infty = M \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty. \tag{3.4.27}$$

Αφού κάθε r_k είναι συνεχής συνάρτηση (τριγωνομετρικό πολυώνυμο), η f είναι συνεχής.

(δ) Παρατηρήστε ότι, για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$s_{3N_m}(f)(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k p_{N_k}(x), \tag{3.4.28}$$

αλλά, από την (3.4.24),

$$s_{2N_1}(f)(x) = a_1 q_{N_1}(x) \tag{3.4.29}$$

και, για κάθε $m \geq 2$,

$$s_{2N_m}(f)(x) = \sum_{k=1}^{m-1} a_k p_{N_k}(x) + a_m q_{N_m}(x). \tag{3.4.30}$$

Ειδικότερα, για $x = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} |s_{2N_m}(f)(0)| &= \left| \sum_{k=1}^{m-1} a_k p_{N_k}(0) + a_m q_{N_m}(0) \right| \\ &\geq a_m |q_{N_m}(0)| - \sum_{k=1}^{m-1} a_k |p_{N_k}(0)| \\ &\geq c a_m \log N_m - M \sum_{k=1}^{m-1} a_k \\ &\geq c a_m \log N_m - M \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \end{aligned}$$

Από τον ορισμό των a_m και N_m, έχουμε $a_m \log N_m \to +\infty$ όταν $m \to \infty$. Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$, συμπεραίνουμε ότι

$$|s_{2N_m}(f)(0)| \to +\infty. \tag{3.4.31}$$

Δηλαδή, $\limsup |s_n(f)(0)| = +\infty$. Άρα, η $S[f](0)$ αποκλίνει. □

3.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Δείξτε ότι ο $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι πλήρης.

2. Θεωρούμε τον χώρο $\mathcal{R}$ των ολοκληρώσιμων $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με τη νόρμα

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

(α) Δείξτε ότι, αν $f \in \mathcal{R}$ και $\|f\|_2 = 0$, τότε $f(x) = 0$ σε κάθε σημείο x στο οποίο η f είναι συνεχής.

(β) Αντίστροφα, δείξτε ότι αν η f παίρνει την τιμή 0 σε όλα τα σημεία στα οποία είναι συνεχής, τότε $\|f\|_2 = 0$.

3. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ με

$$f(\theta)=\begin{cases}\ln(1/\theta) & \text{αν } 0<\theta\leq 2\pi\\ 0 & \text{αν } \theta=0\end{cases}$$

Δείξτε ότι η f δεν ανήκει στον $\mathcal{R}$. Θεωρούμε τώρα την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, όπου

$$f_n(\theta)=\begin{cases}\ln(1/\theta) & \text{αν } \frac{1}{n}<\theta\leq 2\pi\\ 0 & \text{αν } 0\leq\theta\leq\frac{1}{n}\end{cases}$$

Δείξτε ότι κάθε f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη και ότι η $\{f_n\}$ είναι βασική ακολουθία του $\mathcal{R}$, αλλά δεν υπάρχει $g\in\mathcal{R}$ ώστε $\lim_{n\to\infty}\|g-f_n\|_2=0$.

4. Θεωρούμε την ακολουθία $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ με

$$a_k=\begin{cases}\frac{1}{k} & \text{αν } k\geq 1\\ 0 & \text{αν } k\leq 0\end{cases}$$

Δείξτε ότι $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}\in\ell^2(\mathbb{Z})$ αλλά δεν υπάρχει $f\in\mathcal{R}$ με την ιδιότητα $\widehat{f}(k)=a_k$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$.

5. Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=|x|$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}\qquad\text{και}\qquad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Χρησιμοποιώντας την 2π-περιοδική περιττή συνάρτηση $g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x(\pi-x)$ στο $[0,\pi]$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}=\frac{\pi^6}{960}\qquad\text{και}\qquad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{\pi^6}{945}.$$

6. Δείξτε ότι: αν $\alpha\notin\mathbb{Z}$, τότε η σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}e^{i(\pi-x)\alpha}$$

στο $[0,2\pi]$, είναι η

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k+\alpha}.$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Parseval, συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}.$$

Ομάδα Β΄

7. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $\{f_n\}$ ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx = 0,$$

αλλά για κάθε $x \in [0,2\pi]$ η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει.

8. Δείξτε ότι η τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}$$

συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αλλά δεν είναι η σειρά Fourier κάποιας Riemann ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

9. Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως.

10. (α) Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $k \neq 0$. Δείξτε ότι

$$\widehat{f}(k) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi/k) e^{-ikx} dx,$$

και συμπεράνατε ότι

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+\pi/k)] e^{-ikx} dx.$$

(β) Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί την συνθήκη Hölder $|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^\alpha$ για κάποιον $0 < \alpha \leq 1$, κάποια σταθερά $C > 0$ και για κάθε x, h. Χρησιμοποιώντας το (α) δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|k|^\alpha |\widehat{f}(k)| \leq M$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(γ) Δείξτε ότι, αν $0 < \alpha < 1$, τότε η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{i2^k x}$$

ικανοποιεί τη συνθήκη Hölder του (β), και

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{αν } \ k = 2^s, s \in \mathbb{N}.$$

Ομάδα Γ΄

11. (α) Έστω $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\int_0^{2\pi} g(t)\,dt = 0$. Δείξτε ότι

$$\left| \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\,dt \right|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 dt.$$

(β) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(a) = f(b) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$

12. Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

13. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Lipshitz

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$ σταθερά.
(α) Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $g_t(x) = f(x+t) - f(x-t)$. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2$$

και συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leq K^2 t^2.$$

(β) Έστω $p \in \mathbb{N}$. Επιλέγοντας $t = \pi/2^{p+1}$, δείξτε ότι

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2 \pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) Δώστε άνω φράγμα για το

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\widehat{f}(k)|$$

και συμπεράνατε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

Ομάδα Δ΄

14. Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{M}{k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

15. Έστω $\{\varepsilon_k\}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\varepsilon_k \to 0$. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με την ιδιότητα: για άπειρες τιμές του $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f}(k)| \geq \varepsilon_k.$$

16. Ο **συζυγής πυρήνας του Dirichlet** ορίζεται από την

$$\tilde{D}_n(x) = \sum_{|k|\leq n} \mathrm{sign}(x) e^{ikx},$$

όπου $\mathrm{sign}(x)$ είναι το πρόσημο του x.
(α) Δείξτε ότι

$$\tilde{D}_n(x) = \frac{\cos(x/2) - \cos((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{D}_n(x)|\, dx \leq c \log n.$$

(β) Δείξτε ότι: αν η $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$(f * \tilde{D}_n)(0) \leq C \log n.$$

(γ) Δείξτε ότι, για κάθε $0 < \alpha < 1$, η τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$$

συγκλίνει για κάθε x, αλλά δεν είναι σειρά Fourier κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

17. Έστω $\alpha > 1/2$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Hölder

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$ σταθερά. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

Μέρος II

Ολοκλήρωμα Lebesgue

Κεφάλαιο 4

Μέτρο Lebesgue

4.1 Εισαγωγή

Το βασικό μειονέκτημα του ολοκληρώματος Riemann είναι ότι δεν συμπεριφέρεται αρκετά καλά σε σχέση με τις συγκλίνουσες ακολουθίες συναρτήσεων: Έστω $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι οι f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμες και ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, δεν μπορούμε πάντα να συμπεράνουμε ότι

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx \tag{4.1.1}$$

(κάτι που ισχύει αν υποθέσουμε ότι η (f_n) συγκλίνει στην f *ομοιόμορφα*).

Για την ακρίβεια, με την υπόθεση της κατά σημείο σύγκλισης δεν μπορούμε κάν να συμπεράνουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη: αυτό δεν ισχύει γενικά, ακόμα κι αν υποθέσουμε ότι $f_n \nearrow f$.

Παράδειγμα 4.1.1. Θεωρούμε την συνάρτηση του Dirichlet $f = \chi_{\mathbb{Q}} : [0,1] \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχεται ότι η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Αν όμως θεωρήσουμε μια αρίθμηση $\{q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots\}$ του $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, και αν ορίσουμε $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{q_1, \ldots, q_n\} \\ 0, & x \notin \{q_1, \ldots, q_n\}, \end{cases}$$

τότε $f_n \nearrow f$ στο $[0,1]$ και κάθε f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη, αφού είναι φραγμένη και έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας.

Ένα δεύτερο μειονέκτημα του ολοκληρώματος Riemann είναι ότι η κλάση των συναρτήσεων που είναι Riemann ολοκληρώσιμες είναι σχετικά περιορισμένη: μπορούμε να ολοκληρώνουμε μόνο φραγμένες συναρτήσεις που ορίζονται σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα. Επιπλέον, συναρτήσεις που διαφέρουν από σταθερή συνάρτηση σε ένα μικρό (αριθμήσιμο) σύνολο μπορεί να μην είναι Riemann ολοκληρώσιμες (παράδειγμα, η συνάρτηση του Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}}$).

Όπως θα δούμε στην συνέχεια, μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν είναι συνεχής «σχεδόν παντού». Η έννοια αυτή θα οριστεί αυστηρά αργότερα, μπορούμε όμως να δώσουμε κάποια διαισθητική ερμηνεία χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann: Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, για λεπτές διαμερίσεις $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ η ποσότητα

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) \tag{4.1.2}$$

πρέπει να είναι μικρή. Αυτό σημαίνει ότι η f δεν μπορεί να έχει μεγάλη «ταλάντωση» σε «πολλά σημεία».

Η ιδέα του Lebesgue ήταν να προσεγγίσει το εμβαδόν κάτω από το γράφημα μιας θετικής συνάρτησης ξεκινώντας με διαμερίσεις του πεδίου τιμών και όχι του πεδίου ορισμού της. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε, για απλότητα, ότι η f είναι φραγμένη και ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$, και θέτουμε $m = \inf(f)$, $M = \sup(f)$. Αν

$$\{m = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = M\} \tag{4.1.3}$$

είναι μια διαμέριση του πεδίου τιμών $[m, M]$, το ολοκλήρωμα της f προσεγγίζεται από αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot \ell(B_k) \tag{4.1.4}$$

όπου $\ell(B_k)$ το «μήκος» του συνόλου

$$B_k = \{x \in A \mid y_k \leq f(x) < y_{k+1}\}. \tag{4.1.5}$$

Για να προχωρήσουμε με αυτόν τον τρόπο, πρέπει βέβαια να ορίσουμε αυστηρά με ποιόν τρόπο «μετράμε» το «μήκος» ενός συνόλου που δεν είναι διάστημα (τα σύνολα B_k μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκα υποσύνολα της πραγματικής ευθείας).

Ο Lebesgue ανέπτυξε μια θεωρία «μέτρου» και ολοκλήρωσης στη διδακτορική του διατριβή, η οποία δημοσιεύτηκε το 1902. Το ολοκλήρωμα Lebesgue επιτυγχάνει τα εξής:

(i) Επεκτείνει το ολοκλήρωμα Riemann σε μια ευρύτερη κλάση συναρτήσεων.

(ii) Συμπεριφέρεται καλύτερα σε σχέση με τα όρια ακολουθιών συναρτήσεων.

(iii) Επιτρέπει να ολοκληρώνουμε πάνω από «περισσότερα» σύνολα, όχι μόνο πάνω από διαστήματα.

4.2 Εξωτερικό μέτρο Lebesgue

Θα θέλαμε να ορίσουμε το «μήκος» κάθε υποσυνόλου A του $\mathbb{R}$, δηλαδή να αντιστοιχίσουμε σε κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ έναν μη αρνητικό αριθμό $\mu(A)$ (ή το $+\infty$). Είναι λογικό να ζητήσουμε να ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $\mu([a,b]) = b - a$.

(ii) $\mu(A+x) = \mu(A)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Αν (A_n) είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τότε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{4.2.1}$$

(αριθμήσιμη προσθετικότητα).

Όπως θα δούμε, η τελευταία ιδιότητα δημιουργεί προβλήματα. Ακόμα κι αν ζητήσουμε την προσθετικότητα μόνο για ενώσεις πεπερασμένων το πλήθος ξένων ανά δύο συνόλων, αποδεικνύεται (αν δεχτούμε το Αξίωμα της Επιλογής) ότι *δεν* υπάρχει τρόπος να ορίσουμε το «μήκος» έτσι ώστε να ισχύουν οι δύο πρώτες ιδιότητες και η

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \tag{4.2.2}$$

για όλα τα $A, B \subset \mathbb{R}$ με $A \cap B = \emptyset$. Η στρατηγική που θα ακολουθήσουμε είναι η εξής: αντί να περιορίσουμε τις απαιτήσεις μας, θα περιοριστούμε σε μία κλάση υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ στην οποία μπορεί να οριστεί το μήκος μ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι (i), (ii) και (iii). Αυτά θα είναι τα «μετρήσιμα» σύνολα. Το ευτύχημα είναι ότι η κλάση αυτή είναι αρκετά μεγάλη.

§1. Ορισμός του εξωτερικού μέτρου Lebesgue

Σε κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ θα αντιστοιχίσουμε έναν αριθμό $\mu^*(A) \geq 0$ ή $+\infty$, το **εξωτερικό μέτρο** του A.

Έστω $I = (a,b)$ ένα φραγμένο ανοικτό διάστημα. Το μήκος του I συμβολίζεται με

$$\ell(I) := b - a. \tag{4.2.3}$$

Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και (I_n) μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία φραγμένων ανοικτών διαστημάτων με την ιδιότητα $A \subseteq \bigcup_n I_n$, λέμε ότι η (I_n) είναι μια **κάλυψη** του A. Αν η (I_n) είναι κάλυψη του A, το άθροισμα $\sum_n \ell(I_n)$ δίνει μια «από πάνω» εκτίμηση για το «μέτρο» του A. Είναι δηλαδή λογικό να ζητήσουμε

$$\mu^*(A) \leq \sum_n \ell(I_n) \tag{4.2.4}$$

για όλες τις καλύψεις του A. Έτσι, οδηγούμαστε στον εξής ορισμό.

Ορισμός 4.2.1 (εξωτερικό μέτρο Lebesgue)**.** Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Το **εξωτερικό μέτρο** του A είναι το

$$\mu^*(A) = \inf \Big\{ \sum_n \ell(I_n) : (I_n) \ \ \textit{κάλυψη του } A \Big\}. \tag{4.2.5}$$

Παρατηρήσεις 4.2.2. (α) Μπορούμε, αν ορίσουμε $\ell(\emptyset) = 0$ και αν θεωρήσουμε το κενό σύνολο ως «διάστημα», να θεωρούμε ότι οι καλύψεις στον ορισμό είναι πάντα άπειρες αριθμήσιμες. Αν (I_n) είναι μια κάλυψη του A από πεπερασμένα το πλήθος (γνήσια) φραγμένα ανοικτά διαστήματα, την επεκτείνουμε σε «άπειρη» κάλυψη παίρνοντας επιπλέον το κενό σύνολο άπειρες φορές. Για τον λόγο αυτό, θα γράφουμε συνήθως $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ για τις καλύψεις συνόλων, $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)$ για τις εκτιμήσεις των εξωτερικών μέτρων, και ο ορισμός μας γίνεται

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \mid A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \ I_n \text{ ανοικτό διάστημα ή } \emptyset \right\}. \tag{4.2.6}$$

(β) Συμφωνούμε ότι $\inf\{+\infty\} = +\infty$. Άρα, αν συμβεί να έχουμε

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = +\infty, \tag{4.2.7}$$

τότε $\mu^*(A) = +\infty$.

(γ) Με την παραπάνω σύμβαση, το εξωτερικό μέτρο ορίζεται καλά για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ και είναι μη αρνητικός αριθμός ή $+\infty$. Πράγματι, κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ δέχεται τουλάχιστον μία κάλυψη, την $I_n = (-n, n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

§2. Ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου Lebesgue

Οι επόμενες Προτάσεις περιγράφουν τις βασικές ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου Lebesgue.

Πρόταση 4.2.3. *Αν $A \subseteq B$, τότε $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*

Απόδειξη. Αν $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, τότε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Άρα,

$$\Big\{ \sum_n \ell(I_n) : (I_n) \ \ \text{κάλυψη του } A \Big\} \supseteq \Big\{ \sum_n \ell(I_n) : (I_n) \ \ \text{κάλυψη του } B \Big\}, \tag{4.2.8}$$

απ' όπου έπεται ότι $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. □

Πρόταση 4.2.4. *Αν το A είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο, τότε $\mu^*(A) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε την ακολουθία ανοικτών διαστημάτων

$$I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right). \tag{4.2.9}$$

Τότε, $A \subseteq \bigcup_n I_n$ και

$$\sum_n \ell(I_n) = \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \varepsilon. \tag{4.2.10}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\mu^*(A) = 0$. □

Πρόταση 4.2.5. *$\mu^*(A + x) = \mu^*(A)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Αν $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, τότε $A + x \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, όπου $J_n = I_n + x$. Παρατηρήστε ότι $\ell(I + x) = \ell(I) = b - a$ για κάθε ανοικτό διάστημα $I = (a, b)$. Συνεπώς,

$$\mu^*(A + x) \leq \sum_n \ell(J_n) = \sum_n \ell(I_n). \tag{4.2.11}$$

Παίρνοντας infimum ως προς όλες τις καλύψεις (I_n) του A, συμπεραίνουμε ότι

$$\mu^*(A + x) \leq \mu^*(A). \tag{4.2.12}$$

Η αντίστροφη ανισότητα αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο. □

Πρόταση 4.2.6. $\mu^*([a, b]) = b - a$.

Απόδειξη. Για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $[a, b] \subset I_\varepsilon := (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Άρα,

$$\mu^*([a, b]) \leq \ell(I_\varepsilon) = (b - a) + 2\varepsilon. \tag{4.2.13}$$

Συνεπώς, $\mu^*([a, b]) \leq b - a$.

Για την αντίστροφη ανισότητα πρέπει να δείξουμε ότι αν (I_n) είναι μια καλυψη του $[a, b]$ από ανοικτά διαστήματα, τότε

$$b - a \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n). \tag{4.2.14}$$

Βήμα 1: Έστω ότι $[a, b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Αφού το $[a, b]$ είναι συμπαγές, από το Θεώρημα Heine-Borel υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της (I_n): μπορούμε δηλαδή να βρούμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$[a, b] \subset I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k. \tag{4.2.15}$$

Βήμα 2: Έστω ότι $[a,b] \subset (c_1,d_1) \cup \cdots \cup (c_k,d_k)$. Θα δείξουμε ότι

$$b-a < \sum_{n=1}^{k}(d_n - c_n). \tag{4.2.16}$$

Υπάρχει n_1 ώστε $a \in (c_{n_1}, d_{n_1})$. Αν $d_{n_1} > b$, τότε

$$b-a < d_{n_1} - c_{n_1} \leq \sum_{n=1}^{k}(d_n - c_n). \tag{4.2.17}$$

Αν $d_{n_1} \leq b$, τότε $d_{n_1} \in (a,b]$, άρα υπάρχει n_2 ώστε $d_{n_1} \in (c_{n_2}, d_{n_2})$. Αν $d_{n_2} \leq b$, τότε $d_{n_2} \in (a,b]$, άρα υπάρχει n_3 ώστε $d_{n_2} \in (c_{n_3}, d_{n_3})$. Συνεχίζοντας έτσι, φτάνουμε σε κάποιον δείκτη n_s ώστε $b < d_{n_s}$ (στην χειρότερη περίπτωση εξαντλώντας όλα τα (c_n, d_n): υπάρχει n ώστε $c_n < b < d_n$).

Έχουμε λοιπόν βρεί $n_1, \ldots, n_s$ ώστε $c_{n_1} < a$, $b < d_{n_s}$ και

$$c_{n_2} < d_{n_1} < d_{n_2},\ c_{n_3} < d_{n_2} < d_{n_3},\ \ldots,\ c_{n_s} < d_{n_{s-1}} < d_{n_s}. \tag{4.2.18}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k}(d_n - c_n) &\geq (d_{n_s} - c_{n_s}) + (d_{n_{s-1}} - c_{n_{s-1}}) + \cdots + (d_{n_2} - c_{n_2}) + (d_{n_1} - c_{n_1}) \\
&\geq (d_{n_s} - c_{n_s}) + (c_{n_s} - c_{n_{s-1}}) + \cdots + (c_{n_3} - c_{n_2}) + (c_{n_2} - c_{n_1}) \\
&= d_{n_s} - c_{n_1} \\
&> b - a.
\end{aligned}$$

Από τα Βήματα 1 και 2 προκύπτει ότι

$$b-a < \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \tag{4.2.19}$$

για κάθε κάλυψη (I_n) του $[a,b]$. Άρα, $\mu^*([a,b]) \geq b-a$. $\square$

Παρατήρηση 4.2.7. Από τις Προτάσεις 4.2.4 και 4.2.6 προκύπτει άμεσα ότι κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$ είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

Πρόταση 4.2.8. $\mu^*\big((a,b)\big) = b-a$.

Απόδειξη. Για κάθε $0 < \varepsilon < (b-a)/2$ έχουμε $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset (a,b) \subset [a,b]$. Από την Πρόταση 4.2.3,

$$(b-a) - 2\varepsilon = \mu^*([a+\varepsilon, b-\varepsilon]) \leq \mu^*\big((a,b)\big) \leq \mu^*([a,b]) = b-a. \tag{4.2.20}$$

Αφού η ανισότητα ισχύει για όλα τα «μικρά» $\varepsilon > 0$, βλέπουμε ότι $\mu^*\big((a,b)\big) = b-a$. $\square$

Πρόταση 4.2.9. $\mu^*\big((a,+\infty)\big) = +\infty$.

Απόδειξη. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε $(a,+\infty) \supset (a,a+N)$, άρα

$$\mu^*\big((a,+\infty)\big) \geq a+N-a = N. \tag{4.2.21}$$

Άρα, $\mu^*\big((a+\infty)\big) = +\infty$. □

Πρόταση 4.2.10 (αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου)**.** *Για κάθε πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία (A_n) υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ισχύει*

$$\mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu^*(A_n). \tag{4.2.22}$$

Απόδειξη. Αν το δεξιό μέλος της ανισότητας είναι $+\infty$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\sum_n \mu^*(A_n) < +\infty$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάλυψη (J_s) του $\bigcup_n A_n$ από ανοικτά διαστήματα, ώστε $\sum_s \ell(J_s) < \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon$.

Για κάθε n θεωρούμε κάλυψη $(I_n^k)_k$ του A_n με την ιδιότητα

$$\sum_k \ell(I_n^k) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{4.2.23}$$

Αν πάρουμε σαν (J_s) την οικογένεια $(I_n^k)_{n,k}$ όλων αυτών των ανοικτών διαστημάτων, τότε

$$\bigcup_n A_n \subset \bigcup_{n,k} I_n^k \tag{4.2.24}$$

και

$$\sum_{n,k} \ell(I_n^k) = \sum_n \sum_k \ell(I_n^k) < \sum_n \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon. \tag{4.2.25}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται η (4.2.22). □

4.3 Μετρήσιμα σύνολα

Ο αρχικός μας στόχος ήταν να πετύχουμε την αριθμήσιμη προσθετικότητα του «μέτρου»: θα θέλαμε λοιπόν να ισχύει η

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \tag{4.3.1}$$

αν τα A_n είναι ξένα ανά δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Το εξωτερικό μέτρο που ορίσαμε δεν έχει την ιδιότητα της προσθετικότητας: ακόμα κι αν περιοριστούμε στην περίπτωση *δύο* ξένων υποσυνόλων A και B του $[0,1]$, μπορούμε να δώσουμε παράδειγμα όπου

$$\mu^*(A \cup B) < \mu^*(A) + \mu^*(B). \tag{4.3.2}$$

Η κατασκευή ενός τέτοιου παραδείγματος δεν είναι απλή: χρησιμοποιεί το Αξίωμα της Επιλογής (βλέπε §4.6).

Αυτό που θα κάνουμε είναι να περιοριστούμε σε μία κλάση $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ έτσι ώστε ο περιορισμός της «συνάρτησης εξωτερικού μέτρου» μ^* στην $\mathcal{M}$ να ικανοποιεί την ιδιότητα της αριθμήσιμης προσθετικότητας. Η $\mathcal{M}$ είναι η κλάση των **Lebesgue μετρήσιμων συνόλων**.

Ορισμός 4.3.1 (Lebesgue μετρήσιμο σύνολο)**.** Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται **Lebesgue μετρήσιμο** αν για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c). \tag{4.3.3}$$

Δηλαδή, ένα σύνολο είναι μετρήσιμο αν «χωρίζει σωστά» – ως προς το εξωτερικό μέτρο – οποιοδήποτε άλλο σύνολο. Η κλάση των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων συμβολίζεται με $\mathcal{M}$. Ο περιορισμός του μ^* στην $\mathcal{M}$ λέγεται **μέτρο Lebesgue**.

Παρατήρηση 4.3.2. Από την $X = (X \cap A) \cup (X \cap A^c)$ και από την υποπροσθετικότητα του μ^*, έχουμε πάντα την ανισότητα

$$\mu^*(X) \leq \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c). \tag{4.3.4}$$

Αυτό λοιπόν που χρειαζόμαστε για να δείξουμε την μετρησιμότητα του A είναι η αντίστροφη ανισότητα

$$\mu^*(X) \geq \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) \tag{4.3.5}$$

για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}$.

§1. Βασικές ιδιότητες της κλάσης των μετρήσιμων συνόλων

Οι επόμενες Προτάσεις περιγράφουν τις βασικές ιδιότητες της κλάσης των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων.

Πρόταση 4.3.3. *Αν $\mu^*(A) = 0$, τότε $A \in \mathcal{M}$.*

Απόδειξη. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Τότε, $X \cap A \subseteq A$ άρα $\mu^*(X \cap A) = 0$. Επίσης, $X \supseteq X \cap A^c$ άρα

$$\mu^*(X) \geq \mu^*(X \cap A^c) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c). \tag{4.3.6}$$

Από την Παρατήρηση 4.3.2 έπεται το ζητούμενο. □

Πρόταση 4.3.4. *Το συμπλήρωμα μετρήσιμου συνόλου είναι μετρήσιμο σύνολο: αν $A \in \mathcal{M}$ τότε $A^c = \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{M}$.*

Απόδειξη. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι

$$\mu^*(X) \geq \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) = \mu^*(X \cap A^c) + \mu^*(X \cap (A^c)^c), \tag{4.3.7}$$

όπου η πρώτη ανισότητα ισχύει διότι $A \in \mathcal{M}$ και η ισότητα μετά προκύπτει από το γεγονός ότι $A = (A^c)^c$. Από την Παρατήρηση 4.3.2 έπεται το ζητούμενο. □.

Πρόταση 4.3.5. *Η ένωση δύο μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμο σύνολο: αν $A, B \in \mathcal{M}$, τότε $A \cup B \in \mathcal{M}$.*

Απόδειξη. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$$X \cap (A \cup B) = X \cap (A \cup (A^c \cap B)) = (X \cap A) \cup (X \cap A^c \cap B) \tag{4.3.8}$$

και, χρησιμοποιώντας την μετρησιμότητα των A και B, έχουμε

$$\begin{aligned} \mu^*(X \cap (A \cup B)) + \mu^*(X \cap (A \cup B)^c) &= \mu^*((X \cap A) \cup (X \cap A^c \cap B)) \\ &\quad + \mu^*(X \cap (A \cup B)^c) \\ &\leq \mu^*(X \cap A) + \mu^*((X \cap A^c) \cap B) \\ &\quad + \mu^*((X \cap A^c) \cap B^c) \\ &\leq \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) \\ &= \mu^*(X). \end{aligned}$$

Από την Παρατήρηση 4.3.2 έπεται ότι το $A \cup B$ είναι μετρήσιμο. □

Πρόταση 4.3.6. *Αν $A, B \in \mathcal{M}$ και $A \cap B = \emptyset$ τότε, για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}$,*

$$\mu^*(X \cap (A \cup B)) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap B). \tag{4.3.9}$$

Απόδειξη. Αρκεί να υποθέσουμε ότι το ένα από τα δύο σύνολα, ας πούμε το A, είναι μετρήσιμο. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \mu^*(X \cap (A \cup B)) &= \mu^*([X \cap (A \cup B)] \cap A) + \mu^*([X \cap (A \cup B)] \cap A^c) \\ &= \mu^*(X \cap A) + \mu^*(x \cap B), \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $[X \cap (A \cup B)] \cap A^c = (X \cap A \cap A^c) \cup (X \cap B \cap A^c) = X \cap B$ και $[X \cap (A \cup B)] \cap A = (X \cap A) \cup (X \cap A \cap B) = X \cap A$, λόγω της $A \cap B = \emptyset$. □

Πόρισμα 4.3.7. *Αν $A, B \in \mathcal{M}$ και $A \cap B = \emptyset$, τότε*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B). \tag{4.3.10}$$

Απόδειξη. Παίρνουμε $X = \mathbb{R}$ στην Πρόταση 4.3.6. □

Πόρισμα 4.3.8. *Αν $B_1, \ldots, B_m$ είναι ξένα ανά δύο σύνολα στην $\mathcal{M}$ τότε, για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}$,*

$$\mu^*(X \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_m)) = \sum_{i=n}^{m} \mu^*(X \cap B_n). \tag{4.3.11}$$

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς m, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.3.6. □

Πρόταση 4.3.9. *Η τομή δύο μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμο σύνολο: αν $A, B \in \mathcal{M}$, τότε $A \cap B \in \mathcal{M}$.*

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ και χρησιμοποιούμε τις Προτάσεις 4.3.4 και 4.3.5. □

Πρόταση 4.3.10. *Αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συνόλων, τότε η ένωσή τους $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι μετρήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1 = A_2 \cap A_1^c, \dots,\ B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}), \dots. \tag{4.3.12}$$

Από τις ιδιότητες που έχουμε αποδείξει, κάθε B_n είναι μετρήσιμο σύνολο. Από τον τρόπο ορισμού τους, τα B_n είναι ξένα ανά δύο και

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n. \tag{4.3.13}$$

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, το $B_1 \cup \cdots \cup B_m$ είναι μετρήσιμο, άρα

$$\begin{aligned} \mu^*(X) &= \mu^*(X \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_m)) + \mu^*(X \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_m)) \\ &= \sum_{n=1}^{m} \mu^*(X \cap B_n) + \mu^*(X \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_m)) \\ &\geq \sum_{n=1}^{m} \mu^*(X \cap B_n) + \mu^*(X \setminus A), \end{aligned}$$

από το Πόρισμα 4.3.8 και τον εγκλεισμό $X \setminus A \subseteq X \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_m)$. Αφήνοντας το $m \to \infty$, παίρνουμε

$$\mu^*(X) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(X \cap B_n) + \mu^*(X \setminus A) \geq \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \setminus A), \tag{4.3.14}$$

λόγω της αριθμήσιμης υποπροσθετικότητας του εξωτερικού μέτρου. Άρα, το A είναι μετρήσιμο. □

4.4 Μέτρο Lebesgue

Συνοψίζουμε όσα έχουμε κάνει ως τώρα. Ορίσαμε το εξωτερικό μέτρο $\mu^*(A)$ για κάθε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$. Θεωρήσαμε μια κλάση $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τα οποία ονομάσαμε μετρήσιμα σύνολα. Είδαμε ότι αυτή η κλάση έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$.

(ii) $A \in \mathcal{M} \Longrightarrow \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{M}$.

(iii) Αν $A_n \in \mathcal{M}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Οι ιδιότητες αυτές χαρακτηρίζουν τις **σ-άλγεβρες**:

Ορισμός 4.4.1 (σ-άλγεβρα)**.** Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο. Μια κλάση $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του Ω λέγεται σ-άλγεβρα αν

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

(iii) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Με άλλα λόγια, μια κλάση υποσυνόλων του Ω λέγεται σ-άλγεβρα αν είναι «κλειστή ως προς συμπληρώματα και αριθμήσιμες ενώσεις». Έπεται ότι είναι κλειστή και ως προς αριθμήσιμες τομές και διαφορές:

(iv) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c \in \mathcal{A}.$$

(v) Αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

Παρατήρηση 4.4.2. Ειδικότερα, αν $A_n \in \mathcal{M}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$, και αν $A, B \in \mathcal{M}$, τότε $A \setminus B \in \mathcal{M}$.

Με βάση τον Ορισμό 4.4.1, η κλάση $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων συνόλων είναι σ-άλγεβρα. Ορίζουμε $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ με $A \mapsto \mu(A) := \mu^*(A)$. Δηλαδή, η μ είναι ο περιορισμός της συνολοσυνάρτησης μ^* (του εξωτερικού μέτρου) στην κλάση $\mathcal{M}$. Η συνάρτηση μ ονομάζεται **μέτρο Lebesgue** ή απλά **μέτρο**.

Με την παραπάνω ορολογία, έχουμε δείξει το εξής:

Θεώρημα 4.4.3. *Έστω $\mathcal{M} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ Lebesgue μετρήσιμο}\}$. Η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα και η συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ που ορίζεται μέσω της*

$$A \mapsto \mu(A) := \mu^*(A) \tag{4.4.1}$$

είναι **αριθμήσιμα προσθετική** *(ή, σ-προσθετική). Δηλαδή, αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο Lebesgue μετρήσιμων συνόλων ($A_n \in \mathcal{M}$ για κάθε n και $A_n \cap A_m = \emptyset$ αν $n \neq m$), τότε*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{4.4.2}$$

Απόδειξη. Μένει να δείξουμε ότι το μέτρο μ είναι αριθμήσιμα προσθετική συνολοσυνάρτηση. Έστω A_n, $n \in \mathbb{N}$, ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα. Από την Πρόταση 4.3.10 το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι μετρήσιμο.

Χρησιμοποιώντας τη μονοτονία του μέτρου και το Πόρισμα 4.3.7, βλέπουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \tag{4.4.3}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right). \tag{4.4.4}$$

Η αντίστροφη ανισότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \tag{4.4.5}$$

προκύπτει άμεσα από την αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα του (εξωτερικού) μέτρου (Πρόταση 4.2.10). □

Ποιά σύνολα είναι μετρήσιμα; Ήδη γνωρίζουμε ότι τα σύνολα που έχουν εξωτερικό μέτρο 0 (και τα συμπληρώματά τους) ανήκουν στην $\mathcal{M}$. Όπως θα δούμε, η $\mathcal{M}$ είναι αρκετά πλούσια: όλα τα «καλά» - από τοπολογική άποψη - υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμα.

Πρόταση 4.4.4. *Όλα τα διαστήματα είναι Lebesgue μετρήσιμα.*

Απόδειξη. (α) Θεωρούμε πρώτα διάστημα της μορφής $J = [a, +\infty)$. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\mu^*(X) \geq \mu^*(X \cap [a, +\infty)) + \mu^*(X \cap (-\infty, a)). \tag{4.4.6}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, αρκεί να δείξουμε ότι αν $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια κάλυψη του X από ανοιχτά διαστήματα, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \geq \mu^*(X \cap [a, +\infty)) + \mu^*(X \cap (-\infty, a)). \tag{4.4.7}$$

Έστω ότι $X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, και ας υποθέσουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ (αλλιώς, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Θα δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \varepsilon \geq \mu^*(X \cap [a, +\infty)) + \mu^*(X \cap (-\infty, a)). \tag{4.4.8}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$I_n' = I_n \cap (a, +\infty) \quad , \quad I_n'' = I_n \cap (-\infty, a), \tag{4.4.9}$$

και

$$I_0 = \Big(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\Big). \tag{4.4.10}$$

Καθένα από τα I_n', I_n'' είναι ανοικτό διάστημα ή το κενό σύνολο, και (εξηγήστε γιατί)

$$\ell(I_n) = \ell(I_n') + \ell(I_n''). \tag{4.4.11}$$

Επίσης,

$$X \cap [a, +\infty) \subseteq I_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n' \tag{4.4.12}$$

και

$$X \cap (-\infty, a) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n''. \tag{4.4.13}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\mu^*(X \cap [a, +\infty)) + \mu^*(X \cap (-\infty, a)) &\leq \ell(I_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n') + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n'') \\
&= \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \big(\ell(I_n') + \ell(I_n'')\big) \\
&= \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n).
\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι το $J = [a, +\infty)$ είναι μετρήσιμο.
(β) Αν $J = (a, +\infty)$, τότε γράφοντας

$$(a, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + 1/n, +\infty)$$

και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.3.10 και το (α), βλέπουμε ότι $J \in \mathcal{M}$.
(γ) Τα $(-\infty, a)$ και $(-\infty, a]$ είναι μετρήσιμα ως συμπληρώματα μετρήσιμων συνόλων.
(δ) Εύκολα βλέπουμε ότι διαστήματα της μορφής $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ και (a, b) είναι μετρήσιμα. Για παράδειγμα,

$$[a, b] = \mathbb{R} \setminus \big((-\infty, a) \cup (b, +\infty)\big) \tag{4.4.14}$$

δηλαδή το $[a, b]$ είναι μετρήσιμο ως συμπλήρωμα του μετρήσιμου συνόλου $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$.
□

Ορισμός 4.4.5 (Borel σ-άλγεβρα)**.** Η μικρότερη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ που περιέχει όλα τα διαστήματα λέγεται **σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του** $\mathbb{R}$ (ή Borel σ-άλγεβρα) και συμβολίζεται με $\mathcal{B}$. Δηλαδή,

$$\mathcal{B} = \bigcap \big\{\mathcal{A} \subseteq P(\mathbb{R}) \mid \mathcal{A}\ \ \sigma - \textit{άλγεβρα και η } \mathcal{A} \textit{ περιέχει όλα τα διαστήματα}\big\}. \tag{4.4.15}$$

Από τον ορισμό της Borel σ-άλγεβρας, από το γεγονός ότι η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα και από την Πρόταση 4.4.4 συμπεραίνουμε ότι κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο:

Πρόταση 4.4.6. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$. □

Πρόταση 4.4.7. *Κάθε ανοικτό και κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel, άρα είναι μετρήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη. Κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών διαστημάτων - και μάλιστα ξένων ανά δύο (γνωστό από την Πραγματική Ανάλυση). Αφού η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα ανοικτά διαστήματα, η $\mathcal{B}$ περιέχει όλα τα ανοικτά, άρα και όλα τα κλειστά, σύνολα. □

Παρατηρήσεις 4.4.8. (α) Η Borel σ-άλγεβρα περιέχει πολύ περισσότερα σύνολα από τα ανοικτά και τα κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Όλες οι αριθμήσιμες τομές ανοικτών συνόλων (τα λεγόμενα **G_δ-σύνολα**) είναι Borel σύνολα, όλες οι αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών συνόλων (τα λεγόμενα **F_σ-σύνολα**) είναι Borel σύνολα, και ούτω καθεξής.

(β) Η κλάση $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων συνόλων είναι γνήσια μεγαλύτερη από την κλάση $\mathcal{B}$ των Borel συνόλων: υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel. Μπορεί κανείς να δώσει παράδειγμα συνόλου που δεν είναι Borel και έχει εξωτερικό μέτρο 0 (άρα, είναι μετρήσιμο). Θα περιγράψουμε τέτοια παραδείγματα αργότερα.

(γ) Από την άλλη πλευρά, τα μετρήσιμα σύνολα προσεγγίζονται από Borel σύνολα, με την εξής έννοια:

Πρόταση 4.4.9. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το A είναι μετρήσιμο.*

(ii) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $G \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq G$ και $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$.*

(iii) *Υπάρχει G_δ-σύνολο B ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*\big(B \setminus A\big) = 0$.*

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii). Υποθέτουμε ότι το A είναι μετρήσιμο και, αρχικά, ότι $\mu(A) < +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του $\mu(A) = \mu^*(A)$, υπάρχει ακολουθία ανοικτών διαστημάτων (I_n) ώστε $A \subseteq \bigcup_n I_n$ και

$$\sum_n \mu(I_n) = \sum_n \ell(I_n) < \mu(A) + \varepsilon. \tag{4.4.16}$$

Ορίζουμε $G = \bigcup_n I_n$. Το G είναι ανοικτό σύνολο, $A \subseteq G$ και έχουμε

$$\mu(A) \leq \mu(G) = \mu\left(\bigcup_n I_n\right) \leq \sum_n \mu(I_n) < \mu(A) + \varepsilon. \tag{4.4.17}$$

Αφού τα A και G είναι μετρήσιμα, έχουμε ότι το $G \setminus A$ είναι μετρήσιμο και

$$\mu(G) = \mu(A \cup (G \setminus A)) = \mu(A) + \mu(G \setminus A) \tag{4.4.18}$$

από το Πόρισμα 4.3.7. Συνεπώς,

$$\mu^*(G \setminus A) = \mu(G \setminus A) = \mu(G) - \mu(A) < \varepsilon, \tag{4.4.19}$$

από την (4.4.17).

Έστω τώρα ότι $\mu(A) = +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = A \cap (-n, n)$. Κάθε A_n είναι μετρήσιμο, $\mu(A_n) < +\infty$ και $A = \bigcup_n A_n$. Με βάση την περίπτωση που εξετάσαμε παραπάνω, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε ανοικτό σύνολο G_n ώστε $A_n \subseteq G_n$ και $\mu(G_n \setminus A_n) < \varepsilon/2^n$. Ορίζουμε $G = \bigcup_n G_n$. Τότε, το G είναι ανοικτό σύνολο, $G = \bigcup_n G_n \supseteq \bigcup_n A_n = A$ και εύκολα ελέγχουμε ότι

$$G \setminus A = \left(\bigcup_n G_n\right) \setminus \left(\bigcup_n A_n\right) \subseteq \bigcup_n (G_n \setminus A_n). \tag{4.4.20}$$

Συνεπώς,

$$\mu(G \setminus A) \leq \mu\left(\bigcup_n (G_n \setminus A_n)\right) \leq \sum_n \mu(G_n \setminus A_n) < \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon. \tag{4.4.21}$$

Έτσι, έχουμε αποδείξει το (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Υποθέτοντας το (ii), για κάθε $k \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε ανοικτό $G_k \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq G_k$ και $\mu^*(G_k \setminus A) < 1/k$. Ορίζουμε $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$. Το B είναι G_δ-σύνολο και $A \subseteq B$. Παρατηρούμε ότι

$$\mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(G_k \setminus A) < \frac{1}{k} \tag{4.4.22}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$\mu^*(B \setminus A) = 0. \tag{4.4.23}$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το (iii).

Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\mu^*(B) = \mu^*(A \cup (B \setminus A)) \leq \mu^*(B) + \mu^*(B \setminus A) = \mu^*(A). \tag{4.4.24}$$

Αφού $A \subseteq B$, ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Συνεπώς, $\mu^*(B) = \mu^*(A)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Υποθέτουμε ότι υπάρχει G_δ-σύνολο B ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*\big(B \setminus A\big) = 0$. Από την Πρόταση 4.3.3 το $B \setminus A$ είναι μετρήσιμο. Το B ανήκει στην Borel σ-άλγεβρα (ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων). Άρα, το B είναι μετρήσιμο. Γράφοντας

$$A = B \setminus (B \setminus A) \tag{4.4.25}$$

συμπεραίνουμε ότι το A είναι μετρήσιμο. □

Ολοκληρώνουμε αυτήν την παράγραφο με δύο ακόμα ιδιότητες του μέτρου Lebesgue, οι οποίες είναι συνέπειες της αριθμήσιμης προσθετικότητας:

Πρόταση 4.4.10. (i) *Αν (A_n) είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, τότε*

$$\mu(A_n) \to \mu(A). \tag{4.4.26}$$

(ii) *Αν (B_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $\mu(B_1) < +\infty$ και $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, τότε*

$$\mu(B_n) \to \mu(B). \tag{4.4.27}$$

Απόδειξη: (i) Γράφουμε το A σαν ξένη ένωση:

$$A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \cdots, \tag{4.4.28}$$

και χρησιμοποιώντας την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μέτρου παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \cdots + \mu(A_n \setminus A_{n-1}) + \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty} \big(\mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \cdots + \mu(A_n \setminus A_{n-1})\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

(ii) Παρατηρούμε πρώτα ότι αν $C, D \in \mathcal{M}$ με $D \subset C$ και $\mu(D) < +\infty$, τότε

$$\mu(C \setminus D) = \mu(C) - \mu(D). \tag{4.4.29}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $A_n = B_1 \setminus B_n$. Τότε, η (A_n) είναι αύξουσα, οπότε

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_1 \setminus B_n)\right) = \mu\left(B_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu(B_1) - \mu(B), \tag{4.4.30}$$

από το (i). Επίσης,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \big(\mu(B_1) - \mu(B_n)\big) = \mu(B_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n). \tag{4.4.31}$$

Άρα, $\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$. □

Παρατήρηση 4.4.11. Η υπόθεση $\mu(B_1) < +\infty$ στο (ii) μπορεί να αντικατασταθεί από την $\mu(B_k) < +\infty$ για *κάποιο* k (εξηγήστε γιατί). Δεν μπορούμε όμως να την αφαιρέσουμε τελείως: αν $B_n = [n, +\infty)$, τότε $B_n \searrow \emptyset$ αλλά $\mu(B_n) = +\infty$ για κάθε n ενώ $\mu(\emptyset) = 0$.

4.5 Το σύνολο του Cantor

§1. Κατασκευή του συνόλου του Cantor

Θεωρούμε το διάστημα $C_0 = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε τρία ίσα διαστήματα. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα $\big(1/3, 2/3\big)$. Ονομάζουμε C_1 το σύνολο που απομένει, δηλαδή

$$C_1 = \big[0, 1/3\big] \cup \big[2/3, 1\big]. \tag{4.5.1}$$

Το C_1 είναι προφανώς κλειστό σύνολο. Χωρίζουμε καθένα από τα διαστήματα $\big[0, 1/3\big]$ και $\big[2/3, 1\big]$ σε τρία ίσα διαστήματα και, από καθένα από αυτά, αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε C_2 το κλειστό σύνολο που απομένει, δηλαδή

$$C_2 = \big[0, 1/9\big] \cup \big[2/9, 1/3\big] \cup \big[2/3, 7/9\big] \cup \big[8/9, 1\big]. \tag{4.5.2}$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ένα κλειστό σύνολο C_n έτσι ώστε η ακολουθία (C_n) να έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$.

(ii) Το C_n είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $1/3^n$.

Το **σύνολο του Cantor** είναι το σύνολο

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n. \tag{4.5.3}$$

Σημείωση. Τα διαστήματα της μορφής $\big[k/3^n, (k+1)/3^n\big]$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, 3^n - 1$, ονομάζονται **τριαδικά διαστήματα**.

§2. Ιδιότητες του συνόλου του Cantor

Το C είναι σίγουρα μη κενό, αφού περιέχει τα άκρα όλων των τριαδικών διαστημάτων που απαρτίζουν κάθε C_n (όπως θα δούμε παρακάτω περιέχει και πολλά άλλα σημεία). Επίσης το C είναι κλειστό, αφού η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο. Επιπλέον, το C έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) *Το C είναι τέλειο σύνολο*, δηλαδή είναι κλειστό και κάθε σημείο του C είναι σημείο συσσώρευσης του C.

Απόδειξη. Είδαμε ότι το C είναι κλειστό. Για να δείξουμε ότι κάθε $x \in C$ είναι σημείο συσσώρευσης του C παρατηρούμε ότι για το τυχόν $x \in C$ υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών τριαδικών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, με $x \in I_n(x)$, $I_n(x) \subset C_n$ και $\ell(I_n(x)) = \frac{1}{3^n}$. Οι ακολουθίες $(\alpha_n(x))$ και $(\delta_n(x))$ των αριστερών και δεξιών άκρων των $I_n(x)$ αντίστοιχα περιέχονται στο C, καθεμία από αυτές συγκλίνει στο x, και η μία τουλάχιστον από τις δύο δεν είναι τελικά σταθερή. Άρα, το x είναι σημείο συσσώρευσης του C. $\square$

(2) *Το C έχει εξωτερικό μέτρο ίσο με 0.*

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $C \subset C_n$ και $\mu^*(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$, αφού το C_n είναι ένωση 2^n ξένων ανά δύο κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$. Άρα,

$$\mu^*(C) \leq \mu^*(C_n) = \frac{2^n}{3^n} \tag{4.5.4}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\mu^*(C) = 0$. □

Παρατήρηση. Ειδικότερα, το C δεν περιέχει κανένα διάστημα.

(3) *Το C είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Από ένα γενικό θεώρημα της Τοπολογίας, κάθε μη κενό τέλειο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αφού δείξαμε ότι το C είναι τέλειο, έπεται ο ισχυρισμός. Θα δώσουμε όμως μια δεύτερη απόδειξη, η οποία μάς δίνει την αφορμή να δούμε μια διαφορετική περιγραφή του συνόλου C που παρουσιάζει γενικότερο ενδιαφέρον.

Μπορούμε να ορίσουμε μία ένα προς ένα και επί απεικόνιση Φ του C στο σύνολο

$$\{0,2\}^{\mathbb{N}} = \big\{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \mid \text{για κάθε } n,\ \alpha_n = 0 \text{ ή } \alpha_n = 2\big\}. \tag{4.5.5}$$

Το $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ είναι υπεραριθμήσιμο (θυμηθείτε το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor). Άρα, το C είναι υπεραριθμήσιμο. Η απεικόνιση Φ ορίζεται ως εξής:

Για κάθε $x \in C$ υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, ώστε: $I_1(x) \supset I_2(x) \supset \cdots$, και για κάθε n, $x \in I_n(x)$ και το $I_n(x)$ είναι ένα από τα τριαδικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ που απαρτίζουν το C_n.

Με βάση αυτήν την ακολουθία διαστημάτων ορίζουμε μια ακολουθία $(\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ ως εξής:

(α) $n = 1$: Θέτουμε $\alpha_1^x = 0$ αν $I_1(x) = \big[0, 1/3\big]$ (δηλαδή, αν $x \in \big[0, 1/3\big]$) και $\alpha_1^x = 2$ αν $I_1(x) = \big[2/3, 1\big]$ (δηλαδή, αν $x \in \big[2/3, 1\big]$).

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Για κάθε n, αν $I_n(x) = \big[k/3^n, (k+1)/3^n\big]$ τότε το $I_{n+1}(x)$ είναι ένα από τα δύο διαστήματα $\big[k/3^n, (k/3^n) + (1/3^{n+1})\big]$, $\big[(k/3^n) + (2/3^{n+1}), (k+1)/3^n\big]$: εκείνο που περιέχει το x. Θέτουμε $\alpha_{n+1}^x = 0$ αν $I_{n+1}(x)$ είναι το πρώτο διάστημα, και $\alpha_{n+1}^x = 2$ αν $I_{n+1}(x)$ είναι το δεύτερο διάστημα.

Παρατηρούμε ότι αν $x \neq y$, τότε για κάποιο n θα ισχύει $I_n(x) \neq I_n(y)$, αλλιώς θα έπρεπε να έχουμε $|x - y| \leq \frac{1}{3^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν n_0 είναι ο πρώτος φυσικός για τον οποίο $I_{n_0}(x) \neq I_{n_0}(y)$, τότε από τον ορισμό των α_n^x βλέπουμε ότι $\alpha_{n_0}^x \neq \alpha_{n_0}^y$, άρα οι δύο ακολουθίες $(\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty}$ και $(\alpha_n^y)_{n=1}^{\infty}$ είναι διαφορετικές. Αυτό αποδεικνύει ότι η απεικόνιση $\Phi : C \to \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ με $\Phi(x) = (\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα προς ένα.

Αντίστροφα, αν $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία από 0 ή 2, η ακολουθία αυτή ορίζει μοναδική ακολουθία τριαδικών διαστημάτων $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ με $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, ώστε για κάθε n το I_n να είναι ένα από τα τριαδικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ που απαρτίζουν το C_n:

(α) $n = 1$: Θέτουμε $I_1 = \big[0, 1/3\big]$ αν $\alpha_1 = 0$ ή $I_1 = \big[2/3, 1\big]$ αν $\alpha_1 = 2$.

(β) Γενικά, το I_{n+1} ορίζεται να είναι ένα από τα δύο τριαδικά υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{3^{n+1}}$ του I_n που περιέχονται στο C_{n+1}: το αριστερό αν $\alpha_{n+1} = 0$, ή το δεξιό αν $\alpha_{n+1} = 2$.

Αφού τα μήκη των διαστημάτων I_n φθίνουν στο 0, η τομή τους είναι μονοσύνολο: έστω

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n. \tag{4.5.6}$$

(Θυμηθείτε ότι η τομή είναι μη κενή λόγω του θεωρήματος των κιβωτισμένων διαστημάτων). Αφού $I_n \subset C_n$ για κάθε n, είναι φανερό ότι $x \in C$. Επίσης, $I_n(x) = I_n$ για κάθε n, και από τον τρόπο ορισμού των I_n έχουμε

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} = (\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty} = \Phi(x). \tag{4.5.7}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η Φ είναι επί του $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$, άρα το C είναι υπεραριθμήσιμο.

Ο τρόπος ορισμού της Φ μάς οδηγεί σε μια άλλη περιγραφή του συνόλου του Cantor.

§3. Τριαδική παράσταση αριθμού

Αν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία με $a_n \in \{0,1,2\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ συγκλίνει σε έναν αριθμό $x \in [0,1]$. Αν $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ με $a_n \in \{0,1,2\}$ για κάθε n, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ (ή η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$) λέγεται **τριαδική παράσταση** του x. Γράφουμε $x = (a_1, a_2, \dots)$ αντί της $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$.

Κάθε αριθμός x στο διάστημα $[0,1]$ έχει τριαδική παράσταση. Η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ μπορεί να επιλεγεί ως εξής: Χωρίζουμε το $[0,1]$ στα τρία υποδιαστήματα $[0,1/3]$, $(1/3,2/3)$ και $[2/3,1]$. Θέτουμε

$$a_1 = \begin{cases} 0 & , x \in [0,1/3] \\ 1 & , x \in (1/3,2/3) \\ 2 & , x \in [2/3,1]. \end{cases}$$

Με αυτόν τον ορισμό, σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$\frac{a_1}{3} \leq x \leq \frac{a_1}{3} + \frac{1}{3}. \tag{4.5.8}$$

Ας υποθέσουμε ότι $x \in [0,1/3]$. Χωρίζουμε αυτό το διάστημα στα τρία υποδιαστήματα $[0,1/9]$, $(1/9,2/9)$, $[2/9,1/3]$ και θέτουμε $a_2 = 0, 1$ ή 2 αντίστοιχα αν το x ανήκει στο αριστερό, στο μεσαίο ή στο δεξιό από αυτά τα διαστήματα. Ανάλογα ορίζεται το a_2 όταν $x \in (1/3,2/3)$ ή $x \in [2/3,1]$, έτσι ώστε σε κάθε περίπτωση να έχουμε

$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} \leq x \leq \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{1}{3^2}. \tag{4.5.9}$$

Συνεχίζουμε την επιλογή των a_n με αυτόν τον τρόπο έτσι ώστε για κάθε n να έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leq x \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^n}. \tag{4.5.10}$$

Αφού λοιπόν

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leq \frac{1}{3^n}, \tag{4.5.11}$$

έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ συγκλίνει στον x, δηλαδή

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}. \tag{4.5.12}$$

Παραδείγματα

Ελέγξτε ότι

$$\begin{aligned} 1/8 &= (0,1,0,1,0,1,\ldots) \\ 1/4 &= (2,0,2,0,2,0,\ldots). \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι αν $x \neq y$ τότε η τριαδική παράσταση του x είναι διαφορετική από αυτήν του y, αφού μια σειρά δεν μπορεί να συγκλίνει σε δύο διαφορετικά όρια.

Υπάρχουν όμως αριθμοί $x \in [0,1]$ που έχουν δύο διαφορετικές τριαδικές παραστάσεις. Για παράδειγμα, αν $x = 1/3$ τότε

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{0}{3^k} \quad \text{και} \quad \frac{1}{3} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{3^k}.$$

(Με τον τρόπο επιλογής της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ που παρουσιάσαμε παραπάνω, θα βρίσκαμε την δεύτερη παράσταση).

Γενικότερα, ισχύει το εξής: Ο $x \in [0,1]$ έχει δύο διαφορετικές τριαδικές παραστάσεις αν και μόνο αν ο x είναι τριαδικός ρητός: δηλαδή αν $x = k/3^n$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και κάποιον $1 \leq k \leq 3^n$ (αφήνεται ως άσκηση).

Το Θεώρημα που ακολουθεί δίνει έναν άλλο τρόπο περιγραφής του συνόλου του Cantor.

Θεώρημα 4.5.1. *Έστω $x \in [0,1]$. Τότε, $x \in C$ αν και μόνο αν ο x έχει μία τριαδική παράσταση η οποία περιέχει μόνο τα ψηφία 0 και 2.* □

Απόδειξη. Έστω $x \in [0,1]$. Αν η ακολουθία (a_n) επιλεγεί με τον τρόπο που παρουσιάσαμε παραπάνω, τότε ισχύει το εξής: $x \in C$ αν και μόνο αν $a_n \neq 1$ για κάθε n. Αυτό αποδεικνύει ότι αν $x \in C$ τότε ο x έχει μία τριαδική παράσταση που περιέχει μόνο τα ψηφία 0 και 2. Η ολοκλήρωση της απόδειξης αφήνεται ως άσκηση. □

4.6 Παράδειγμα μη μετρήσιμου συνόλου

Στην §4.4 ορίσαμε την σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και την μεγαλύτερη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Από τους ορισμούς έπονται άμεσα οι εγκλεισμοί

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}). \tag{4.6.1}$$

Το ερώτημα όμως αν αυτοί οι δύο εγκλεισμοί είναι γνήσιοι (δηλαδή, αν υπάρχουν υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που δεν είναι μετρήσιμα και αν υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel) δεν είναι καθόλου απλό. Σε αυτήν την παράγραφο θα κατασκευάσουμε παράδειγμα μη μετρήσιμου συνόλου. Η κατασκευή βασίζεται στο «αξίωμα της επιλογής» από την Θεωρία Συνόλων, το οποίο αποδεχόμαστε.

Αξίωμα της Επιλογής: Έστω $\mathcal{X} = \{X_a \mid a \in A\}$ μια μη κενή οικογένεια ξένων, μη κενών υποσυνόλων ενός συνόλου Ω. Τότε, υπάρχει ένα σύνολο E που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο x_a από κάθε σύνολο X_a. Δηλαδή, υπάρχει **συνάρτηση επιλογής** $f : A \to \Omega$ με $f(a) \in X_a$ για κάθε $a \in A$.

Σημείωση, Το Αξίωμα της Επιλογής, αν και φαίνεται «αθώο», αποδεικνύεται ανεξάρτητο από τα αξιώματα (Zermelo-Fraenkel) της Θεωρίας Συνόλων.

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης το **λήμμα του Steinhaus**.

Πρόταση 4.6.1. *Έστω A μετρήσιμο σύνολο με $\mu(A) > 0$. Τότε, το «σύνολο διαφορών»*

$$A - A := \{x - y \mid x \in A, y \in A\} \tag{4.6.2}$$

του A περιέχει διάστημα της μορφής $(-t, t)$ για κάποιο $t > 0$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \mu(A) < \infty$ (αν $\mu(A) = \infty$, θεωρούμε $B \subseteq A$ με $0 < \mu(B) < \infty$, δείχνουμε ότι το $B - B$ περιέχει διάστημα της μορφής $(-t, t)$ για κάποιο $t > 0$, και τότε, $A - A \supseteq B - B \supseteq (-t, t)$).

Έστω λοιπόν A μετρήσιμο σύνολο με $0 < \mu(A) < \infty$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ανοικτό σύνολο $G \supseteq A$ ώστε $\mu(G) < (1 + \varepsilon)\mu(A)$. Μπορούμε να γράψουμε το G σαν αριθμήσιμη ένωση $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ μη επικαλυπτόμενων διαστημάτων. Θέτουμε $A_k = A \cap I_k$. Τότε,

$$\mu(G) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \quad \text{και} \quad \mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \tag{4.6.3}$$

Από την $\mu(G) < (1 + \varepsilon)\mu(A)$ έπεται ότι: υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\ell(I_k) \leq (1 + \varepsilon)\mu(A \cap I_k). \tag{4.6.4}$$

Παίρνοντας $\varepsilon = 1/3$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει διάστημα I ώστε

$$\mu(A \cap I) \geq \frac{3\ell(I)}{4}. \tag{4.6.5}$$

Θέτουμε $t = \frac{\ell(I)}{2}$. Θα δείξουμε ότι

$$(A \cap I) - (A \cap I) \supseteq (-t, t). \tag{4.6.6}$$

Αν αυτό δεν ισχύει, υπάρχει $s \in (-t, t)$ ώστε τα σύνολα $A \cap I$ και $(A \cap I) + s$ να είναι ξένα. Ταυτόχρονα, περιέχονται στο $I \cup (I + s)$, το οποίο είναι διάστημα μήκους $\ell(I) + |s|$. Έπεται ότι

$$2\mu(A \cap I) = \mu(A \cap I) + \mu((A \cap I) + s) \leq \ell(I) + s < \frac{3\ell(I)}{2}, \tag{4.6.7}$$

δηλαδή $\mu(A \cap I) < \frac{3\ell(I)}{4}$, το οποίο είναι άτοπο. Έπεται ότι $A - A \supseteq (A \cap I) - (A \cap I) \supseteq (-t, t)$. □

Θεώρημα 4.6.2. *Υπάρχει μη μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $\mathbb{R}$ ως εξής:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}. \tag{4.6.8}$$

Η $\sim$ χωρίζει το $\mathbb{R}$ σε κλάσεις ισοδυναμίας

$$E_x = \{y \in \mathbb{R} \mid y = x + q \text{ για κάποιον } q \in \mathbb{Q}\}. \tag{4.6.9}$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{X} = \{X_a \mid a \in A\}$ την οικογένεια των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας, το αξίωμα της επιλογής μας λέει ότι υπάρχει ένα σύνολο $E = \{y_a \mid a \in A\} \subset \mathbb{R}$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο y_a από κάθε κλάση X_a. Ειδικότερα, αν $a \neq b$ στο A τότε $y_a - y_b \notin \mathbb{Q}$.

Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ και θεωρούμε την ακολουθία συνόλων

$$E_n := E + q_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.6.10}$$

Τα σύνολα E_n ικανοποιούν τα εξής:

(i) Αν $n \neq m$ τότε $E_n \cap E_m = \emptyset$. Πράγματι, αν υπήρχαν $y_a, y_b \in E$ ώστε $y_a + q_n = y_b + q_m$, τότε θα είχαμε $0 \neq y_a - y_b = q_m - q_n \in \mathbb{Q}$, το οποίο είναι άτοπο από τον τρόπο ορισμού του E.

(ii) $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Πράγματι, αν $x \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $x \in X_a$. Αυτό σημαίνει ότι $x = y_a + q$ για κάποιον $q \in \mathbb{Q}$. Όμως, τότε υπάρχει $n = n(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $q = q_n$, δηλαδή, $x = y_a + q_n \in E_n$.

Ας υποθέσουμε ότι το E είναι μετρήσιμο. Τότε, το $E_n = E + q_n$ είναι μετρήσιμο για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mu(E_n) = \mu(E)$. Από τις ιδιότητες των E_n και από την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μέτρου, παίρνουμε

$$+\infty = \mu(\mathbb{R}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E). \tag{4.6.11}$$

Συνεπώς, $\mu(E) > 0$. Από το λήμμα του Steinhaus, το $E - E$ περιέχει διάστημα $(-t, t)$ για κάποιον $t > 0$. Όμως αυτό είναι άτοπο, διότι το $E - E$ δεν μπορεί να περιέχει ρητό διαφορετικό από το 0: αν $x \neq y$ στο E τότε ο $x - y$ είναι άρρητος, από τον τρόπο ορισμού του E. Έπεται ότι το E δεν είναι μετρήσιμο σύνολο. $\square$

Παρατήρηση 4.6.3. Με μια παραλλαγή αυτού του επιχειρήματος μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu(A) > 0$ έχει μη μετρήσιμο υποσύνολο. Χρησιμοποιώντας τα σύνολα E_n που ορίστηκαν στην (4.6.10) γράφουμε

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n), \tag{4.6.12}$$

και υποθέτοντας ότι κάθε $A \cap E_n$ είναι μετρήσιμο καταλήγουμε στην

$$0 < \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap E_n). \tag{4.6.13}$$

Συνεπώς, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(A \cap E_n) > 0$ και από το λήμμα του Steinhaus το $A \cap E_n - A \cap E_n$, άρα και το $E_n - E_n$, περιέχει διάστημα $(-t, t)$ για κάποιον $t > 0$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο.

Παρατήρηση 4.6.4. Μπορούμε, με παρόμοιο τρόπο, να αποδείξουμε την ύπαρξη μη μετρήσιμου $E \subseteq [0, 1]$, αποφεύγοντας την χρήση του λήμματος του Steinhaus. Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $[0, 1]$ ως εξής:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}. \tag{4.6.14}$$

Παρατηρήστε ότι, αναγκαστικά, $x - y \in [-1, 1]$. Η $\sim$ χωρίζει το $[0, 1]$ σε κλάσεις ισοδυναμίας

$$E_x = \{y \in [0, 1] \mid y = x + q \text{ για κάποιον } q \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}\}. \tag{4.6.15}$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{X} = \{X_a \mid a \in A\}$ την οικογένεια των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας, το αξίωμα της επιλογής μας λέει ότι υπάρχει ένα σύνολο $E = \{y_a \mid a \in A\} \subset [0, 1]$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο y_a από κάθε κλάση X_a. Ειδικότερα, αν $a \neq b$ στο A τότε $y_a - y_b \notin \mathbb{Q}$.

Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ και θεωρούμε την ακολουθία συνόλων

$$E_n := E + q_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.6.16}$$

Τα σύνολα E_n ικανοποιούν τα εξής:

(i) $E_n \subseteq [-1, 2]$.

(ii) Αν $n \neq m$ τότε $E_n \cap E_m = \emptyset$.

(iii) $[0, 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Πράγματι, αν $x \in [0, 1]$ τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $x \in X_a$. Αυτό σημαίνει ότι $x = y_a + q$ για κάποιον $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$. Όμως, τότε υπάρχει $n = n(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $q = q_n$, δηλαδή, $x = y_a + q_n \in E_n$.

Υποθέτουμε ότι το E είναι μετρήσιμο. Τότε, το $E_n = E + q_n$ είναι μετρήσιμο για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mu(E_n) = \mu(E)$. Από τις ιδιότητες των E_n και από τη μονοτονία και την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μέτρου, παίρνουμε

$$1 = \mu([0, 1]) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E) \leq 3, \tag{4.6.17}$$

το οποίο είναι άτοπο αφού το τελευταίο άθροισμα είναι ίσο με 0 (αν $\mu(E) = 0$) ή με $+\infty$ (αν $\mu(E) > 0$). Συνεπώς, το E δεν είναι μετρήσιμο σύνολο.

4.7 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\mu^*(A) = \mu^*(A + t)$$

(το εξωτερικό μέτρο είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές).

(β) Αν επιπλέον το A είναι μετρήσιμο, τότε το $A + t$ είναι μετρήσιμο.

2. (α) Έστω A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\mu^*(A) < +\infty$.

(β) Έστω ότι το $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο. Δείξτε ότι $\mu^*(A) > 0$.

3. (α) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\mu^*(B) = 0$, δείξτε ότι $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A)$.

(β) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\mu^*(A \triangle B) = 0$, δείξτε ότι $\mu^*(A) = \mu^*(B)$ (με $A \triangle B$ συμβολίζουμε την συμμετρική διαφορά $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ των A και B).

4. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με tA το σύνολο $tA = \{tx \mid x \in A\}$. Δείξτε ότι $\mu^*(tA) = |t| \, \mu^*(A)$.

(β) Έστω $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ για κάθε $x, y \in B$. Δείξτε ότι

$$\mu^*(f(A)) \leq C\mu^*(A)$$

για κάθε $A \subseteq B$.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu(A) = 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $A' = \{x^2 \mid x \in A\}$ έχει επίσης μέτρο $\mu(A') = 0$.

Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα την περίπτωση όπου $A \subseteq [-M, M]$ για κάποιο $M > 0$.

5. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $0 < \mu^*(E) < +\infty$ και έστω $0 < \alpha < 1$. Δείξτε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\mu^*(E \cap I) > \alpha\, \ell(I).$$

Υπόδειξη: Υποθέστε το αντίθετο και, για τυχόν $\varepsilon > 0$, θεωρήστε ακολουθία διαστημάτων I_k με $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < \mu^*(E) + \varepsilon$.

6. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $\delta > 0$ ώστε $\mu(A \cap I) \geq \delta\, \ell(I)$ για κάθε ανοιχτό διάστημα. Δείξτε ότι $\mu(A^c) = 0$.

7. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\} > 0.$$

Δείξτε ότι

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

8. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο με $0 < \mu(A) < +\infty$.

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \mu(A \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο F με $F \subseteq A$ και $\mu(F) = \mu(A)/2$.

9. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Το A είναι μετρήσιμο.

(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό $F \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $F \subseteq A$ και $\mu^*(A \setminus F) < \varepsilon$.

(iii) Υπάρχει F_σ-σύνολο Γ ώστε $\Gamma \subseteq A$ και $\mu^*\big(A \setminus \Gamma\big) = 0$.

10. Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε τα σύνολα

$$\limsup A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_n \text{ για άπειρα } n\}$$

και

$$\liminf A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ υπάρχει } n_0(x) \in \mathbb{N} \text{ ώστε } x \in A_n \text{ για κάθε } n \geq n_0(x)\}.$$

Δείξτε ότι

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

11. Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

(α) Τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα.

(β) $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$ και αν $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) < +\infty$ τότε

$$\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n).$$

(γ) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$, τότε $\mu(\limsup A_n) = 0$.

12. Δείξτε ότι τα ακόλουθα σύνολα είναι σύνολα Borel και βρείτε το μέτρο τους: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$, $C+1$, $2C$, όπου C το σύνολο του Cantor.

13. Έστω A υπεραριθμήσιμο σύνολο και έστω $\mathcal{X}$ η οικογένεια των υποσυνόλων X του A που ικανοποιούν το εξής: είτε το X ή το $A \setminus X$ είναι αριθμήσιμο. Δείξτε ότι η $\mathcal{X}$ είναι σ-άλγεβρα.

14. Δείξτε ότι ο αριθμός $1/4$ ανήκει στο σύνολο του Cantor.

15. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:

(i) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\mu^*(A) = 0$, τότε το A είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο.

(ii) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και το A δεν είναι μετρήσιμο, τότε $\mu^*(A) > 0$.

(iii) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\mu^*(A) < +\infty$, $B \subseteq A$, το B είναι μετρήσιμο και $\mu(B) = \mu^*(A)$, τότε το A είναι μετρήσιμο.

(iv) Έστω $A \subseteq [a,b]$. Τότε, $\mu^*(A) = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει κάλυψη του A από μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων (I_n) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ και κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα το πλήθος από τα διαστήματα I_n.

(v) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε $\mu(A) = 0$ αν και μόνο αν όλα τα υποσύνολα του A είναι μετρήσιμα.

Ομάδα Β΄

16. Έστω $A \subseteq [a,b]$ με $\mu(A) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

17. (α) Αν το A είναι μετρήσιμο και $\mu(A \triangle B) = 0$, τότε το B είναι μετρήσιμο και $\mu(B) = \mu(A)$.

(β) Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, τότε

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(γ) Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, $A \subseteq B$ και $\mu(A) = \mu(B) < +\infty$, τότε $\mu(B \setminus A) = 0$.

(δ) Δώστε παράδειγμα μετρήσιμων συνόλων A, B με $A \subseteq B$ και $\mu(A) = \mu(B)$, αλλά $\mu(B \setminus A) > 0$.

18. Έστω $A = \{x \in [0, 2\pi] \mid \sin x < 1/n\}$. Υπολογίστε τα $\mu\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\big)$ και $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

19. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$$

είναι σύνολο Borel.

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι

$$A = \bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{diam}\big[f\big(x - 1/n, x + 1/n\big)\big] < \frac{1}{k} \right\}.$$

20. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$$

είναι σύνολο Borel.

21. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.

Υπόδειξη: Θεωρήστε την κλάση $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \text{ το } f^{-1}(A) \text{ είναι σύνολο Borel}\}$.

22. Για κάθε $x \in [0, 1)$ συμβολίζουμε με $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ την δεκαδική παράσταση του x (αν το x έχει δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις θεωρούμε εκείνη που τελειώνει σε άπειρα μηδενικά). Βρείτε το εξωτερικό μέτρο καθενός από τα σύνολα:

(i) $A_1 = \{x \in [0, 1) \mid x_1 \neq 5\}$.

(ii) $A_2 = \{x \in [0, 1) \mid x_1 \neq 5 \ \text{ και } \ x_2 \neq 5\}$.

(iii) $A_3 = \{x \in [0,1) \mid \text{για κάθε } \ n = 1,2,\ldots,\ x_n \neq 5\}$.

23. Έστω $\theta \in (0,1)$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με την διαφορά ότι στο n-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοιχτό διάστημα μήκους $\theta/3^n$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα. Καταλήγουμε σε ένα σύνολο C_θ «τύπου Cantor». Δείξτε ότι:

(α) Το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει ανοιχτά διαστήματα.

(β) Το C_θ είναι υπεραριθμήσιμο.

(γ) Το C_θ είναι μετρήσιμο και $\mu(C_\theta) = 1 - \theta > 0$.

Ομάδα Γ′

24. Έστω $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε

$$A(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right).$$

Τέλος, θέτουμε $A = \cap_{j=1}^{\infty} A(1/j)$.

(α) Δείξτε ότι $\mu(A(\varepsilon)) \leq 2\varepsilon$.

(β) Αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$ δείξτε ότι το $[0,1] \setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.

(γ) Δείξτε ότι $A \subseteq [0,1]$ και $\mu(A) = 0$.

(δ) Δείξτε ότι $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq A$ και ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.

25. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) = 1.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $0 < \alpha < 1$ υπάρχει υπακολουθία $\{A_{k_n}\}$ της $\{A_n\}$ με

$$\mu\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) > \alpha.$$

26. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\mu(E) < \infty$. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E και έστω $c > 0$ με την ιδιότητα $\mu(A_n) \geq c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $\mu(\limsup A_n) > 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset.$$

27. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\mu(E) > 1$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x \neq y$ στο E ώστε $x - y \in \mathbb{Z}$.

28. Έστω E ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε το *εσωτερικό μέτρο Lebesgue* του E θέτοντας

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\}.$$

(α) Δείξτε ότι $\mu_*(E) \leq \mu^*(E)$.

(β) Υποθέτουμε ότι $\mu^*(E) < \infty$. Δείξτε ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν $\mu_*(E) = \mu^*(E)$.

(γ) Δείξτε ότι αν $\mu^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο (β) δεν είναι πάντα σωστή.

29. Για κάθε $A \in \mathcal{M}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\rho(A, x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\mu(A \cap (x - t, x + t))}{2t},$$

αν αυτό το όριο υπάρχει. Ο $\rho(A, x)$ είναι η **μετρική πυκνότητα** του A στο σημείο x.

(α) Δείξτε ότι $\rho(\mathbb{Q}, x) = 0$ και $\rho(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $0 < \alpha < 1$. Κατασκευάστε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\rho(A, 0) = \alpha$.

Ομάδα Δ΄

30. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε

$$\mu^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

31. Έστω E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $E \subset F$ και $\mu(E) < \mu(F)$. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in \big(\mu(E), \mu(F)\big)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο K ώστε $E \subset K \subset F$ και $\mu(K) = \alpha$.

32. Κατασκευάστε ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq [0, 1]$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε διάστημα $J \subseteq [0, 1]$,

$$\mu(J \cap E) > 0 \quad \text{και} \quad \mu(J \setminus E) > 0.$$

33. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\mu(A) > 0$. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το A περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους n.

Κεφάλαιο 5

Μετρήσιμες συναρτήσεις

5.1 Μετρήσιμες συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις για τις οποίες θα επιχειρήσουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού κάποιο μετρήσιμο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ και τιμές στην επεκτεταμένη ευθεία $[-\infty, +\infty]$ των πραγματικών αριθμών. Όπως είδαμε στην §4.1, για μια φραγμένη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ θα θέλαμε να προσεγγίσουμε το $\int_A f$ από αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \mu(\{x \in A \mid y_k \leq f(x) < y_{k+1}\}), \tag{5.1.1}$$

όπου $\{y_0 < y_1 < \cdots < y_n\}$ διαμέριση του πεδίου τιμών της f. Απαραίτητη προϋπόθεση για να γίνει κάτι τέτοιο είναι τα σύνολα

$$B_k = \{x \in A : y_k \leq f(x) < y_{k+1}\} \tag{5.1.2}$$

να είναι μετρήσιμα. Είμαστε λοιπόν υποχρεωμένοι να περιοριστούμε στην κλάση εκείνων των συναρτήσεων $f : A \to [-\infty, +\infty]$ για τις οποίες τα σύνολα

$$\{x \in A : a \leq f(x) < b\} \tag{5.1.3}$$

είναι μετρήσιμα. Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται **μετρήσιμες**.

Ορισμός 5.1.1 (Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση)**.** Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Η f λέγεται **Lebesgue μετρήσιμη**, ή απλά **μετρήσιμη**, αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο

$$\{x \in A : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty)) \tag{5.1.4}$$

είναι μετρήσιμο.

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι στην θέση των ημιευθειών $(a,+\infty)$ του Ορισμού 5.1.1 θα μπορούσαμε να πάρουμε οποιαδήποτε άλλη κλάση ημιευθειών.

Πρόταση 5.1.2. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η f είναι μετρήσιμη.*

(ii) *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A : f(x) \geq a\} = f^{-1}([a,+\infty))$ είναι μετρήσιμο.*

(iii) *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A : f(x) < a\} = f^{-1}((-\infty,a))$ είναι μετρήσιμο.*

(iv) *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A : f(x) \leq a\} = f^{-1}((-\infty,a])$ είναι μετρήσιμο.*

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii) Παρατηρήστε ότι

$$\{x \in A : f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in A : f(x) > a - \frac{1}{n}\right\}. \tag{5.1.5}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Παρατηρήστε ότι

$$\{x \in A : f(x) < a\} = A \setminus \{x \in A : f(x) \geq a\}. \tag{5.1.6}$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Παρατηρήστε ότι

$$\{x \in A : f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in A : f(x) < a + \frac{1}{n}\right\}. \tag{5.1.7}$$

(iv) $\Rightarrow$ (i) Παρατηρήστε ότι

$$\{x \in A : f(x) > a\} = A \setminus \{x \in A : f(x) \leq a\}. \tag{5.1.8}$$

Αφού αριθμήσιμες τομές, αριθμήσιμες ενώσεις και συνολοθεωρητικές διαφορές μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμα σύνολα, η ισοδυναμία των (i)-(iv) προκύπτει άμεσα από τις παραπάνω σχέσεις. $\square$

Πρόταση 5.1.3. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, όλες οι αντίστροφες εικόνες διαστημάτων – μέσω της f – είναι μετρήσιμα σύνολα. Το ίδιο ισχύει για τα σύνολα $\{x \in A : f(x) = a\}$, $a \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός είναι απλή συνέπεια της Πρότασης 5.1.2. Για παράδειγμα, αν $J = [a,b]$ τότε το σύνολο

$$f^{-1}(J) = \{x \in A : a \leq f(x) \leq b\} = \{x \in A : f(x) \geq a\} \cap \{x \in A : f(x) \leq b\} \tag{5.1.9}$$

είναι μετρήσιμο. Τελείως ανάλογα, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, το σύνολο

$$\{x \in A : f(x) = a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in A : a - \frac{1}{n} < f(x) < a + \frac{1}{n}\right\} \tag{5.1.10}$$

είναι μετρήσιμο. $\square$

Ορισμός 5.1.4 (Borel μετρήσιμη συνάρτηση)**.** Έστω A σύνολο Borel του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Η f λέγεται **Borel μετρήσιμη** αν, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, το σύνολο

$$\{x \in A : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty)) \tag{5.1.11}$$

είναι σύνολο Borel. Τα ακριβή ανάλογα των Προτάσεων 5.1.2 και 5.1.3 ισχύουν για τις Borel μετρήσιμες συναρτήσεις (διατυπώστε αντίστοιχες Προτάσεις και αποδείξτε τις).

Παραδείγματα 5.1.5. (α) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f είναι μετρήσιμη. Πράγματι, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A : f(x) > a\}$ είναι ανοικτό στο A, δηλαδή είναι της μορφής $A \cap U$ για κάποιο ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}$. Συνεπώς, είναι μετρήσιμο σύνολο ως τομή δύο μετρήσιμων συνόλων.

(β) Η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ενός μετρήσιμου συνόλου A είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Πράγματι, έχουμε

$$\{x \in \mathbb{R} : \chi_A(x) > a\} = \begin{cases} \mathbb{R}, & a < 0 \\ \\ A, & 0 \leq a < 1 \\ \\ \emptyset, & a \geq 1, \end{cases} \tag{5.1.12}$$

δηλαδή, μετρήσιμο σύνολο σε κάθε περίπτωση. Ειδικότερα, η συνάρτηση του Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

(γ) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Κάθε μονότονη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A : f(x) > a\}$ είναι η τομή του A με μια ημιευθεία, άρα είναι μετρήσιμο.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Γράφουμε $T = \{x \in A : f(x) > a\}$ και $t := \inf T$.

(i) Αν $t = -\infty$ τότε $T = A$. Πράγματι, αν $x \in A$ τότε υπάρχει $y \in T$ ώστε $y < x$. Αυτό σημαίνει ότι $y \in A$ και $f(y) > a$, όμως η f είναι αύξουσα και από την $y < x$ έπεται ότι $f(x) \geq f(y) > a$, δηλαδή $x \in T$. Άρα, σε αυτήν την περίπτωση το $T = A$ είναι μετρήσιμο.

(ii) Αν $t \in \mathbb{R}$ τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $t \in T$: Αυτό σημαίνει ότι $t \in A$ και $f(t) > a$. Τότε, ισχύει $T = A \cap [t, +\infty)$. Πράγματι, αν $x \in A$ και $x \geq t$ τότε $f(x) \geq f(t) > a$, άρα $x \in T$. Αντίστροφα, αν $x \in T$ τότε $x \in A$ και $x \geq t$ γιατί ο t είναι κάτω φράγμα του T.

- $t \notin T$: Θα δείξουμε ότι $T = A \cap (t, +\infty)$. Πράγματι, αν $x \in A$ και $x > t$ τότε (χαρακτηρισμός του infimum) υπάρχει $y \in T$ ώστε $t < y < x$ και αυτό μας δίνει την $f(x) \geq f(y) > a$, άρα $x \in T$. Αντίστροφα, αν $x \in T$ τότε $x \in A$ και $x > t$ γιατί ο t είναι κάτω φράγμα του T και δεν ανήκει στο T.

Σε κάθε περίπτωση το $T = \{x \in A : f(x) > a\}$ είναι η τομή του A με μια ημιευθεία. □

Πρόταση 5.1.6 (πράξεις μεταξύ μετρήσιμων συναρτήσεων)**.** *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

(i) *Η $f + g$ είναι μετρήσιμη.*

(ii) *Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση λf είναι μετρήσιμη.*

(iii) *Η fg είναι μετρήσιμη.*

(iv) *Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η $1/f$ είναι μετρήσιμη.*

(v) *Οι συναρτήσεις $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ και $|f|$ είναι μετρήσιμες.*

Απόδειξη. (i) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αν $f(x) + g(x) < a$, τότε $f(x) < a - g(x)$. Άρα, υπάρχει ρητός q ώστε

$$f(x) < q < a - g(x). \tag{5.1.13}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\{x \in A : f(x) + g(x) < a\} &= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{x \in A : f(x) < q \text{ και } g(x) < a - q\} \\ &= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \left(\{x \in A : f(x) < q\} \cap \{x \in A : g(x) < a - q\}\right),\end{aligned}$$

δηλαδή είναι μετρήσιμο σύνολο.
(ii) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αν $\lambda > 0$, τότε

$$\{x \in A : \lambda f(x) > a\} = \{x \in A : f(x) > a/\lambda\}, \tag{5.1.14}$$

δηλαδή μετρήσιμο σύνολο. Αν $\lambda < 0$, τότε

$$\{x \in A : \lambda f(x) > a\} = \{x \in A : f(x) < a/\lambda\}, \tag{5.1.15}$$

δηλαδή μετρήσιμο σύνολο. Σε κάθε περίπτωση, η λf είναι μετρήσιμη (αν $\lambda = 0$, τότε δεν έχουμε να δείξουμε τίποτα).
(iii) Δείχνουμε πρώτα ότι η f^2 είναι μετρήσιμη. Αν $a < 0$, τότε

$$\{x \in A : f^2(x) > a\} = A, \tag{5.1.16}$$

ενώ αν $a \geq 0$, τότε

$$\{x \in A : f(x)^2 > a\} = \{x \in A : f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x \in A : f(x) < -\sqrt{a}\}. \tag{5.1.17}$$

Σε κάθε περίπτωση, το $\{x : f^2(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο. Τώρα, η fg είναι μετρήσιμη, διότι

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}. \tag{5.1.18}$$

(iv) Αν $a = 0$, τότε $\{x \in A : 1/f(x) > 0\} = \{x \in A : f(x) > 0\}$. Αν $a > 0$, τότε

$$\{x \in A : 1/f(x) > a\} = \{x \in A : 0 < f(x) < 1/a\}. \tag{5.1.19}$$

Τέλος, αν $a < 0$ τότε

$$\{x \in A : 1/f(x) > a\} = \{x \in A : f(x) > 0\} \cup \{x \in A : f(x) < 1/a\}. \tag{5.1.20}$$

Σε κάθε περίπτωση, το σύνολο $\{x \in A : 1/f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο.
(v) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\{x \in A : \max\{f, g\}(x) > a\} = \{x \in A : f(x) > a\} \cup \{x \in A : g(x) > a\} \tag{5.1.21}$$

και

$$\{x \in A : \min\{f, g\}(x) < a\} = \{x \in A : f(x) < a\} \cup \{x \in A : g(x) < a\}. \tag{5.1.22}$$

Άρα, οι $\max\{f, g\}$ και $\min\{f, g\}$ είναι μετρήσιμες. Τέλος, η $|f| = \max\{f, -f\}$ είναι μετρήσιμη. $\square$

Μετρήσιμες συναρτήσεις με τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}$

Το επεκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι το $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Επεκτείνουμε την διάταξη του $\mathbb{R}$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ ορίζοντας $-\infty < x < +\infty$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επεκτείνουμε την κλάση των διαστημάτων του $\mathbb{R}$ στην κλάση των διαστημάτων του $\overline{\mathbb{R}}$ προσθέτοντας τα (επεκτεταμένα) διαστήματα $[-\infty, a)$, $[-\infty, a]$, $(a, +\infty]$, $[a, +\infty]$ (όπου $a \in \mathbb{R}$) και $[-\infty, +\infty]$, $[-\infty, +\infty)$, $(-\infty, +\infty]$.

Οι ανοικτές περιοχές του $-\infty$ και του $+\infty$ είναι τα σύνολα $[-\infty, a)$ και $(a, +\infty]$ αντίστοιχα. Οι πράξεις του $\mathbb{R}$ επεκτείνονται με τον γνωστό τρόπο στο $\overline{\mathbb{R}}$. Μη επιτρεπτές πράξεις είναι οι $(+\infty) - (+\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $(\pm\infty)/0$, $(\pm\infty)/(\pm\infty)$. Οι συναρτήσεις $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, όπου A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, λέγονται επεκτεταμένες συναρτήσεις.

Θα επεκτείνουμε τον ορισμό της μετρήσιμης συνάρτησης και στην περίπτωση συναρτήσεων με τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}$.

Ορισμός 5.1.7. Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Η f λέγεται **Lebesgue μετρήσιμη**, ή απλά **μετρήσιμη**, αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο

$$\{x \in A : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty)) \tag{5.1.23}$$

είναι μετρήσιμο.

Όλες οι Προτάσεις που αποδείξαμε ως τώρα ισχύουν για (επεκτεταμένες) μετρήσιμες συναρτήσεις (για τις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων περιοριζόμαστε στο υποσύνολο του πεδίου ορισμού τους στο οποίο οι πράξεις είναι επιτρεπτές). Παρατηρήστε ότι, αν η $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη, τότε τα σύνολα

$$\{x \in A : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f(x) > n\} \tag{5.1.24}$$

και

$$\{x \in A : f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f(x) < -n\} \tag{5.1.25}$$

είναι μετρήσιμα.

Η έννοια του «σχεδόν παντού»

Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Λέμε ότι η $P(x)$ ισχύει **σχεδόν παντού στο** A αν το σύνολο Z των $x \in A$ για τα οποία δεν ισχύει η $P(x)$ έχει μέτρο μηδέν. Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι αν αλλάξουμε τις τιμές μιας μετρήσιμης συνάρτησης σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν, τότε προκύπτει μετρήσιμη συνάρτηση.

Πρόταση 5.1.8. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ συναρτήσεις με $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού στο A. Αν η f είναι μετρήσιμη, τότε η g είναι κι αυτή μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Θέτουμε $B = \{x \in A : f(x) = g(x)\}$ και $Z = \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$. Αφού $\mu(Z) = 0$, το Z είναι μετρήσιμο, άρα και το $B = A \setminus Z$ είναι μετρήσιμο.

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\{x \in A : g(x) > a\} &= \{x \in B : g(x) > a\} \cup \{x \in Z : g(x) > a\} \\
&= \{x \in B : f(x) > a\} \cup \{x \in Z : g(x) > a\} \\
&= \big(B \cap \{x \in A : f(x) > a\}\big) \cup \{x \in Z : g(x) > a\}.
\end{aligned}$$

Το $B \cap \{x \in A : f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο διότι το B είναι μετρήσιμο και το $\{x \in A : f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο λόγω της μετρησιμότητας της f. Το $\{x \in Z : g(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο ως υποσύνολο συνόλου με μέτρο 0. Άρα, το $\{x \in A : g(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο.

Αφού το $a \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η g είναι μετρήσιμη. □

Ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι η μετρησιμότητα διατηρείται για το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων.

Πρόταση 5.1.9. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$. Τότε,*

(i) *Οι συναρτήσεις* $\sup_n f_n$ *και* $\inf_n f_n$ *είναι μετρήσιμες.*

(ii) *Αν η* (f_n) *συγκλίνει κατά σημείο, τότε η συνάρτηση* $f : A \to [-\infty, +\infty]$ *με* $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. (i) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι το

$$\{x \in A : \sup_n f_n(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f_n(x) > a\} \tag{5.1.26}$$

είναι μετρήσιμο σύνολο, και το

$$\{x \in A : \inf_n f_n(x) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f_n(x) < a\} \tag{5.1.27}$$

είναι μετρήσιμο σύνολο. Άρα, οι $\sup_n f_n$ και $\inf_n f_n$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις.

(ii) Θυμηθείτε ότι, για κάθε ακολουθία (a_n) πραγματικών αριθμών έχουμε

$$\limsup_n a_n = \inf_{m\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq m} a_k\right) \quad \text{και} \quad \liminf_n a_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq m} a_k\right). \tag{5.1.28}$$

Η ακολουθία $b_m = \sup_{k\geq m} a_k$ είναι φθίνουσα και συγκλίνει στο $\limsup_n a_n$, ενώ η $\gamma_m = \inf_{k\geq m} a_k$ είναι αύξουσα και συγκλίνει στο $\liminf_n a_n$.

Στην περίπτωσή μας, αν θέσουμε

$$g_m(x) = \sup_{k\geq m} f_k(x) \quad \text{και} \quad h_m(x) = \inf_{k\geq m} f_k(x), \tag{5.1.29}$$

τότε, από το (i), κάθε g_m, h_m είναι μετρήσιμη συνάρτηση, και

$$f(x) = \inf_m g_m(x) = \sup_m h_m(x). \tag{5.1.30}$$

Άρα, πάλι από το (i), η f είναι μετρήσιμη. □

Σημείωση: Η απόδειξη του (ii) δίνει κάτι γενικότερο: Αν (f_n) είναι οποιαδήποτε ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$, τότε οι συναρτήσεις $\limsup_n f_n$ και $\liminf_n f_n$ που ορίζονται από τις

$$\limsup_n f_n(x) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq m} f_k(x)\right) \quad \text{και} \quad \liminf_n f_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq m} f_k(x)\right), \tag{5.1.31}$$

είναι μετρήσιμες. □

Κλείνουμε αυτήν την Παράγραφο με ένα ακόμα τυπικό παράδειγμα Πρότασης που δείχνει ότι τα σύνολα μέτρου 0 είναι αμελητέα σε σχέση με την μετρησιμότητα.

Πρόταση 5.1.10. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$. Αν $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις και $f_n(x) \to f(x)$ σχεδόν παντού στο A, τότε η f είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $B = \{x \in A : f_n(x) \to f(x)\}$. Αν $Z = A \setminus B$, τότε $\mu(Z) = 0$ και το B είναι μετρήσιμο.

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, το $\{x \in B : f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο από την Πρόταση 5.1.9 γιατί $f_n \to f$ στο B, και το $\{x \in Z : f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο ως υποσύνολο του Z (το οποίο έχει μέτρο 0). Άρα, το

$$\{x \in A : f(x) > a\} = \{x \in B : f(x) > a\} \cup \{x \in Z : f(x) > a\} \tag{5.1.32}$$

είναι μετρήσιμο. Αφού το $a \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η g είναι μετρήσιμη. □

5.2 Η συνάρτηση Cantor–Lebesgue

Θεωρούμε τα σύνολα C_n που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του συνόλου C του Cantor. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε συνάρτηση $f_n : [0,1] \to [0,1]$ ως εξής. Αν $J_1^n, \dots, J_{2^n-1}^n$ είναι τα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα που σχηματίζουν το $[0,1] \setminus C_n$, ορίζουμε $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$ για κάθε x στο J_k^n, και επεκτείνουμε γραμμικά σε καθένα από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το C_n ώστε να προκύψει συνεχής συνάρτηση.

Για παράδειγμα, έχουμε $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$. Η f_1 είναι σταθερή και ίση με $1/2$ στο $(1/3,2/3)$, γραμμική στο $[0,1/3]$ με $f(0) = 0$ και $f(1/3) = 1/2$, γραμμική στο $[2/3,1]$ με $f(2/3) = 1/2$ και $f(1) = 1$. Στο δεύτερο βήμα, το $[0,1] \setminus C_2$ αποτελείται από τρία ξένα ανοικτά διαστήματα: στο $(1/9,2/9)$ η f_2 είναι σταθερή και ίση με $1/4$, στο $(1/3,2/3)$ η f_2 είναι σταθερή και ίση με $1/2$, στο $(7/9,8/9)$ η f_2 είναι σταθερή και ίση με $3/4$, ενώ σε καθένα από τα τέσσερα κλειστά διαστήματα του C_2 την επεκτείνουμε γραμμικά σε συνεχή συνάρτηση, ορίζοντας πάλι $f_2(0) = 0$ και $f_2(1) = 1$.

Πρόταση 5.2.1 (συνάρτηση Cantor-Lebesgue)**.** *Η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$. Η f είναι αύξουσα και επί του $[0,1]$. Η εικόνα του C μέσω της f έχει μέτρο $\mu(f(C)) = 1$.*

Απόδειξη. Από την κατασκευή της η ακολουθία $\{f_n\}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Κάθε f_n είναι αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $f_n(0) = 0$ και $f_n(1) = 1$.

(ii) Αν J_k^n είναι κάποιο από τα ανοικτά διαστήματα που αφαιρούμε στο n-οστό βήμα της κατασκευής του C, τότε η f_n είναι σταθερή στο J_k^n, και

$$f_n \equiv f_{n+1} \equiv f_{n+2} \equiv \cdots$$

στο J_k^n.

(iii) Ισχύει

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Από την τρίτη ιδιότητα ελέγχουμε εύκολα ότι η $\{f_n\}$ είναι βασική ακολουθία στον $C[0,1]$: αν $m > n$ τότε

$$\|f_m - f_n\|_\infty \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|f_{k+1} - f_k\|_\infty \leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \to 0 \tag{5.2.1}$$

όταν $m, n \to \infty$. Ο $C[0,1]$ είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|_\infty$, άρα υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

Προφανώς, $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[0,1]$. Αφού κάθε f_n είναι αύξουσα συνάρτηση με $f_n(0) = 0$ και $f_n(1) = 1$, έπεται ότι η f είναι κι αυτή αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Ειδικότερα, η f είναι επί του $[0,1]$.

Τέλος, $f(C) = [0,1]$. Πράγματι, από την δεύτερη ιδιότητα της $\{f_n\}$ βλέπουμε ότι η f είναι σταθερή σε κάθε ανοικτό διάστημα J του συμπληρώματος του C, και μάλιστα αυτή η σταθερή τιμή παίρνεται και στα άκρα του J τα οποία ανήκουν στο C. Αφού η f είναι επί του $[0,1]$, κάθε $y \in [0,1]$ είναι ίσο με $f(x)$ για κάποιο $x \in C$. Από την $f(C) = [0,1]$ είναι φανερό ότι $\mu(f(C)) = 1$. □

Σημείωση. Παρατηρήστε ότι $\mu([0,1] \setminus C) = 1$ και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \notin C$. Πράγματι, αν $x \notin C$ τότε το x ανήκει σε κάποιο ανοικτό διάστημα J στο οποίο η f είναι σταθερή. Συνεπώς, η f είναι παραγωγίσιμη στο x και $f'(x) = 0$. Με άλλα λόγια, η f' είναι σχεδόν παντού ίση με μηδέν, παρόλο που η f είναι αύξουσα και απεικονίζει το $[0,1]$ επί του $[0,1]$.

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor–Lebesgue, μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη μετρήσιμων συνόλων τα οποία δεν είναι σύνολα Borel. Θα χρειαστούμε το εξής Λήμμα.

Λήμμα 5.2.2. *Έστω A σύνολο Borel στο $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, για κάθε Borel σύνολο $B \subseteq \mathbb{R}$, το $f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\}$ είναι σύνολο Borel.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} : \text{το } f^{-1}(B) \text{ είναι σύνολο Borel}\}.$$

Αν B είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό στο A, διότι η f είναι συνεχής. Αφού το A είναι σύνολο Borel, έπεται ότι το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel (εξηγήστε γιατί).

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα – οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα ανοικτά σύνολα, συμπεραίνουμε ότι η Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ περιέχεται στην $\mathcal{A}$. Από τον ορισμό της $\mathcal{A}$ έπεται ότι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B)$ κάθε Borel συνόλου $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel. □

Πρόταση 5.2.3. *Υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του συνόλου του Cantor, το οποίο δεν είναι σύνολο Borel.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $g : [0,1] \to [0,2]$ με $g(x) = f(x) + x$, όπου f η συνάρτηση Cantor–Lebesgue. Η g είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί (το ίδιο και η g^{-1}).

Το σύνολο $g(C)$ είναι μετρήσιμο και $\mu(g(C)) = 1$. Πράγματι, το $g(C)$ είναι κλειστό ως συνεχής εικόνα του συμπαγούς συνόλου C, άρα είναι μετρήσιμο. Επίσης, η g απεικονίζει κάθε ανοικτό διάστημα J του $[0,1] \setminus C$ στο $\{f(J)\} + J$, δηλαδή σε διάστημα ίσου μήκους. Άρα $\mu(g([0,1] \setminus C)) = \sum \mu(J) = 1$. Έπεται ότι $\mu(g(C)) = 1$.

Αφού το $g(C)$ έχει θετικό μέτρο, υπάρχει μη μετρήσιμο υποσύνολο M του $g(C)$. Τότε, το $K = g^{-1}(M)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο διότι είναι υποσύνολο του C το οποίο έχει μηδενικό μέτρο. Όμως, το K δεν είναι σύνολο Borel: αν ήταν, από το Λήμμα 5.2.2 το $M = (g^{-1})^{-1}(K)$ θα ήταν σύνολο Borel ως αντίστροφη εικόνα συνόλου Borel μέσω συνεχούς συνάρτησης. Συνεπώς, το M θα ήταν Lebesgue μετρήσιμο. □

5.3 Προσέγγιση μετρήσιμων συναρτήσεων από απλές συναρτήσεις

Ορισμός 5.3.1 (απλή συνάρτηση)**.** Μια συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται απλή αν είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων μετρήσιμων συνόλων (θα μπορούσαμε να αφαιρέσουμε την υπόθεση ότι τα σύνολα είναι μετρήσιμα, και να μιλάμε για απλές *μετρήσιμες* συναρτήσεις στην περίπτωση που αυτή η υπόθεση ικανοποιείται). Δηλαδή, η ϕ είναι **απλή συνάρτηση** αν

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i} \tag{5.3.1}$$

για κάποιον $n \in \mathbb{N}$, κάποιους πραγματικούς αριθμούς $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ και κάποια μετρήσιμα σύνολα $A_1, \ldots, A_n$.

Παρατηρήστε ότι δεν απαιτούμε από τα σύνολα A_i να είναι ξένα, ούτε από τους αριθμούς λ_i να είναι διακεκριμένοι. Δεν είναι όμως δύσκολο να διαπιστώσετε ότι μια συνάρτηση ϕ είναι απλή αν και μόνο αν παίρνει πεπερασμένες το πλήθος διακεκριμένες πραγματικές τιμές (μία από αυτές μπορεί να ισούται με 0). Πράγματι, το σύνολο των τιμών της συνάρτησης ϕ στην (5.3.1) περιέχεται στο

$$\left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i : \emptyset \neq I \subseteq \{1, \ldots, n\} \right\} \cup \{0\} \tag{5.3.2}$$

(εξηγήστε γιατί). Αν λοιπόν $\{t_1, \ldots, t_m\}$ είναι το σύνολο τιμών της ϕ και αν ορίσουμε

$$E_i = \{\phi = t_i\} = \{x \in \mathbb{R} : \phi(x) = t_i\}, \tag{5.3.3}$$

τότε τα σύνολα E_i είναι ξένα και μετρήσιμα, η ένωσή τους μας δίνει το $\mathbb{R}$, και

$$\phi = \sum_{i=1}^{m} t_i \chi_{E_i}. \tag{5.3.4}$$

Η αναπαράσταση (5.3.4) της ϕ είναι μονοσήμαντα ορισμένη (από την ϕ) και λέγεται **κανονική αναπαράσταση** της ϕ.

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου δείχνει ότι κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση είναι κατά σημείο όριο μιας αύξουσας ακολουθίας απλών μετρήσιμων συναρτήσεων.

Θεώρημα 5.3.2. *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $f : A \to [0,\infty]$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία (ϕ_n) μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \cdots \leq f$ ώστε*

$$\phi_n(x) \nearrow f(x) \tag{5.3.5}$$

για κάθε $x \in A$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε υποσύνολο του A στο οποίο η f είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε $C_n = \{x \in A : f(x) \geq 2^n\}$ και

$$B_{n,k} = \left\{ x \in A : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^{2n} - 1. \tag{5.3.6}$$

Χωρίζουμε δηλαδή το $[0, 2^n]$ σε 2^{2n} διαστήματα μήκους 2^{-n} και θεωρούμε τις αντίστροφες εικόνες τους μέσω της f. Αφού η f είναι μετρήσιμη, τα σύνολα C_n και $B_{n,k}$ είναι μετρήσιμα. Τώρα, ορίζουμε μια απλή μετρήσιμη συνάρτηση ϕ_n ως εξής:

$$\phi_n = 2^n \chi_{C_n} + \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \chi_{B_{n,k}}. \tag{5.3.7}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε ϕ_n ικανοποιεί τα εξής:

(i) $0 \leq \phi_n \leq f$ και η ϕ μηδενίζεται έξω από το A.

(ii) $0 \leq f - \phi_n \leq 2^{-n}$ στο σύνολο $A \setminus C_n = \{x \in A : f(x) < 2^n\}$.

(iii) $\phi_n(x) = 2^n$ αν $f(x) = \infty$.

Από τα (ii) και (iii) συμπεραίνουμε ότι $\phi_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in A$. Πράγματι, αν $f(x) = \infty$ τότε

$$\phi_n(x) = 2^n \to \infty = f(x). \tag{5.3.8}$$

Αν $f(x) < \infty$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x) < 2^{n_0} \leq 2^n$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε, $0 \leq f(x) - \phi_n(x) < 2^{-n}$ για κάθε $n \geq n_0$, άρα $\phi_n(x) \to f(x)$. Παρόμοιος συλλογισμός δείχνει ότι $\phi_n \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε σύνολο της μορφής $\{x \in A : f(x) \leq M\}$, $M > 0$.

Μένει να δείξουμε ότι η (ϕ_n) είναι αύξουσα. Η βασική παρατήρηση είναι ότι

$$\begin{aligned} B_{n,k} &= \{x \in A : k/2^n \leq f(x) < (k+1)/2^n\} \\ &= \left\{x \in A : \frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right\} \cup \left\{x \in A : \frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right\} \\ &= B_{n+1,2k} \cup B_{n+1,2k+1}. \end{aligned}$$

Αν $x \in B_{n+1,2k}$, τότε $\phi_n(x) = k/2^n = (2k)/2^{n+1} = \phi_{n+1}(x)$, ενώ αν $x \in B_{n+1,2k+1}$, τότε $\phi_n(x) = k/2^n < (2k+1)/2^{n+1} = \phi_{n+1}(x)$. Τέλος, αν $x \in C_n$ έχουμε $\phi_n(x) = 2^n \leq \phi_{n+1}(x)$ (εξηγήστε την τελευταία ανισότητα: θα χρειαστεί να χωρίσετε το C_n στα $B_{n+1,2^{n+1}}, B_{n+1,2^{n+1}+1}, \ldots, B_{n+1,2^{2(n+1)}-1}$ και C_{n+1}).

Σε κάθε περίπτωση $\phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x)$, δηλαδή $\phi_n \leq \phi_{n+1}$. □

Έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.3.2 για τις f^+ και f^- χωριστά, παίρνουμε το εξής.

Πόρισμα 5.3.3. *Έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει ακολουθία (ϕ_n) απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $\phi_n : A \to \mathbb{R}$ με*

$$0 \leq |\phi_1| \leq |\phi_2| \leq \cdots \leq |f| \tag{5.3.9}$$

και $\phi_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in A$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε υποσύνολο του A στο οποίο η f είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες (ψ_n) και (ζ_n) μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων ώστε $\psi_n(x) \to f^+(x)$ και $\zeta_n(x) \to f^-(x)$ για κάθε $x \in A$. Τότε, αν ορίσουμε $\phi_n = \psi_n - \zeta_n$, έχουμε $\phi_n(x) \to f^+(x) - f^-(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.

Οι f^+ και f^- είναι φραγμένες σε κάθε υποσύνολο B του A στο οποίο η f είναι φραγμένη. Συνεπώς, $\psi_n \to f^+$ και $\zeta_n \to f^-$ ομοιόμορφα στο B, απ' όπου έπεται ότι $\phi_n \to f$ ομοιόμορφα στο B.

Παρατηρήστε επίσης ότι: αν $C = \{f < 0\}$ τότε $\psi_n \equiv 0$ στο C και $\zeta_n \equiv 0$ στο $A \setminus C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$|\phi_n| = |\psi_n - \zeta_n| = \max\{\psi_n, \zeta_n\} \leq \max\{f^+, f^-\} = |f|. \tag{5.3.10}$$

Από την σχέση αυτή και από το γεγονός ότι οι (ψ_n) και (ζ_n) είναι αύξουσες ακολουθίες συναρτήσεων, έπεται επίσης ότι

$$|\phi_n| = \max\{\psi_n, \zeta_n\} \leq \max\{\psi_{n+1}, \zeta_{n+1}\} = |\phi_{n+1}|. \tag{5.3.11}$$

Από τις (5.3.10) και (5.3.11) έπεται η (5.3.9). □

Παρατηρήστε ότι στην κατασκευή που κάναμε για την απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.2, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η f είναι μετρήσιμη μόνο για να εξασφαλίσουμε ότι τα C_n, $B_{n,k}$ είναι μετρήσιμα σύνολα, δηλαδή για να συμπεράνουμε ότι οι απλές συναρτήσεις ϕ_n είναι μετρήσιμες. Η σύγκλιση των ϕ_n στην f ισχύει τελείως γενικά.

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 5.3.2 με την Πρόταση 5.1.9 παίρνουμε τον εξής χαρακτηρισμό των μετρήσιμων συναρτήσεων.

Θεώρημα 5.3.4. *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$. Η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν είναι κατά σημείο όριο μιάς ακολουθίας απλών μετρήσιμων συναρτήσεων.* □

5.4 Οι τρεις «αρχές του Littlewood»

Οι τρεις «αρχές του Littlewood» διατυπώνονται με κάπως «έντονο τρόπο» ως εξής:

(i) Κάθε σύνολο είναι σχεδόν ίσο με μια πεπερασμένη ένωση διαστημάτων.

(ii) Κάθε συνάρτηση είναι σχεδόν συνεχής.

(iii) Κάθε ακολουθία συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο, συγκλίνει σχεδόν ομοιόμορφα.

Φυσικά, πρέπει να δώσει κανείς την ακριβή διατύπωση αυτών των ισχυρισμών (αλλιώς, είναι προφανώς λανθασμένοι). Τα σύνολα και οι συναρτήσεις στα οποία αναφερόμαστε πρέπει να είναι μετρήσιμα και το τι εννοούμε λέγοντας «σχεδόν» πρέπει να γίνει σαφές. Η χρησιμότητα όμως αυτών των προτάσεων είναι μεγάλη.

Θεώρημα 5.4.1 (μετρήσιμα σύνολα)**.** *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\mu(A) < +\infty$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν διαστήματα $I_1, \dots, I_k$ ώστε το σύνολο $E = I_1 \cup \cdots \cup I_k$ να ικανοποιεί την $\mu(E \triangle A) < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του (εξωτερικού) μέτρου, υπάρχει ακολουθία (I_n) διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) < \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.4.1}$$

Αφού η σειρά των $\mu(I_n)$ συγκλίνει, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(I_n) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.4.2}$$

Ορίζουμε $E = I_1 \cup \cdots \cup I_k$. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} \mu(E \setminus A) &\leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \setminus A\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) - \mu(A) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) - \mu(A) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

και

$$A \setminus E = A \setminus (I_1 \cup \cdots \cup I_k) \subseteq \bigcup_{n=k+1}^{\infty} I_n,$$

άρα

$$\mu(A \setminus E) \leq \mu\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} I_n\right) \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(I_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έπεται ότι

$$\mu(A \triangle E) = \mu(A \setminus E) + \mu(E \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{5.4.3}$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Θεώρημα 5.4.2 (θεώρημα Egorov). *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\mu(A) < +\infty$ και έστω (f_k) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_k : A \to \mathbb{R}$ η οποία συγκλίνει κατά σημείο στην μετρήσιμη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ σχεδόν παντού στο A. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq A$ ώστε $\mu(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ και $f_k \to f$ ομοιόμορφα στο F_ε.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f_k \to f$ παντού στο A (εξηγήστε γιατί). Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο

$$A_{n,m} = \left\{x \in A : |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \text{ για κάθε } k \geq m\right\} = \bigcap_{k=m}^{\infty} \{|f_k - f| < 1/n\}. \tag{5.4.4}$$

Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρήστε ότι

$$A_{n,m+1} = \bigcap_{k=m+1}^{\infty} \{|f_k - f| < 1/n\} \supseteq \bigcap_{k=m}^{\infty} \{|f_k - f| < 1/n\} = A_{n,m} \tag{5.4.5}$$

δηλαδή, η ακολουθία $(A_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Παρατηρήστε επίσης ότι, για κάθε $x \in A$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_k(x) - f(x)| < 1/n$ για κάθε $k \geq m$, διότι $f_k(x) \to f(x)$. Συνεπώς, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in A_{n,m}$. Αυτό αποδεικνύει ότι

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m}. \tag{5.4.6}$$

Συνεπώς, $\mu(A_{n,m}) \to \mu(A)$. Άρα, μπορούμε να βρούμε $m_n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu(A) < \mu(A_{n,m_n}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}. \tag{5.4.7}$$

Ορίζουμε

$$U_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n,m_n}. \tag{5.4.8}$$

Τότε, $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο U_ε. Αυτό αιτιολογείται ως εξής: έστω $\delta > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1/n < \delta$. Τότε, για κάθε $k \geq m_n$ και για κάθε $x \in U_\varepsilon$ έχουμε $x \in A_{n,m_n}$, άρα

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{n} < \delta. \tag{5.4.9}$$

Δηλαδή, $\|(f_k - f)\,|_{U_\varepsilon}\|_\infty < \delta$ για κάθε $k \geq m_n$.

Επίσης, από την (5.4.7) βλέπουμε ότι

$$\mu(A \setminus U_\varepsilon) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \setminus A_{n,m_n})\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \setminus A_{n,m_n}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.4.10}$$

Το U_ε είναι μετρήσιμο, όχι απαραίτητα κλειστό, σύνολο. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq U_\varepsilon$ ώστε $\mu(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε,

$$\mu(A \setminus F_\varepsilon) = \mu(A \setminus U_\varepsilon) + \mu(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{5.4.11}$$

και από το γεγονός ότι $f_k \to f$ ομοιόμορφα στο U_ε είναι φανερό ότι $f_k \to f$ ομοιόμορφα στο F_ε. □

Παρατήρηση 5.4.3. Η υπόθεση ότι $\mu(A) < +\infty$ είναι απαραίτητη. Αν θεωρήσουμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_k = \chi_{[k,\infty)}$, τότε $f_k(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όμως, για κάθε μετρήσιμο $C \subset \mathbb{R}$ με $\mu(C) < +\infty$ ισχύει $\|f_k\,|_{\mathbb{R}\setminus C}\|_\infty = 1$. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_k) στην μηδενική συνάρτηση σε κάποιο σύνολο F_ε για το οποίο $\mu(\mathbb{R} \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Εξηγήστε τις λεπτομέρειες.

Θεώρημα 5.4.4 (θεώρημα Luzin). *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\mu(A) < +\infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq A$ ώστε $\mu(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ και η $f\,|_{F_\varepsilon}$ να είναι συνεχής συνάρτηση.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα τον ισχυρισμό του Θεωρήματος στην περίπτωση που η f είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση $f = \chi_E$ κάποιου μετρήσιμου υποσυνόλου του A. Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε F κλειστό υποσύνολο του A και G ανοικτό στο A ώστε $V \subseteq E \subseteq G$ και $\mu(G \setminus F) < \varepsilon/2$. Θεωρούμε τον περιορισμό της f στο $F_1 = V \cup (A \setminus G)$. Τα $V, A \setminus G$

είναι κλειστά στο A και έχουμε $f \equiv 1$ στο V και $f \equiv 0$ στο $A \setminus G$. Μπορούμε τότε να ελέγξουμε ότι η $f|_{F_1}$ είναι συνεχής (εξηγήστε το, για παράδειγμα, με την αρχή της μεταφοράς). Κατόπιν, μπορούμε να βρούμε κλειστό $F \subseteq F_1$ με $\mu(F_1 \setminus F) < \varepsilon/2$. Τότε, $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$ και η $f|_F$ είναι συνεχής.

Απο τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις υποσυνόλων του A μπορούμε τώρα να περάσουμε σε συναρτήσεις της μορφής

$$\phi = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_{E_i}, \tag{5.4.12}$$

όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$ και E_i μετρήσιμα υποσύνολα του A (εξηγήστε τις λεπτομέρειες).

Έστω τώρα $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Από το Θεώρημα 5.3.2 υπάρχει ακολουθία (ϕ_n) συναρτήσεων της μορφής (5.4.12) ώστε $\phi_n \to f$ στο A. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $A_n \subseteq A$ με $\mu(A \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+3}}$ ώστε η $\phi_n|_{A_n}$ να είναι συνεχής. Επίσης, από το θεώρημα του Egorov μπορούμε να βρούμε $B \subseteq A$ με $\mu(A \setminus B) < \varepsilon/4$ ώστε $\phi_n \to f$ ομοιόμορφα στο B. Ορίζουμε

$$U_\varepsilon = B \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right). \tag{5.4.13}$$

Τότε,

$$\mu(A \setminus U_\varepsilon) \leq \mu(A \setminus B) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+3}} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.4.14}$$

Επίσης, όλες οι $\phi_n|_{U_\varepsilon}$ είναι συνεχείς (διότι $U_\varepsilon \subseteq A_n$ για κάθε n) και $\phi_n|_{U_\varepsilon} \to f|_{U_\varepsilon}$ ομοιόμορφα (διότι $U_\varepsilon \subseteq B$). Έπεται ότι η $f|_{U_\varepsilon}$ είναι συνεχής.

Το U_ε είναι μετρήσιμο, όχι απαραίτητα κλειστό, σύνολο. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq U_\varepsilon$ ώστε $\mu(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε,

$$\mu(A \setminus F_\varepsilon) = \mu(A \setminus U_\varepsilon) + \mu(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{5.4.15}$$

και από το γεγονός ότι η $f|_{U_\varepsilon}$ είναι συνεχής είναι φανερό ότι η $f|_{F_\varepsilon}$ είναι συνεχής. $\square$

5.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $f : E \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f_a : A \to [-\infty, +\infty]$ με

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } f(x) \leq a \\ a, & \text{αν } f(x) > a \end{cases}$$

είναι μετρήσιμη.

2. Αν η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε η f' είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη: Γράψτε την f' σαν όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων.

3. (α) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu(A) = 0$, δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : A \to [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω A, B μετρήσιμα σύνολα με $\mu(B) = 0$ και έστω $f : A \cup B \to [-\infty, +\infty]$ μια συνάρτηση της οποίας ο περιορισμός $f|_A$ στο A είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

(γ) Αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο σύνολο και η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν παντού στο A, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

4. (α) Δώστε παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης f με την ιδιότητα η f^2 να είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αν η f^2 είναι μετρήσιμη και το σύνολο $\{x \in A : f(x) > 0\}$ είναι μετρήσιμο, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο

$$L = \{x \in A \mid \text{ η ακολουθία } (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνει } \}$$

είναι μετρήσιμο.

6. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$ συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, το σύνολο $\{x \in A : f(x) > q\}$ είναι μετρήσιμο. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το B είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in B\}$ είναι μετρήσιμο.

Υπόδειξη: Η κλάση $\{E \subseteq \mathbb{R} \mid \text{ το } f^{-1}(E) \text{ είναι μετρήσιμο}\}$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα ανοιχτά σύνολα.

Ομάδα Β′

8. (α) Δείξτε ότι αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

(β) Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor–Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

9. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.
(α) Δείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα.
(β) Δείξτε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subset [a,b]$ με $\mu(A) = 0$ ισχύει $\mu(f(A)) = 0$.

10. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\mu(A) < \infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\omega_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\omega_f(t) = \mu(\{x \in A : \ f(x) > t\}).$$

(α) Δείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;
(β) Αν οι $f_k, f : A \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_k \uparrow f$, δείξτε ότι $\omega_{f_k} \uparrow \omega_f$.

11. Έστω E μη μετρήσιμο υποσύνολο του $(0,1)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x\chi_E(x)$. Δείξτε ότι η f δεν είναι μετρήσιμη, αλλά για κάθε $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ το σύνολο $\{x : f(x) = \alpha\}$ είναι μετρήσιμο.

Μπορείτε να βρείτε μη μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x : g(x) = \alpha\}$ να είναι μετρήσιμο;

12. Σωστό ή λάθος; Αν η f είναι μετρήσιμη στο $(a, b-\varepsilon)$ για κάθε $0 < \varepsilon < b-a$, τότε η f είναι μετρήσιμη στο (a,b).

13. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

14. Έστω (ϕ_n) ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν $\phi_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι φραγμένη.

Ομάδα Γ′

15. (α) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^\infty \mu(\{x : f_n(x) > \alpha\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) \leq \alpha$ για κάθε $x \notin Z$.
(β) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\varepsilon_n \to 0^+$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^\infty \mu(\{x : f_n(x) > \varepsilon_n\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \notin Z$.

16. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (α_n) θετικών πραγματικών αριθμών και υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} = 0$ για κάθε $x \notin Z$.
Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\beta_n > 0$ ώστε $\mu(\{x : |f_n(x)| > \beta_n\}) < 1/2^n$.

17. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι t-περιοδική και s-περιοδική για κάποιους $t, s > 0$ με $t/s \notin \mathbb{Q}$, δείξτε ότι η f είναι σχεδόν παντού σταθερή.

Κεφάλαιο 6

Ολοκλήρωμα Lebesgue

Σε αυτήν την παράγραφο θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue. Οι ιδιότητες που θα θέλαμε να ικανοποιεί είναι οι εξής:

(i) Αν το A είναι μετρήσιμο, τότε $\int_A \chi_A = \mu(A)$, όπου χ_A είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του A.

(ii) Το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό: αν f, g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις (ορισμένες στο ίδιο σύνολο) και $t, s \in \mathbb{R}$, τότε

$$\int (tf + sg) = t \int f + s \int g.$$

(iii) Το ολοκλήρωμα είναι «θετικό»: αν η f είναι ολοκληρώσιμη και $f \geq 0$, τότε $\int f \geq 0$. Αφού απαιτούμε και την γραμμικότητα, η θετικότητα είναι ισοδύναμη με την μονοτονία: αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες (ορισμένες στο ίδιο σύνολο) και $f \geq g$, τότε $\int f \geq \int g$.

(iv) Το ολοκλήρωμα ορίζεται για μια ευρεία κλάση συναρτήσεων. Οι φραγμένες Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις είναι Lebesgue ολοκληρώσιμες, και τα δύο ολοκληρώματα συμπίπτουν.

Ο ορισμός του ολοκληρώματος Lebesgue δίνεται σε τρία βήματα. Τελείως σχηματικά, η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι η εξής:

(i) Στην §6.1 ορίζουμε το ολοκλήρωμα για κάποιες απλές μετρήσιμες συναρτήσεις, τους γραμμικούς συνδυασμούς χαρακτηριστικών συναρτήσεων μετρήσιμων συνόλων με πεπερασμένο μέτρο. Ο ορισμός είναι προφανής από τις ιδιότητες (i) και (ii) που απαιτούμε για το ολοκλήρωμα.

(ii) Στην §6.2 δίνουμε τον ορισμό του $\int f$ για κάθε μετρήσιμη $f \geq 0$. Η απαίτηση της μονοτονίας και το γεγονός ότι κάθε μετρήσιμη μη αρνητική συνάρτηση είναι το όριο μιας αύξουσας ακολουθίας απλών μετρήσιμων συναρτήσεων υποδεικνύουν ότι το $\int f$ θα μπορούσε να οριστεί ως το supremum των ολοκληρωμάτων $\int \phi$ πάνω από όλες τις απλές, μη αρνητικές, ολοκληρώσιμες $\phi \leq f$.

(iii) Στην §6.3 δίνουμε τον γενικό ορισμό: $\int f = \int f^+ - \int f^-$, αν το δεξιό μέλος έχει νόημα. Ο ορισμός αυτός επιβάλλεται από την απαίτηση της γραμμικότητας.

Στην πορεία, θα αποδείξουμε τις βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesgue. Ιδιαίτερα μας ενδιαφέρουν οι καλές ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesgue σε σχέση με τις συγκλίνουσες ακολουθίες ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (θεώρημα μονότονης σύγκλισης και θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης).

Το ολοκλήρωμα Lebesgue ορίζεται καλά για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση που είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα. Ειδικότερα, οι Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες κατά Lebesgue. Στην §6.4 συγκρίνουμε τα δύο ολοκληρώματα.

6.1 Ολοκλήρωμα Lebesgue για απλές μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 6.1.1. Έστω $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απλή μετρήσιμη συνάρτηση. Λέμε ότι η ϕ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη αν το σύνολο

$$\{\phi \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \phi(x) \neq 0\}$$

έχει πεπερασμένο μέτρο. Αυτό σημαίνει ότι η κανονική αναπαράσταση της ϕ είναι

$$\phi = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}, \tag{6.1.1}$$

όπου $\lambda_0 = 0$ και $A_0 = \{\phi = 0\}$, οι λ_i είναι διακεκριμένοι, τα A_i είναι ξένα και μετρήσιμα, και $\mu(A_i) < +\infty$ αν $i \neq 0$ (αναγκαστικά, $\mu(A_0) = \infty$). Το ολοκλήρωμα της ϕ ορίζεται από την

$$\int \phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu(A_i). \tag{6.1.2}$$

Αν υιοθετήσουμε την σύμβαση $0 \cdot \infty = 0$, μπορούμε να γράφουμε

$$\int \phi = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mu(A_i) = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \lambda \, \mu(\{\phi = \lambda\}). \tag{6.1.3}$$

Λήμμα 6.1.2. *Έστω ϕ ολοκληρώσιμη απλή συνάρτηση και έστω $\phi = \sum_{i=1}^n b_i\chi_{E_i}$ τυχούσα αναπαράσταση της ϕ ώστε τα E_i να είναι ξένα και μετρήσιμα. Τότε,*

$$\int \phi = \sum_{i=1}^n b_i\mu(E_i). \tag{6.1.4}$$

Απόδειξη. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ θέτουμε $J_\lambda = \{i \leq n : b_i = \lambda\}$. Τότε,

$$\{\phi = \lambda\} = \bigcup_{i\in J_\lambda} E_i \tag{6.1.5}$$

και

$$\lambda\,\mu(\{\phi = \lambda\}) = \sum_{i\in J_\lambda} b_i\mu(E_i). \tag{6.1.6}$$

Άρα,

$$\int \phi = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} \lambda\,\mu(\{\phi = \lambda\}) = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}}\sum_{i\in J_\lambda} b_i\mu(E_i) = \sum_{i\in\cup_\lambda J_\lambda} b_i\mu(E_i) = \sum_{i=1}^n b_i\mu(E_i). \tag{6.1.7}$$

Δηλαδή, ισχύει η (6.1.4). □

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.1.2 μπορούμε να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό και μονότονο (στην κλάση των απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων).

Πρόταση 6.1.3. *Έστω ϕ και ψ απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.*

(i) *Αν $t, s \in \mathbb{R}$, τότε $\int(t\phi + s\psi) = t\int\phi + s\int\psi$.*

(ii) *Αν $\phi \geq \psi$, τότε $\int\phi \geq \int\psi$.*

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε τις κανονικές μορφές

$$\phi = \sum_{i=0}^n a_i\chi_{A_i} \quad \text{και} \quad \psi = \sum_{j=0}^k b_j\chi_{B_j}, \tag{6.1.8}$$

των ϕ και ψ (οι a_i είναι διακεκριμένοι, τα A_i ξένα μετρήσιμα με ένωση το $\mathbb{R}$, $a_0 = 0$ και $\mu(A_i) < \infty$ αν $i \neq 0$ – αντίστοιχες ιδιότητες έχουν τα b_j, B_j). Παρατηρούμε ότι, από την $\bigcup\limits_{i=0}^n A_i = \bigcup\limits_{j=0}^k B_j = \mathbb{R}$ έπεται ότι

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=0}^n\bigcup_{j=0}^k (A_i \cap B_j). \tag{6.1.9}$$

Τα $A_i \cap B_j$ είναι ξένα, μετρήσιμα, και έχουν πεπερασμένο μέτρο (με την εξαίρεση του $A_0 \cap B_0$). Επίσης,

(6.1.10)
$$\phi = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_i \chi_{A_i\cap B_j} \quad , \quad \psi = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} b_j \chi_{A_i\cap B_j}$$

και

(6.1.11)
$$t\phi + s\psi = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}(ta_i + sb_j)\chi_{A_i\cap B_j}.$$

Από το Λήμμα 6.1.2 παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int (t\phi + s\psi) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}(ta_i + sb_j)\mu(A_i\cap B_j)\\
&= t\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_i\mu(A_i\cap B_j) + s\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} b_j\mu(A_i\cap B_j)\\
&= t\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{k}\mu(A_i\cap B_j) + s\sum_{j=0}^{k} b_j\sum_{i=0}^{n}\mu(A_i\cap B_j)\\
&= t\sum_{i=0}^{n} a_i\mu(A_i) + s\sum_{j=0}^{k} b_j\mu(B_j)\\
&= t\int\phi + s\int\psi.
\end{aligned}$$

(ii) Αν $\phi \geq \psi$, τότε η $\phi - \psi$ είναι απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές. Από το (i),

(6.1.12)
$$\int\phi - \int\psi = \int(\phi - \psi) \geq 0.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι προφανής από την (6.1.2), αφού $\phi - \psi \geq 0$. □

Πόρισμα 6.1.4. *Έστω $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και $E_1, \ldots, E_n$ – όχι αναγκαστικά ξένα – μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $\mu(E_i) < \infty$, $i = 1, \ldots, n$. Τότε,*

(6.1.13)
$$\int\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{E_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(E_i).$$

Απόδειξη. Κάθε χ_{E_i} είναι απλή και ολοκληρώσιμη, διότι $\mu(E_i) < \infty$. Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος για απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. □

Ορισμός 6.1.5. Έστω ϕ απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο E του $\mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\int_E \phi := \int \phi\chi_E. \tag{6.1.14}$$

Η $\phi\chi_E$ είναι απλή και ολοκληρώσιμη: αν $\phi = \sum a_i\chi_{A_i}$, τότε $\phi\chi_E = \sum a_i\chi_{A_i}\chi_E = \sum a_i\chi_{A_i\cap E}$ και τα σύνολα $A_i \cap E$ έχουν πεπερασμένο μέτρο, διότι τα σύνολα A_i έχουν πεπερασμένο μέτρο. Συνεπώς, το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (6.1.14) ορίζεται καλά.

Στην περίπτωση που $E = [a,b]$, θα χρησιμοποιούμε και τον συμβολισμό

$$\int_a^b \phi := \int_{[a,b]} \phi. \tag{6.1.15}$$

Γενικά, θα αποφεύγουμε τον συμβολισμό $\int_a^b \phi(x)dx$ για το ολοκλήρωμα Lebesgue (ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης με το ολοκλήρωμα Riemann).

Παρατήρηση 6.1.6. Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια απλή παρατήρηση. Η συνάρτηση του Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}} : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι απλή και ολοκληρώσιμη (το $\mathbb{Q}$ είναι μετρήσιμο). Έχουμε

$$\int_a^b \chi_{\mathbb{Q}} = 0 \tag{6.1.16}$$

για κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$. Θυμηθείτε ότι η $\chi_{\mathbb{Q}}$ δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

6.2 Ολοκλήρωμα Lebesgue για μη αρνητικές συναρτήσεις

Ορισμός 6.2.1. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε το **ολοκλήρωμα Lebesgue** της f ως εξής:

$$\int f = \sup\left\{ \int \phi \mid 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ απλή ολοκληρώσιμη} \right\}. \tag{6.2.1}$$

Η ποσότητα αυτή είναι καλά ορισμένη (η μηδενική συνάρτηση είναι απλή ολοκληρώσιμη και $0 \leq f$), μη αρνητική και μπορεί να πάρει την τιμή $+\infty$. Θα λέμε ότι η f είναι **Lebesgue ολοκληρώσιμη** αν $\int f < +\infty$.

Παρατηρήσεις 6.2.2. (α) Το πρώτο πράγμα που πρέπει να εξασφαλίσουμε είναι ότι ο νέος ορισμός του ολοκληρώματος συμφωνεί με τον ορισμό του ολοκληρώματος της §6.1 στην περίπτωση των μη αρνητικών απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Δηλαδή ότι, αν η $\phi \geq 0$ είναι απλή ολοκληρώσιμη, τότε

$$\int \phi = \sup\left\{ \int \psi \mid 0 \leq \psi \leq \phi, \psi \text{ απλή ολοκληρώσιμη} \right\}. \tag{6.2.2}$$

Αυτό είναι άμεσο, από την μονοτονία του ολοκληρώματος απλών συναρτήσεων - Πρόταση 6.1.3 - και από την $0 \leq \phi \leq \phi$.

Παρατηρήστε ότι, με τον νέο ορισμό, έχουμε τώρα ορίσει το $\int \phi$ για κάθε μη αρνητική απλή μετρήσιμη συνάρτηση (δεν απαιτούμε την $\mu(\{\phi \neq 0\}) < \infty$). Ειδικότερα, αν A είναι οποιοδήποτε μετρήσιμο σύνολο, τότε $\int \chi_A = \mu(A)$. Αυτό έπεται από τον ορισμό στην περίπτωση που $\mu(A) < \infty$, ενώ αν $\mu(A) = \infty$ έχουμε $\chi_A \geq \chi_{A\cap[-n,n]}$ άρα

(6.2.3) $$\int \chi_A \geq \sup_n \int \chi_{A\cap[-n,n]} = \sup_n \mu(A \cap [-n,n]) = \mu(A) = \infty.$$

(β) Από τον ορισμό έπονται άμεσα οι εξής ιδιότητες:

(i) Αν $0 \leq f \leq g$ τότε $\int f \leq \int g$.

(ii) Αν $t > 0$ και $f \geq 0$ τότε $\int (tf) = t \int f$.

(γ) Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση και έστω E μετρήσιμο σύνολο. Ορίζουμε

(6.2.4) $$\int_E f = \int f\chi_E.$$

Αν $f : E \to [0,\infty]$, επεκτείνουμε την f σε μια συνάρτηση $\tilde{f} : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ θέτοντας $\tilde{f}(x) = 0$ αν $x \notin E$, και ορίζουμε

(6.2.5) $$\int_E f = \int \tilde{f}.$$

Παρατηρήστε ότι η $\tilde{f}$ είναι μετρήσιμη και $\int_E \tilde{f} = \int \tilde{f} = \int_E f$.

(δ) Μερικές ακόμα χρήσιμες ιδιότητες προκύπτουν εύκολα από τον ορισμό (6.2.4):

(iii) Αν $\mu(E) = 0$ και $f \geq 0$, τότε $\int_E f = 0$. Πράγματι, αν η ϕ είναι απλή ολοκληρώσιμη και $0 \leq \phi \leq f\chi_E$, τότε $\phi\chi_E = \sum_{i=1}^n a_i\chi_{E_i}$ όπου $\mu(E_i) = 0$, άρα

(6.2.6) $$\int \phi = \int \phi\chi_E = 0.$$

(iv) Αν $E \subset F$ και $f \geq 0$, τότε $\int_E f \leq \int_F f$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f\chi_E \leq f\chi_F$.

(v) Αν $0 \leq f \leq M$ στο E, τότε $\int_E f \leq M\mu(E)$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f\chi_E \leq M\chi_E$.

Η ανισότητα της επόμενης Πρότασης είναι απλή αλλά, όπως θα δούμε στη συνέχεια, εξαιρετικά σημαντική.

Θεώρημα 6.2.3 (ανισότητα του Markov)**.** *Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $a > 0$,*

$$\int f \geq a\,\mu(\{x : f(x) \geq a\}). \tag{6.2.7}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $f \geq a\chi_{\{f\geq a\}}$. Άρα,

$$\int f \geq \int a\chi_{\{f\geq a\}} = a\,\mu(\{f \geq a\}). \tag{6.2.8}$$

Πόρισμα 6.2.4. *Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η f παίρνει πεπερασμένη τιμή σχεδόν παντού: $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$.*

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\{f = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f \geq n\}. \tag{6.2.9}$$

Η ακολουθία $E_n = \{f \geq n\}$ είναι φθίνουσα, και από την ανισότητα του Chebyshev έχουμε

$$\mu(E_n) \leq \frac{1}{n} \int f \to 0 \tag{6.2.10}$$

όταν $n \to \infty$. Άρα,

$$\mu(\{f = +\infty\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0 \tag{6.2.11}$$

από την Πρόταση 4.4.10. □

Το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα για το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι το **θεώρημα μονότονης σύγκλισης**. Μεταξύ άλλων, θα μας εξασφαλίσει την γραμμικότητα του ολοκληρώματος Lebesgue για μη αρνητικές συναρτήσεις. Για την απόδειξή του θα χρειαστούμε ένα Λήμμα.

Λήμμα 6.2.5. *Έστω ϕ απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν (E_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, τότε*

$$\int_E \phi = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \phi. \tag{6.2.12}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε $\phi = \sum_{i=1}^{m} a_i\chi_{A_i}$, όπου $a_i > 0$ και τα A_i είναι ξένα μετρήσιμα σύνολα με πεπερασμένο μέτρο. Τότε,

$$\int_E \phi = \int \phi\chi_E = \sum_{i=1}^{m} a_i\mu(A_i \cap E). \tag{6.2.13}$$

Αφού $E_n \nearrow E$, έχουμε $\mu(A_i \cap E_n) \nearrow \mu(A_i \cap E)$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Άρα,

$$\begin{aligned} \int \phi &= \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{k} a_i \lim_{n\to\infty} \mu(A_i \cap E_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i \cap E_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \phi. \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 6.2.6 (Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης)**.** *Έστω (f_n) αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,*

$$\int \Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \int f_n. \tag{6.2.14}$$

Απόδειξη. Αφού η (f_n) είναι αύξουσα, η συνάρτηση

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_n f_n(x) \tag{6.2.15}$$

ορίζεται καλά, είναι μη αρνητική και μετρήσιμη. Επίσης,

$$\int f_n \leq \int f_{n+1} \leq \int f \tag{6.2.16}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα το $\lim \int f_n$ υπάρχει και

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f. \tag{6.2.17}$$

Για να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, αρκεί να δείξουμε το εξής: Για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση ϕ με $0 \leq \phi \leq f$,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \geq (1-\varepsilon) \int \phi. \tag{6.2.18}$$

Στην περίπτωση που $\int f < \infty$, παίρνοντας supremum ως προς ϕ συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \int f_n \geq (1-\varepsilon) \int f$ για κάθε $0 < \varepsilon < 1$, απ' όπου έπεται το ζητούμενο. Στην περίπτωση που $\int f = \infty$, παίρνοντας πάλι supremum ως προς ϕ, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \int f_n = +\infty = \int f$.

Έστω ϕ απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $0 \leq \phi \leq f$. Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συνόλων $E_n = \{f_n \geq (1-\varepsilon)\phi\}$. Αφού η (f_n) είναι αύξουσα, έχουμε $E_n \subseteq E_{n+1}$ για κάθε n. Δηλαδή, η (E_n) είναι αύξουσα.

Παρατηρούμε ότι αν $f(x) > 0$, τότε $f_n(x) \to f(x) > (1-\varepsilon)\phi(x)$, άρα $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Αν πάλι $f(x) = 0$, τότε $\phi(x) = 0$, άρα $x \in E_n$ για κάθε n. Επομένως, $E_n \nearrow \mathbb{R}$. Από την μονοτονία του ολοκληρώματος,

$$\int f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} (1-\varepsilon)\phi = (1-\varepsilon)\int_{E_n} \phi \tag{6.2.19}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε εφαρμόζοντας το Λήμμα 6.2.5 παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \geq (1-\varepsilon) \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \phi = (1-\varepsilon) \int \phi. \tag{6.2.20}$$

Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, μπορούμε να δώσουμε μια πληρέστερη διατύπωση του Θεωρήματος 5.3.2 για την προσέγγιση μιας μετρήσιμης συνάρτησης από απλές.

Θεώρημα 6.2.7. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία (ψ_n) μη αρνητικών απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $\psi_n \leq f$ με τις εξής ιδιότητες: $f = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n$ και $\int f = \lim\limits_{n\to\infty} \int \psi_n$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.3.2 υπάρχει αύξουσα ακολουθία (ϕ_n) μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων με $\phi_n \nearrow f$. Ορίζουμε $\psi_n = \phi_n \chi_{[-n,n]}$. Κάθε ψ_n είναι ολοκληρώσιμη, γιατί $\mu(\{\psi_n \neq 0\}) \leq \mu([-n,n]) < \infty$. Αφού $\chi_{[-n,n]} \nearrow 1$, εύκολα ελέγχουμε ότι $\psi_n \nearrow f$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, $\int \psi_n \nearrow \int f$. □

Έχοντας στην διάθεσή μας το προηγούμενο θεώρημα, και χρησιμοποιώντας την προσθετικότητα του ολοκληρώματος για απλές συναρτήσεις, μπορούμε να αποδείξουμε την προσθετικότητα του ολοκληρώματος για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις.

Θεώρημα 6.2.8. *Έστω f και g μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

$$\int (f+g) = \int f + \int g. \tag{6.2.21}$$

Ειδικότερα, αν E και F είναι ξένα μετρήσιμα σύνολα, τότε

$$\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f. \tag{6.2.22}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.2.7, υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες (ϕ_n) και (ψ_n) μη αρνητικών, απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\phi_n \nearrow f$ και $\psi_n \nearrow g$. Τότε, $\phi_n + \psi_n \nearrow f+g$ και, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\begin{aligned} \int (f+g) &= \lim_{n\to\infty} \int (\phi_n + \psi_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\int \phi_n + \int \psi_n \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \phi_n + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n = \int f + \int g. \end{aligned}$$

Για την δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την προσθετικότητα του ολοκληρώματος για απλές συναρτήσεις. Το δεύτερο συμπέρασμα του Θεωρήματος προκύπτει από το πρώτο αν θεωρήσουμε τις $f\,\chi_E$ και $f\,\chi_F$: αφού τα E και F είναι ξένα, έχουμε $f\,\chi_E + f\,\chi_F = f\,\chi_{E\cup F}$. □

Η επόμενη Πρόταση ουσιαστικά δείχνει ότι αν δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις συμπίπτουν σχεδόν παντού, τότε τα ολοκληρώματά τους είναι ίσα (το ολοκλήρωμα δεν μεταβάλλεται αν αλλάξουμε τις τιμές μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης σε ένα σύνολο μέτρου 0).

Πρόταση 6.2.9. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, $\int f = 0$ αν και μόνο αν $f = 0$ σχεδόν παντού.*

Απόδειξη. Αν $f = 0$ σχεδόν παντού, τότε $\mu(\{f > 0\}) = 0$. Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 6.2.2(γ) βλέπουμε ότι

$$\int f = \int_{\{f=0\}} f + \int_{\{f>0\}} f = 0 + 0 = 0. \tag{6.2.23}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\int f = 0$. Για κάθε n ορίζουμε $E_n = \{f \geq 1/n\}$. Από την ανισότητα του Markov,

$$\mu(E_n) = \mu(\{f \geq 1/n\}) \leq n \int f = 0, \tag{6.2.24}$$

δηλαδή $\mu(E_n) = 0$. Αφού $E_n \nearrow \{f > 0\}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\mu(\{f > 0\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0. \tag{6.2.25}$$

Δηλαδή, $f = 0$ σχεδόν παντού. □

Το Θεώρημα Beppo Levi που ακολουθεί είναι ουσιαστικά αναδιατύπωση του Θεωρήματος Μονότονης Σύγκλισης: το ολοκλήρωμα Lebesgue για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις είναι αριθμήσιμα προσθετικό.

Θεώρημα 6.2.10 (Beppo Levi). *Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n. \tag{6.2.26}$$

Απόδειξη. Οι f_n είναι μη αρνητικές, επομένως η $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ορίζεται καλά και είναι το κατά σημείο όριο της αύξουσας ακολουθίας $s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$ (υπάρχει βέβαια το ενδεχόμενο να έχουμε $f(x) = \infty$ για κάποια x).

Από την (πεπερασμένη) προσθετικότητα του ολοκληρώματος για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, έχουμε

$$\int s_N = \int \left(\sum_{n=1}^{N} f_n \right) = \sum_{n=1}^{N} \int f_n \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n. \tag{6.2.27}$$

Από την άλλη πλευρά, το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μας εξασφαλίζει ότι

$$\int s_N \nearrow \int f = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right), \tag{6.2.28}$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Πόρισμα 6.2.11. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση και έστω (E_n) ακολουθία ξένων μετρήσιμων συνόλων. Τότε,*

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f. \tag{6.2.29}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις $f_n = f\chi_{E_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Αφού τα E_n είναι ξένα, έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f\,\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$. □

Ορισμός 6.2.12. Έστω $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Μια συνολοσυνάρτηση $\Phi : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ λέγεται **μέτρο στην** $\mathcal{A}$ αν ικανοποιεί τα εξής:

- $\Phi(\emptyset) = 0$.
- Αν (E_n) είναι μια ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$, τότε $\Phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(E_n)$.

Το μέτρο Lebesgue μ στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι ένα παράδειγμα μέτρου.

Σύμφωνα με αυτόν τον γενικό ορισμό, τα αποτελέσματά μας για το ολοκλήρωμα Lebesgue μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων δείχνουν το εξής:

Θεώρημα 6.2.13. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε συνολοσυνάρτηση $\Phi_f : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ ως εξής: αν $E \in \mathcal{M}$, θέτουμε*

$$\Phi_f(E) = \int_E f. \tag{6.2.30}$$

Τότε, η Φ_f είναι μέτρο. □

Σημείωση: Παρατηρήστε ότι το μέτρο Lebesgue μ αντιστοιχεί στην συνολοσυνάρτηση Φ που ορίζεται από την σταθερή συνάρτηση $f \equiv 1$.

Το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μας λέει ότι αν μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων f_n αυξάνει κατά σημείο στην f, τότε μπορούμε να «εναλλάξουμε τα όρια»: το ολοκλήρωμα του ορίου είναι το όριο των ολοκληρωμάτων. Το Λήμμα του Fatou που ακολουθεί μας δίνει αντίστοιχη πληροφορία στην περίπτωση που έχουμε κατά σημείο σύγκλιση αλλά δεν έχουμε την υπόθεση της μονοτονίας για την ακολουθία (f_n).

Θεώρημα 6.2.14 (Λήμμα του Fatou)**.** *Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,*

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n. \tag{6.2.31}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων (g_n), όπου $g_n = \inf\{f_k : k \geq n\}$. Κάθε g_n είναι μη αρνητική και μετρήσιμη, η (g_n) είναι αύξουσα, και

$$g_n \nearrow \liminf_{n\to\infty} f_n. \tag{6.2.33}$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty} \int g_n. \tag{6.2.34}$$

Παρατηρούμε ότι $g_n \leq f_k$ για κάθε $k \geq n$, οπότε η μονοτονία του ολοκληρώματος μας δίνει

$$\int g_n \leq b_n := \inf_{k\geq n} \int f_k. \tag{6.2.35}$$

Η ακολουθία (b_n) είναι φθίνουσα και συγκλίνει στο $\liminf_n \int f_n$. Άρα,

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty} \int g_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty} \int f_n. \tag{6.2.36}$$

□

Πόρισμα 6.2.15. *Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν $f_n \to f$ σ.π. και το $\lim_n \int f_n$ υπάρχει, τότε*

$$\int f \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n. \tag{6.2.37}$$

6.3 Ολοκλήρωμα Lebesgue: η γενική περίπτωση

Ορισμός 6.3.1. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, οι συναρτήσεις $f^+ = \max\{f, 0\}$ και $f^- = -\min\{f, 0\}$ είναι μετρήσιμες και μη αρνητικές. Επίσης, ικανοποιούν τις

$$f = f^+ - f^- \ \text{ και } \ |f| = f^+ + f^-. \tag{6.3.1}$$

Τα ολοκληρώματα $\int f^+$ και $\int f^-$ ορίζονται καλά και αν τουλάχιστον μία από τις f^+ και f^- είναι ολοκληρώσιμη, τότε το **ολοκλήρωμα της** f ορίζεται από την

$$\int f = \int f^+ - \int f^- \tag{6.3.2}$$

(μπορεί βέβαια να παίρνει την τιμή $+\infty$ ή $-\infty$). Αν οι f^+, f^- είναι και οι δύο ολοκληρώσιμες, τότε το ολοκλήρωμα της f είναι πραγματικός αριθμός και λέμε ότι **η** f **είναι ολοκληρώσιμη**.

(β) Αν η $f:\mathbb{R}\to[-\infty,\infty]$ είναι μετρήσιμη και E είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε λέμε ότι **η** f **είναι ολοκληρώσιμη στο** E αν

$$\int_E f^+ = \int f^+\chi_E < \infty \quad \text{και} \quad \int_E f^- = \int f^-\chi_E < \infty, \tag{6.3.3}$$

και ορίζουμε

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \int f\chi_E. \tag{6.3.4}$$

(γ) Αν η $f:E\to[-\infty,+\infty]$ είναι μετρήσιμη, τότε επεκτείνουμε την f στο $\mathbb{R}$ θέτοντας $f\equiv 0$ στο E^c, συνεπώς,

$$\int_E f = \int f\,\chi_E = \int f. \tag{6.3.5}$$

Παρατηρήσεις 6.3.2. (α) Αν $f\geq 0$ τότε $f=f^+$ και $f^-\equiv 0$, συνεπώς ο ορισμός που δώσαμε συμφωνεί με αυτόν της Παραγράφου 6.2.

(β) Από τον ορισμό είναι φανερό ότι η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\int |f| = \int f^+ + \int f^- < +\infty, \tag{6.3.6}$$

δηλαδή αν και μόνο αν η $|f|$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη (θυμηθείτε ότι αυτό δεν ισχύει για το ολοκλήρωμα Riemann). Σε αυτήν την περίπτωση,

$$\left|\int f\right| \leq \int |f|. \tag{6.3.7}$$

(γ) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$\mu(\{f^+=+\infty\}) = \mu(\{f^-=+\infty\}) = 0, \tag{6.3.8}$$

άρα

$$\mu(\{x: f(x)=+\infty\}\cup\{x: f(x)=-\infty\}) = 0. \tag{6.3.9}$$

Δηλαδή, η f είναι πεπερασμένη σχεδόν παντού.

(δ) Αν $\mu(E)=0$, τότε $\int_E f=0$, διότι $\int_E f^+=0$ και $\int_E f^-=0$.

(ε) Αν οι f και g είναι μετρήσιμες, η g είναι ολοκληρώσιμη, και $|f|\leq |g|$ σχεδόν παντού, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int |f|\leq \int |g|$.

(στ) Αν $f=f_1-f_2$, όπου f_1,f_2 μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int f=\int f_1-\int f_2. \tag{6.3.10}$$

Πράγματι, από την $f^+-f^-=f_1-f_2$ παίρνουμε $f^++f_2=f^-+f_1$, άρα

$$\int f^+ +\int f_2=\int f^- +\int f_1, \tag{6.3.11}$$

δηλαδή

$$\int f^+ -\int f^- =\int f_1-\int f_2, \tag{6.3.12}$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

(ζ) Αν $\mu(E)<\infty$ και η $f:E\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη και μετρήσιμη, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη. Όπως θα δούμε στην Παράγραφο 6.4, κάθε φραγμένη Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Θα δούμε επίσης ότι τα δύο ολοκληρώματα (Riemann και Lebesgue) συμπίπτουν.

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Θεώρημα 6.3.3 (γραμμικότητα)**.** *Έστω $f,g:E\to[-\infty,+\infty]$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε, η $f+g$ ορίζεται καλά σχεδόν παντού και*

$$\int_E (f+g)=\int_E f+\int_E g. \tag{6.3.13}$$

Επίσης, αν $t\in\mathbb{R}$ τότε η tf είναι ολοκληρώσιμη, και

$$\int (tf)=t\int f. \tag{6.3.14}$$

Απόδειξη. Αφού οι f,g είναι ολοκληρώσιμες, παίρνουν πεπερασμένη τιμή σχεδόν παντού, άρα η $f+g$ ορίζεται σχεδόν παντού. Επίσης,

$$(f+g)^+\leq f^++g^+ \ \text{ και } \ (f+g)^-\leq f^-+g^-, \tag{6.3.15}$$

άρα

$$\int (f+g)^+ < +\infty \ \text{ και } \ \int (f+g)^- < +\infty, \tag{6.3.16}$$

δηλαδή η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη.

Γράφουμε $f+g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$. Τότε, από την Παρατήρηση (στ) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int (f+g) &= \int (f^+ + g^+) - \int (f^- + g^-) = \int f^+ + \int g^+ - \int f^- - \int g^- \\ &= \int f + \int g.\end{aligned}$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι: αν $t>0$, τότε $(tf)^+ = tf^+$ και $(tf)^- = tf^-$, άρα η tf είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int (tf) = \int (tf)^+ - \int (tf)^- = t\int f^+ - t\int f^- = t\int f. \tag{6.3.17}$$

Αν $t<0$, τότε $(tf)^+ = -tf^-$ και $(tf)^- = -tf^+$, άρα η tf είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int (tf) = \int (tf)^+ - \int (tf)^- = -t\int f^- + t\int f^+ = t\int f. \tag{6.3.18}$$

Αν $t=0$, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. □

Πόρισμα 6.3.4. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο. Το σύνολο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : E \to [-\infty, +\infty]$ είναι γραμμικός χώρος.* □

Θεώρημα 6.3.5 (μονοτονία)**.** *Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες και $f \leq g$ σχεδόν παντού, τότε $\int f \leq \int g$. Ειδικότερα, αν $f = g$ σχεδόν παντού, τότε $\int f = \int g$.*

Απόδειξη. Από την $f \leq g$ έπεται ότι $f^+ \leq g^+$ και $f^- \geq g^-$ σχεδόν παντού. Άρα,

$$\int f^+ - \int f^- \leq \int g^+ - \int g^-, \tag{6.3.19}$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Θεώρημα 6.3.6 (προσθετικότητα)**.** *Έστω f ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν τα A, B είναι μετρήσιμα και $A \cap B = \emptyset$, τότε*

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f. \tag{6.3.20}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\int_{A\cup B} f = \int f\,\chi_{A\cup B} = \int f\,(\chi_A + \chi_B) = \int f\,\chi_A + \int f\,\chi_B = \int_A f + \int_B f. \tag{6.3.21}$$

□

Το βασικό θεώρημα σύγκλισης για ακολουθίες γενικών (όχι αναγκαστικά μη αρνητικών) ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Θεώρημα 6.3.7 (Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης)**.** *Έστω $f_n : E \to [-\infty, +\infty]$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού και ότι υπάρχει $g : E \to [0, +\infty]$ ολοκληρώσιμη, ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού. Τότε, οι f_n και η f είναι ολοκληρώσιμες, και*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f. \tag{6.3.22}$$

Απόδειξη. Αφού $|f_n| \leq g$ και η g είναι ολοκληρώσιμη, κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη, από την παρατήρηση (ε). Η f είναι μετρήσιμη ως όριο (σχεδόν παντού) μετρήσιμων συναρτήσεων, και

$$|f_n| \leq g \Longrightarrow |f| \leq g. \tag{6.3.23}$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Για να δείξουμε την σύγκλιση της ακολουθίας των ολοκληρωμάτων, θα εφαρμόσουμε το Λήμμα του Fatou για τις ακολουθίες μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων $(g + f_n)$ και $(g - f_n)$ (παρατηρήστε ότι $|f_n| \leq g \Longrightarrow -g \leq f_n \leq g$).

Αφού $g + f_n \to g + f$ και $g - f_n \to g - f$, παίρνουμε

$$\int_E g + \int_E f = \int_E (g + f) \leq \liminf_n \int_E (g + f_n) = \int_E g + \liminf_n \int_E f_n \tag{6.3.24}$$

και

$$\int_E g - \int_E f = \int_E (g - f) \leq \liminf_n \int_E (g - f_n) = \int_E g - \limsup_n \int_E f_n. \tag{6.3.25}$$

Άρα,

$$\limsup_n \int_E f_n \leq \int_E f \leq \liminf_n \int_E f_n, \tag{6.3.26}$$

το οποίο μας δίνει το συμπέρασμα. □

Πόρισμα 6.3.8 (θεώρημα φραγμένης σύγκλισης)**.** *Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $\mu(E) < +\infty$ και έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο E. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ και ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ στο E για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f. \tag{6.3.27}$$

Απόδειξη. Αφού $\mu(E) < +\infty$, η σταθερή συνάρτηση $g \equiv M$ είναι ολοκληρώσιμη στο E. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. □

Πόρισμα 6.3.9. *Έστω $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η συνάρτηση*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f := \int_{(-\infty,x]} f \tag{6.3.28}$$

είναι συνεχής.

Απόδειξη. Γράφουμε $F(x) = \int f \cdot \chi_{(-\infty,x]}$. Παρατηρούμε ότι αν $x_n \to x$ τότε

$$f(y)\chi_{(-\infty,x_n]}(y) \to f(y)\chi_{(-\infty,x]}(y) \tag{6.3.29}$$

για κάθε $y \neq x$ (εξηγήστε γιατί). Επίσης,

$$|f \cdot \chi_{(-\infty,x_n]}| \leq |f| \tag{6.3.30}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, $F(x_n) \to F(x)$. Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι συνεχής. □

Παραδείγματα 6.3.10. (α) Αν η $f : E \to [-\infty, +\infty]$ είναι ολοκληρώσιμη και (E_n) είναι μία αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $E_n \nearrow E$, τότε

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f. \tag{6.3.31}$$

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f\chi_{E_n} \to f$ και $|f\chi_{E_n}| \leq |f|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κατόπιν, εφαρμόζουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

(β) Έστω $f : [0,1] \to [-\infty, +\infty]$ ολοκληρώσιμη. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η $f_n(x) = x^n f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη, και

$$\int_0^1 x^n f(x) \to 0. \tag{6.3.32}$$

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $|x^n f(x)| \leq |f(x)|$ στο $[0,1]$ και ότι $f_n(x) = x^n f(x) \to 0$ σχεδόν παντού (για όλα τα $x \neq 1$ με $f(x) \neq \pm\infty$), και μετά να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

6.4 Σύγκριση με το ολοκλήρωμα Riemann

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Θα γράφουμε $(R)\int_a^b f$ για το ολοκλήρωμα Riemann και $(L)\int_a^b f$ για το ολοκλήρωμα Lebesgue της f (αν αυτά υπάρχουν). Όπως δείχνει το θεώρημα που ακολουθεί, το ολοκλήρωμα Lebesgue επεκτείνει το ολοκλήρωμα Riemann.

Θεώρημα 6.4.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε,*

(i) *Η f είναι μετρήσιμη.*

(ii) *Η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και*

$$(L)\int_a^b f = (R)\int_a^b f. \tag{6.4.1}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τα εξής:

(i) Το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

(ii) Αν $h \geq 0$ μετρήσιμη και $\int_E h = 0$, τότε $h = 0$ σχεδόν παντού στο E. Επομένως, αν $f \leq g$ και $\int_E f = \int_E g$, τότε $f = g$ σχεδόν παντού στο E.

(iii) Αν $s = \sum \lambda_i \chi_{[a_i,b_i]}$ είναι μια κλιμακωτή συνάρτηση, τότε

$$(L)\int_a^b f = (R)\int_a^b f. \tag{6.4.2}$$

Υποθέτουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Τότε, υπάρχει ακολουθία (P_n) διαμερίσεων του $[a,b]$ με τις εξής ιδιότητες: $P_n \subset P_{n+1}$ (η P_{n+1} είναι εκλέπτυνση της P_n), $\|P_n\| \to 0$ (τα πλάτη των διαμερίσεων P_n τείνουν στο 0), και

$$L(f,P_n) \to (R)\int_a^b f \ \ , \ \ U(f,P_n) \to (R)\int_a^b f. \tag{6.4.3}$$

Έστω ℓ_n η κλιμακωτή συνάρτηση με $\int_a^b \ell_n = L(f,P_n)$ (δηλαδή, αν $L(f,P_n) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i(x_{i+1}-x_i)$ τότε $\ell_n = \sum_{i=0}^{k-1} m_i\chi_{[x_i,x_{i+1})}$) και u_n η αντίστοιχη κλιμακωτή συνάρτηση με $\int_a^b u_n = U(f,P_n)$. Τότε,

$$\ell_n \leq f \leq u_n. \tag{6.4.4}$$

Από την $P_n \subset P_{n+1}$ έπεται ότι η (ℓ_n) είναι αύξουσα και η (u_n) φθίνουσα, οπότε ορίζονται οι συναρτήσεις $\ell = \lim_n \ell_n$ και $u = \lim_n u_n$, και $\ell \leq f \leq u$. Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης,

$$(L)\int_a^b u = \lim_n \int_a^b u_n = (R)\int_a^b f \tag{6.4.5}$$

και

$$(L)\int_a^b \ell = \lim_n \int_a^b \ell_n = (R)\int_a^b f. \tag{6.4.6}$$

Αφού $\ell \leq u$ και $\int_a^b \ell = \int_a^b u$, συμπεραίνουμε ότι $\ell = u$ σχεδόν παντού. Αφού $\ell \leq f \leq u$, προκύπτει ότι

$$\ell = f = u \ \ \sigma.\pi. \tag{6.4.7}$$

Άρα, η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση ως όριο (σχεδόν παντού) ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων. Αυτό αποδεικνύει το (i).

Αφού η f είναι μετρήσιμη και φραγμένη, η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. Τέλος,

$$(L)\int_a^b f = (L)\int_a^b u = (R)\int_a^b f, \tag{6.4.8}$$

δηλαδή έχουμε αποδείξει το (ii). □

Σημείωση: Όπως έχουμε ήδη δεί, η κλάση των φραγμένων Lebesgue ολοκληρώσιμων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι γνήσια μεγαλύτερη από την κλάση των Riemann ολοκληρώσιμων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Τα παραδείγματα που ακολουθούν δείχνουν ότι η περίπτωση του γενικευμένου ολοκληρώματος Riemann είναι διαφορετική:

Παράδειγμα 1. *Το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $(IR)\int_0^\infty (\sin x/x)dx$ *υπάρχει, αλλά το ολοκλήρωμα Lebesgue* $(L)\int_0^\infty (\sin x/x)dx$ *δεν υπάρχει.*

Απόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann σαν μια εναλλάσσουσα σειρά:

$$\begin{aligned}(IR)\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx &= \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x}dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{x+(n-1)\pi}dx.\end{aligned}$$

Από το κριτήριο του Dirichlet, για να δείξουμε ότι αυτή η σειρά συγκλίνει αρκεί να δείξουμε ότι τα ολοκληρώματα φθίνουν στο 0 όταν $n \to \infty$. Όμως, για σταθερό x, η ακολουθία $|\sin x|/(x+(n-1)\pi)$ είναι προφανώς φθίνουσα, άρα η αντίστοιχη ακολουθία των ολοκληρωμάτων είναι φθίνουσα και, για κάθε $n \geq 2$,

$$\int_0^\pi \frac{|\sin x|}{x+(n-1)\pi}dx \leq \frac{1}{n-1} \to 0. \tag{6.4.9}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $(IR)\int_0^\infty (\sin x/x)dx$ υπάρχει.

Αν το ολοκλήρωμα Lebesgue υπήρχε, θα έπρεπε να ισχύει ότι

$$(L)\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx < +\infty. \tag{6.4.10}$$

Όμως, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}(L)\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx &= \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \\ &\geq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi |\sin x|dx = \infty.\end{aligned}$$

Άρα, η $\sin x/x$ δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,+\infty)$. □

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=0$ αν $x<0$, και

$$f(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \ \text{αν} \ x\in[n,n+1),\ n=0,1,2,\dots. \tag{6.4.11}$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann της f

$$(IR)\int_0^\infty f(x)dx := \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx \tag{6.4.12}$$

υπάρχει: είναι ίσο με

$$(IR)\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} \tag{6.4.13}$$

(η τελευταία σειρά συγκλίνει). Όμως,

$$(L)\int_0^\infty |f| = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1} = +\infty, \tag{6.4.14}$$

άρα η f δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. □

Τέτοια προβλήματα δεν εμφανίζονται αν η συνάρτηση που μελετάμε είναι μη αρνητική.

Θεώρημα 6.4.2. *Αν $f\geq 0$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $(IR)\int_{-\infty}^\infty f$ υπάρχει, τότε η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, και*

$$(IR)\int f = (L)\int f. \tag{6.4.15}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n = f\,\chi_{[-n,n]}$ αυξάνει προς την f. Κάθε f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη (στο $[-n,n]$), επομένως μετρήσιμη. Άρα, η f είναι μετρήσιμη. Επίσης,

$$(L)\int f_n = (R)\int_{-n}^{n} f(x)dx \tag{6.4.16}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή κάθε f_n είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. Από την υπόθεση, υπάρχει το όριο

$$\lim_{n\to\infty} (R)\int_{-n}^{n} f(x)dx = (IR)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx. \tag{6.4.17}$$

Από την άλλη πλευρά, το θεώρημα μονότονης σύγκλισης δείχνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} (L)\int f_n = (L)\int f. \tag{6.4.18}$$

Άρα, η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

$$(IR)\int f = (L)\int f. \tag{6.4.19}$$

□

Σημείωση: Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν για γενικευμένα ολοκληρώματα κάθε είδους (για παράδειγμα, σε ανοικτό φραγμένο διάστημα).

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με έναν χαρακτηρισμό των Riemann ολοκληρώσιμων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$: είναι εκείνες οι φραγμένες συναρτήσεις που είναι συνεχείς σχεδόν παντού. Πριν δώσουμε την ακριβή διατύπωση και την απόδειξη, πρέπει να τονίσουμε ότι η συνθήκη «συνεχής σχεδόν παντού» είναι τελείως διαφορετική από την «σχεδόν παντού ίση με συνεχή συνάρτηση». Για παράδειγμα, η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_{\mathbb{Q}} : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι σχεδόν παντού ίση με την συνεχή (σταθερή) μηδενική συνάρτηση, αλλά δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του $[a,b]$. Από την άλλη πλευρά, η $\chi_{[0,1/2]} : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν παντού (παντού εκτός από το σημείο $1/2$) αλλά δεν είναι σχεδόν παντού ίση με καμμία συνεχή $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ (εξηγήστε γιατί). Αυτά τα παραδείγματα δείχνουν ότι οι δύο συνθήκες δεν συγκρίνονται.

Θεώρημα 6.4.3. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν*

$$\mu(\{x \in [a,b] : \text{ η } f \text{ είναι ασυνεχής στο } x\}) = 0. \tag{6.4.20}$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι συνεχής σχεδόν παντού. Επιλέγουμε ακολουθία (P_n) διαμερίσεων του $[a,b]$ με $P_n \subset P_{n+1}$, $\|P_n\| \to 0$, και θα δείξουμε ότι $U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις ℓ_n, u_n που αντιστοιχούν στην P_n, με $\ell_n \leq f \leq u_n$, $\int_a^b \ell_n = L(f, P_n)$ και $\int_a^b u_n = U(f, P_n)$. Δηλαδή, αν $P_n = \{a = x_0 < \cdots < x_k = b\}$ ορίζουμε

$$\ell_n = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \chi_{[x_i, x_{i+1})} \ \text{ και } \ u_n = \sum_{i=0}^{k-1} M_i \chi_{[x_i, x_{i+1})}. \tag{6.4.21}$$

Τότε, $\ell_n \nearrow \ell$ και $u_n \searrow u$, όπου $\ell \leq f \leq u$.

Οι ℓ_n, u_n είναι μετρήσιμες και ομοιόμορφα φραγμένες (από το supremum και το infimum της f στο $[a, b]$). Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\int_a^b \ell_n \to \int_a^b \ell \ \text{ και } \ \int_a^b u_n \to \int_a^b u. \tag{6.4.22}$$

Δηλαδή,

$$L(f, P_n) \to \int_a^b \ell \ \text{ και } \ U(f, P_n) \to \int_a^b u. \tag{6.4.23}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_a^b \ell = \int_a^b u. \tag{6.4.24}$$

Αυτό ισχύει για τον εξής λόγο: αν $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ και αν A είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f στο $[a, b]$, τότε για κάθε $x \in [a, b] \setminus (A \cup P)$ έχουμε $\ell(x) = u(x)$. Πράγματι: έστω $x \in [a, b] \setminus (A \cup P)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $y, z \in (x - \delta, x + \delta)$ τότε $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$. Επιλέγουμε n_0 για το οποίο $\|P_{n_0}\| < \delta$. Αν $[x_i, x_{i+1}]$ είναι το υποδιάστημα της P_{n_0} στο οποίο ανήκει το x, τότε $[x_i, x_{i+1}] \subseteq (x - \delta, x + \delta)$, άρα

$$M_i - m_i = \sup\{f(y) : y \in [x_i, x_{i+1}]\} - \inf\{f(z) : z \in [x_i, x_{i+1}]\} \leq \varepsilon, \tag{6.4.25}$$

δηλαδή $0 \leq u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) \leq \varepsilon$. Ακόμα,

$$0 \leq u(x) - \ell(x) \leq u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) \leq \varepsilon. \tag{6.4.26}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $u(x) = \ell(x)$. Άρα, $\ell = u$ σχεδόν παντού, το οποίο δείχνει ότι $\int_a^b \ell = \int_a^b u$.

Αντίστροφα: Υποθέτουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Επιλέγουμε ακολουθία διαμερίσεων $(P_n)_n$ με $P_n \subseteq P_{n+1}$ για κάθε n και

$$L(f, P_n) \to \int_a^b f \ , \ U(f, P_n) \to \int_a^b f. \tag{6.4.27}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τις κλιμακωτές συναρτήσεις ℓ_n και u_n που αντιστοιχούν στην P_n, με $\ell_n \le f \le u_n$ και

$$\int_a^b \ell_n = L(f,P_n)\ ,\ \int_a^b u_n = U(f,P_n). \tag{6.4.28}$$

Η ακολουθία (ℓ_n) είναι αύξουσα και η (u_n) είναι φθίνουσα. Έστω $\ell = \lim_n \ell_n$ και $u = \lim_n u_n$. Τότε $\ell \le f \le u$ και από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης

$$\int_a^b \ell = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \ell_n = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \int_a^b f \tag{6.4.29}$$

και

$$\int_a^b u = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \int_a^b f. \tag{6.4.30}$$

Άρα,

$$\int_a^b \ell = \int_a^b u. \tag{6.4.31}$$

Αφού $\ell \le u$, έπεται ότι $\ell = u$ σχεδόν παντού.

Έστω $C = \{x \in [a,b] : \ell(x) = u(x)\}$ και έστω $P = \bigcup_{n=1}^\infty P_n$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in C \setminus P$ η f είναι συνεχής στο x. Πράγματι: Έστω $x \in C \setminus P$ και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\ell(x) = u(x)$, άρα υπάρχει n_0 με $0 \le u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) < \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι αν (x_i, x_{i+1}) είναι το υποδιάστημα της P_{n_0} στο οποίο ανήκει το x, τότε

$$\sup\{f(y) : y \in [x_i, x_{i+1}]\} - \inf\{f(z) : z \in [x_i, x_{i+1}]\} < \varepsilon. \tag{6.4.32}$$

Έπεται ότι η f είναι συνεχής στο x (εξηγήστε γιατί).

Συμπεραίνουμε ότι αν A είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f, τότε $A \subseteq ([a,b] \setminus C) \cup P$, άρα $\mu(A) = 0$. □

6.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Έστω ϕ μη αρνητική απλή συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int \phi = \sup\left\{ \int \psi \mid 0 \le \psi \le \phi, \psi \text{ απλή ολοκληρώσιμη} \right\}.$$

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $F : [0,\infty) \to [0,\infty]$ με $F(t) = \mu(\{f > t\})$. Δείξτε ότι η F είναι φθίνουσα, συνεχής από δεξιά, και $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$.

3. Δείξτε ότι $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} = \infty$.

4. Βρείτε μια ακολουθία (f_n) μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων που ικανοποιεί τα εξής: $f_n \to 0$ αλλά $\lim_n \int f_n = 1$. Μπορείτε να επιλέξετε την (f_n) έτσι ώστε να συγκλίνει ομοιόμορφα στην μηδενική συνάρτηση;

5. Υποθέτουμε ότι f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $f_n \searrow f$, και υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\int f_k < \infty$. Δείξτε ότι

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

6. Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f > 0$ σ.π. Αν $\int_E f = 0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο E, δείξτε ότι $\mu(E) = 0$.

7. Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\geq 1/n\}} f.$$

8. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\leq n\}} f.$$

9. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι σωστό ότι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$;

Ομάδα Β΄

10. Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(\{f > 2^k\}) < \infty.$$

11. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\mu(E) < \infty$, ώστε

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Επιπλέον, δείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E.

12. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f$ είναι συνεχής.

13. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\mu(E) < \delta$ τότε $\int_E f < \varepsilon$.

14. Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f_n = \chi_{[n,n+1)}$ δείξτε ότι στο Λήμμα του Fatou η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια.

15. Έστω (f_n) μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Είναι σωστό ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int \left(\limsup_{n\to\infty} f_n \right) ;$$

Αν προσθέσουμε την υπόθεση ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη;

16. Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \leq f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$. Δείξτε ότι

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

17. Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f < \infty.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο E. Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει αν $\int f = \infty$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε τα $\int_E f$ και $\int_{E^c} f$.]

18. Έστω (f_n) ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a, b]$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_a^b |f_n - f| \to 0$.

19. Δείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = 1.$$

20. Υπολογίστε το $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 - (x/n))^n e^{x/2} dx$ (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

21. Έστω ότι οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $f_n \nearrow f$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\int f_n \to \int f$;

22. Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \to 0$, δείξτε ότι $\int f_n \to \int f$ και $\int |f_n| \to \int |f|$.

23. Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \to 0$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E, και $\int f_n^+ \to \int f^+$.

24. Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(\{|f| > 2^k\}) < \infty$.

Ομάδα Γ′

25. Υπολογίστε (με πλήρη αιτιολόγηση) το

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sqrt{\sin x}\right)^n \cos x dx.$$

26. Έστω (f_n), (g_n) και g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leq g_n$, $f_n \to f$, $g_n \to g$ (όλα αυτά σχεδόν παντού) και ότι $\int g_n \to \int g$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int f_n \to \int f$.

27. Έστω (f_n), f ολοκληρώσιμες και έστω ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι $\int |f_n - f| \to 0$ αν και μόνο αν $\int |f_n| \to \int |f|$.

28. Έστω (f_n) ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση g ώστε $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\int \left(\liminf_n f_n\right) \leq \liminf_n \int f_n \leq \limsup_n \int f_n \leq \int \left(\limsup_n f_n\right).$$

29. Έστω f μετρήσιμη και σχεδόν παντού πεπερασμένη στο $[0, 1]$.

(α) Αν $\int_E f = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subset [0, 1]$ με $\mu(E) = 1/2$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού στο $[0, 1]$.

(β) Αν $f > 0$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι

$$\inf \left\{ \int_E f : \mu(E) \geq \frac{1}{2} \right\} > 0.$$

30. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2} = 0.$$

31. Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\sum_{n=1}^{\infty}\int_E |f_n| < +\infty$. Δείξτε ότι:

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(β) Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n.$$

32. Σταθεροποιούμε $0 < a < b$ και ορίζουμε $f_n(x) = ae^{-nax} - ne^{-nbx}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} |f_n| = \infty$$

και

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \neq \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} f_n.$$

33. (α) Αν $f \geq 0$ σχεδόν παντού στο E και αν $f_n = \min\{f, n\}$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$.

(β) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο E και $f_n = \max\{\min\{n, f\}, -n\}$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$.

34. Έστω $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$ και $E_1, \ldots, E_n$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Δείξτε ότι υπάρχει $i \leq n$ ώστε $\mu(E_i) \geq k/n$.

Κεφάλαιο 7

Χώροι L_p

7.1 Χώροι L_p

Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $1 \leq p < \infty$. Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{L}_p(A)$ όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{R}$ για τις οποίες

$$\int_A |f|^p < \infty. \tag{7.1.1}$$

Παρατηρήστε ότι η κλάση $\mathcal{L}_p(A)$ είναι γραμμικός χώρος. Για να δείξουμε ότι $f+g \in \mathcal{L}_p(A)$ αν $f, g \in \mathcal{L}_p(A)$, γράφουμε

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)|^p &\leq (|f(x)|+|g(x)|)^p \leq [2\max\{|f(x)|, |g(x)|\}]^p \\ &= 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p), \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\int_A |f+g|^p \leq 2^p \left(\int_A |f|^p + \int_A |g|^p \right) < \infty. \tag{7.1.2}$$

Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας στην $\mathcal{L}_p(A)$ θέτοντας $f \sim g$ αν $f = g$ σχεδόν παντού στο A. Το σύνολο $L_p(A)$ των κλάσεων ισοδυναμίας $[f]$, $f \in \mathcal{L}_p(A)$ γίνεται γραμμικός χώρος με πράξεις τις

$$[f] + [g] = [f+g] \text{ και } a[f] = [af]. \tag{7.1.3}$$

Θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο f για την κλάση $[f]$, εννοώντας ότι η $[f] \in L_p(A)$ αντιπροσωπεύεται από οποιαδήποτε συνάρτηση στοιχείο της. Αν λοιπόν $f \in L_p(A)$, ορίζουμε

$$\|f\|_p = \left(\int_A |f|^p \right)^{1/p}.$$

Παρατηρήστε ότι ο χώρος $L_1(A)$ είναι ο χώρος των Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα στον $L_p(A)$.

Θεώρημα 7.1.1. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $1 \le p < +\infty$. Ο χώρος $(L_p(A), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος με νόρμα.*

Απόδειξη. Η ταύτιση συναρτήσεων που συμπίπτουν σχεδόν παντού στο A γίνεται για να ικανοποιείται η $\|f\|_p = 0 \Longrightarrow f = 0$. Πράγματι, αν $\int_A |f|^p = 0$ τότε $f = 0$ σχεδόν παντού, δηλαδή $[f] = [0]$. Η ιδιότητα

$$\|tf\|_p = |t|\,\|f\|_p, \qquad f \in L_p(A) \tag{7.1.4}$$

επαληθεύεται άμεσα. Η τριγωνική ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα του Minkowski. Δίνουμε την απόδειξη και, παράλληλα, υπενθυμίζουμε κάποιες κλασικές ανισότητες.

Λήμμα 7.1.2 (ανισότητα του Young)**.** *Αν $x, y \ge 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε*

$$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{7.1.5}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = y^q$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως κοίλη. Αν λοιπόν $a_1, \ldots, a_m > 0$ και $t_j \in (0,1)$ με $t_1 + \cdots + t_m = 1$, τότε

$$\sum_{j=1}^{m} t_j \ln a_j \le \ln(t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m). \tag{7.1.6}$$

Έπεται ότι

$$a_1^{t_1} a_2^{t_2} \cdots a_m^{t_m} \le t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m \tag{7.1.7}$$

με ισότητα μόνο αν $a_1 = \cdots = a_m$. Η ανισότητα αυτή γενικεύει την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Αν $t_1 = \cdots = t_m = 1/m$, παίρνουμε

$$\sqrt[m]{a_1 \cdots a_m} \le \frac{a_1 + \cdots + a_m}{m}. \tag{7.1.8}$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα (7.1.7) με $a = x^p$, $b = y^q$. Αφού $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$xy = a^{1/p} b^{1/q} \le \frac{a}{p} + \frac{b}{q} = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{7.1.9}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = a = b = y^q$. $\square$

Ορισμός 7.1.3 (συζυγείς εκθέτες)**.** Αν $p, q > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, λέμε ότι οι p και q είναι *συζυγείς εκθέτες*. Συμφωνούμε ότι ο συζυγής εκθέτης του $p = 1$ είναι ο $q = \infty$.

Πρόταση 7.1.4 (ανισότητα Hölder)**.** *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $f \in L_p(A)$ και $g \in L_q(A)$, όπου p, q συζυγείς εκθέτες. Τότε, $fg \in L_1(A)$ και*

$$\int_A |fg| \leq \left(\int_A |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_A |g|^q\right)^{1/q}, \tag{7.1.10}$$

δηλαδή

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{7.1.11}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι

$$\|f\|_p^p = \int_A |f|^p = 1 \ \text{ και } \ \|g\|_q^q = \int_A |g|^q = 1. \tag{7.1.12}$$

Από την ανισότητα του Young, για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q. \tag{7.1.13}$$

Ολοκληρώνοντας στο A παίρνουμε

$$\int_A |fg| \leq \frac{1}{p}\int_A |f|^p + \frac{1}{q}\int_A |g|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q. \tag{7.1.14}$$

Στην γενική περίπτωση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p \neq 0$ και $\|g\|_q \neq 0$ (αλλιώς $f \equiv 0$ ή $g \equiv 0$ και το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισότητας μηδενίζεται, οπότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_p} \ \text{ και } \ g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}. \tag{7.1.15}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_A |f_1|^p = \frac{1}{\|f\|_p^p}\int_A |f|^p = 1 \ \text{ και } \ \int_A |g_1|^q \, dt = \frac{1}{\|g\|_q^q}\int_A |g|^q = 1. \tag{7.1.16}$$

Από την ειδική περίπτωση της ανισότητας που δείξαμε παραπάνω, έχουμε

$$\int_A |f_1 g_1| \leq 1, \ \text{ δηλαδή, } \ \int_A |fg| \, dt \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{7.1.17}$$

Πρόταση 7.1.5 (ανισότητα Minkowski)**.** *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leq p < \infty$. Αν $f, g \in L_p(A)$, τότε*

$$\left(\int_A |f+g|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_A |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_A |g|^p\right)^{1/p}, \tag{7.1.18}$$

δηλαδή

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{7.1.19}$$

Απόδειξη. Η ανισότητα είναι απλή στην περίπτωση $p = 1$. Στη συνέχεια θεωρούμε την περίπτωση $1 < p < \infty$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f+g\|_p > 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_A |f+g|^p = \int_A |f+g|^{p-1}|f+g| \\
&\leq \int_A |f+g|^{p-1}|f| + \int_A |f+g|^{p-1}|g| \\
&\leq \left(\int_A |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \|f\|_p + \left(\int_A |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \|g\|_p,
\end{aligned}$$

όπου, στο τελευταίο βήμα, εφαρμόσαμε την ανισότητα Hölder για τα ζευγάρια $f+g, f$ και $f+g, g$. Παρατηρούμε ότι $(p-1)q = p$ (οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες). Συνεπώς,

$$\left(\int_A |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} = \left(\int_A |f+g|^p\right)^{1/q} = \|f+g\|_p^{p/q}. \tag{7.1.20}$$

Έπεται ότι

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f+g\|_p^{p/q}\big(\|f\|_p + \|g\|_p\big). \tag{7.1.21}$$

Χρησιμοποιώντας την $p - \frac{p}{q} = 1$ συμπεραίνουμε ότι

$$\|f+g\|_p = \frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^{p/q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{7.1.22}$$

7.2 Πληρότητα του L_p

Σε αυτήν την Παράγραφο δείχνουμε ότι οι χώροι $L_p(A)$, $1 \leq p < \infty$ είναι χώροι Banach: ένας χώρος $(X, \|\cdot\|)$ με νόρμα λέγεται **χώρος Banach** αν κάθε βασική ακολουθία (x_n) του X είναι συγκλίνουσα, δηλαδή υπάρχει $x \in X$ ώστε $\|x_n - x\| \to 0$.

Θεώρημα 7.2.1 (θεώρημα Riesz-Fisher)**.** *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leq p < \infty$. Ο $L_p(A)$ είναι χώρος Banach.*

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε ένα γενικό κριτήριο. Δίνουμε πρώτα κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 7.2.2. Έστω (x_n) ακολουθία σε έναν χώρο με νόρμα X. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει αν υπάρχει $x \in X$ ώστε

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k \to x.$$

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως αν $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Λήμμα 7.2.3. *Έστω X χώρος με νόρμα. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο X είναι πλήρης.*

(β) *Αν (x_n) είναι ακολουθία στον X με $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < +\infty$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο X είναι πλήρης. Έστω (x_k) ακολουθία στον X, με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\| < \infty$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n > m \geq n_0$,

$$\|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon. \tag{7.2.1}$$

Τότε, αν $n > m \geq n_0$,

$$\|s_n - s_m\| = \|x_{m+1} + \cdots + x_n\| \leq \|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon. \tag{7.2.2}$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η (s_n) είναι βασική. Ο X είναι πλήρης, άρα η s_n συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$.

Αντίστροφα, έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X. Για $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$, μπορούμε να βρούμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ ώστε, για κάθε $s > m \geq k_n$,

$$\|x_s - x_m\| < \frac{1}{2^n}. \tag{7.2.3}$$

Ειδικότερα,

$$k_{n+1} > k_n \geq k_n \Longrightarrow \|x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\| < \frac{1}{2^n} \tag{7.2.4}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\| < 1 < +\infty. \tag{7.2.5}$$

Η $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{k_{n+1}} - x_{k_n})$ συγκλίνει απολύτως, οπότε (από την υπόθεσή μας) συγκλίνει: υπάρχει $x \in X$ ώστε

$$\sum_{n=1}^{m}(x_{k_{n+1}} - x_{k_n}) \to x, \tag{7.2.6}$$

δηλαδή, $x_{k_{n+1}} - x_{k_1} \to x$. Άρα, $x_{k_n} \to x + x_{k_1}$. Δείξαμε ότι η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Είναι όμως και βασική ακολουθία, άρα συγκλίνει στον X. Έπεται ότι ο X είναι πλήρης. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.1. Έστω (f_k) ακολουθία στον $L_p(A)$ με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_p = M < +\infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|$, $x \in A$. Τότε,

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n}\|f_k\|_p \leq M, \tag{7.2.7}$$

δηλαδή $g_n \in L_p(A)$ και $\int_A g_n^p d \leq M^p$. Η (g_n) είναι αύξουσα, άρα ορίζεται η $g(x) = \lim g_n(x) \in [0,\infty]$. Από το Λήμμα του Fatou,

$$\int_A g^p d \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A g_n^p d \leq M^p. \tag{7.2.8}$$

Συνεπώς, η g^p είναι ολοκληρώσιμη. Έπεται ότι $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty$ σχεδόν παντού.

Ορίζουμε $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Από την $g(x) < +\infty$ έχουμε ότι η $s(x) = \lim s_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει σχεδόν παντού. Η s είναι μετρήσιμη και από την $|s_n(x)| \leq g_n(x) \leq g(x)$ συμπεραίνουμε ότι $|s(x)| \leq g(x)$ σχεδόν παντού. Έπεται ότι

$$\int_A |s|^p \leq \int_A g^p d \leq M^p < \infty, \tag{7.2.9}$$

δηλαδή $s \in L_p(A)$. Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$|s_n(x) - s(x)|^p \leq 2^p \max\{|s_n(x)|^p, |s(x)|^p\} \leq 2^p |g(x)|^p \tag{7.2.10}$$

σχεδόν παντού. Αφού $|s_n(x) - s(x)|^p \to 0$ σχεδόν παντού, χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\int_A |s_n - s|^p \to 0. \tag{7.2.11}$$

Αυτό δείχνει ότι $\|s_n - s\|_p \to 0$. Από το Λήμμα 7.2.3 έπεται ότι ο $L_p(A)$ είναι χώρος Banach. □

7.3 Ασκήσεις

1. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leq p < \infty$. Αν $f \in L_p(A)$ δείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

$$\mu(\{|f| \geq \alpha\}) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p.$$

2. Έστω A μετρήσιμο σύνολο με $0 < \mu(A) < \infty$ και έστω $1 \leq p < \infty$. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι $f \in L_p(A)$ αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \mu(\{n - 1 \leq |f| < n\}) < \infty.$$

3. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leq p < \infty$. Αν $f_n, f \in L_p(A)$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A, δείξτε ότι

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p.$$

4. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 < p < \infty$ και q ο συζυγής εκθέτης του p. Αν $f_n \to f$ στον $L_p(A)$ και $g_n \to g$ στον $L_q(A)$, δείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ στον $L_1(A)$.

5. Έστω A μετρήσιμο σύνολο με $0 < \mu(A) < \infty$ και έστω $1 \leq p < q < \infty$.

(α) Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p [\mu(A)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

(β) Δείξτε ότι $L_q(A) \subseteq L_p(A)$.

(γ) Δείξτε ότι $L_q(A) \neq L_p(A)$.

6. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leq p < q < r < \infty$. Δείξτε ότι κάθε $f \in L_q(A)$ γράφεται στην μορφή $f = g + h$ για κάποιες $g \in L_p(A)$ και $h \in L_r(A)$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε το $E = \{|f| > 1\}$ και τις $g = f\chi_E$, $h = f - g$.

7. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leq p < r < \infty$. Δείξτε ότι: αν $f \in L_p(A) \cap L_r(A)$ τότε $f \in L_q(A)$ για κάθε $p \leq q \leq r$.

8. Έστω A μετρήσιμο σύνολο με $\mu(A) = 1$ και έστω $f \in L_p(A)$ για κάποιον $p \geq 1$. Δείξτε ότι

$$\log \|f\|_p \geq \int_A \log |f|.$$

9. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $c_1, \ldots, c_m > 0$ με $c_1 + \cdots + c_m = 1$. Δείξτε ότι: αν $f_1, \ldots, f_m : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int_A \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i} \right) \leq \prod_{i=1}^m \left(\int_A |f_i| \right)^{c_i}.$$

10. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $p, q, r \geq 1$ με $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Δείξτε ότι: αν $f \in L_p(A)$ και $g \in L_q(A)$ τότε $fg \in L_r(A)$ και

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

11. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $p, q \geq 1$. Αν $\lambda \in (0,1)$ και $r = \lambda p + (1-\lambda)q$ δείξτε ότι για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\|f\|_r^r \leq \|f\|_p^{\lambda p} + \|f\|_q^{(1-\lambda)q}.$$

12. Έστω A μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geq 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L_p(A)$ με $\|f_n\|_p \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A, δείξτε ότι $f \in L_p(A)$ και $\|f\|_p \leq 1$.

13. Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων στον $L_1(\mathbb{R})$ με $\int f_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{x:|x|>\delta\}} f_n = 0.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $p > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \infty.$$

14. Έστω A μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geq 1$ και έστω $f \in L_p(A)$. Δείξτε ότι

$$\int |f|^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(\{x \in A : |f(x)| > t\})\, dt.$$

15. Έστω A μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geq 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L_p(A)$ με $\|f_n - f\|_p \to 0$. Έστω (g_n) ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο A με $g_n \to g$ σχεδόν παντού στο A. Δείξτε ότι $\|f_n g_n - fg\|_p \to 0$.

16. Έστω $f \in L_1(\mathbb{R})$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $f_t(x) = f(x+t)$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

(α) Για κάθε t έχουμε $f_t \in L_1(\mathbb{R})$ και $\int f_t = \int f$.

(β) $\lim_{t\to 0} \int |f - f_t| = 0$.

Μέρος III

Μετασχηματισμός Fourier

Κεφάλαιο 8

Μετασχηματισμός Fourier

8.1 Μετασχηματισμός Fourier στο $\mathbb{R}$

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[-N, N]$, όπου $N > 0$. Δηλαδή, το

$$I_N = I_N(f) := \int_{-N}^{N} f(x)\,dx$$

ορίζεται καλά. Αν το $\lim_{N\to\infty} I_N$ υπάρχει, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$, και ορίζουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x)\,dx. \tag{8.1.1}$$

Είναι πολύ εύκολο να δώσουμε παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων με μη αρνητικές πραγματικές τιμές, για τις οποίες $\lim_{N\to\infty} I_N(f) = +\infty$. Θεωρήστε, για παράδειγμα, την $f(x) = 1$ ή την $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$, η οποία μάλιστα έχει την ιδιότητα $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Για να εξασφαλίσουμε την σύγκλιση της $I_N(f)$ φαίνεται λογικό να θέσουμε τον περιορισμό ότι η f «φθίνει αρκετά γρήγορα» προς το 0 όταν $x \to \pm\infty$.

Ορισμός 8.1.1 (η κλάση $\mathcal{M}(\mathbb{R})$)**.** Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **φθίνει αρκετά γρήγορα** αν είναι συνεχής και υπάρχει σταθερά $A > 0$ ώστε

$$|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2} \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \tag{8.1.2}$$

Συμβολίζουμε την κλάση αυτών των συναρτήσεων με $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Εύκολα ελέγχουμε ότι η κλάση $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ είναι γραμμικός υπόχωρος του χώρου των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Πράγματι, αν $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ και $a, b \in \mathbb{C}$, τότε $af + bg \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ (εξηγήστε γιατί).

Λήμμα 8.1.2. *Αν $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ τότε το*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x)\,dx \tag{8.1.3}$$

υπάρχει.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα $I_N = \int_{-N}^{N} f(x)\,dx$ (το οποίο υπάρχει για κάθε $N > 0$, διότι η f είναι συνεχής) ικανοποιεί τη συνθήκη Cauchy: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N_0 > 0$ ώστε, αν $M > N \geq N_0$ τότε $|I_M - I_N| < \varepsilon$.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2}$ για κάποια σταθερά $A > 0$. γράφουμε

$$\begin{aligned} |I_M - I_N| &\leq \int_{N<|x|\leq M} |f(x)|\,dx \leq A \int_{N<|x|\leq M} \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &\leq A \int_{N<|x|\leq M} \frac{1}{x^2}\,dx = 2A\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{M}\right) \\ &\leq \frac{2A}{N} < \varepsilon, \end{aligned}$$

αν $M > N \geq N_0$, όπου $N_0 > 2A/\varepsilon$. □

Παρατήρηση 8.1.3. Στην πορεία της απόδειξης είδαμε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \int_{|x|\geq N} |f(x)|\,dx = 0. \tag{8.1.4}$$

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα αυτήν την παρατήρηση. Επίσης, κοιτάζοντας την απόδειξη, βλέπουμε ότι θα αρκούσε η υπόθεση ότι, για κάποιο $\varepsilon > 0$ και κάποια σταθερά $A > 0$ ισχύει η

$$|f(x)| \leq \frac{A}{1+|x|^{1+\varepsilon}} \tag{8.1.5}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε $\varepsilon = 1$ για λόγους απλότητας.

Η επόμενη Πρόταση περιγράφει κάποιες βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος για συναρτήσεις της κλάσης $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Πρόταση 8.1.4. *Για το ολοκλήρωμα στην $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ ισχύουν τα εξής:*

(i) *Γραμμικότητα: Αν $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ και $a, b \in \mathbb{C}$, τότε*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (af(x) + bg(x))\,dx = a\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx. \tag{8.1.6}$$

(ii) *Αναλλοίωτο ως προς μεταφορές: Έστω $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{8.1.7}$$

(iii) *Συμπεριφορά ως προς διαστολές: Έστω $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Για κάθε $\delta > 0$,*

$$\delta \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{8.1.8}$$

(iv) *Συνέχεια: Αν $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, τότε*

$$\lim_{t\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|\,dx = 0. \tag{8.1.9}$$

Απόδειξη. (i) Για κάθε $N > 0$ έχουμε

$$\int_{-N}^{N} (af(x) + bg(x))\,dx = a\int_{-N}^{N} f(x)\,dx + b\int_{-N}^{N} g(x)\,dx. \tag{8.1.10}$$

Περνώντας στο όριο παίρνουμε την (8.1.6).
(ii) Υπάρχει $A > 0$ ώστε $|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$J_N = \int_{-N}^{N} f(x+t)\,dx \qquad \text{και} \qquad I_N = \int_{-N}^{N} f(x)\,dx. \tag{8.1.11}$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $t > 0$. Τότε, αν $-N + t < N$ (δηλαδή, $N > t/2$) έχουμε

$$\begin{aligned}
|J_N - I_N| &= \left| \int_{-N}^{N} f(x+t)\,dx - \int_{-N}^{N} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{-N+t}^{N+t} f(x)\,dx - \int_{-N}^{N} f(x)\,dx \right| \\
&= \left| \int_{N}^{N+t} f(x)\,dx - \int_{-N}^{-N+t} f(x)\,dx \right| \leq \int_{N}^{N+t} |f(x)|\,dx + \int_{-N}^{-N+t} |f(x)|\,dx \\
&\leq \int_{|x|\geq N} |f(x)|\,dx + \int_{|x|\geq N-t} |f(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

Από την (8.1.4) συμπεραίνουμε ότι

$$J_N - I_N \to 0 \quad \text{όταν } N \to \infty. \tag{8.1.12}$$

Αφού το $\lim\limits_{N\to\infty} I_N$ υπάρχει, υπάρχει και το

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,dx = \lim_{N\to\infty} J_N = \lim_{N\to\infty} I_N = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{8.1.13}$$

(iii) Η απόδειξη είναι παρόμοια. Ορίζουμε

$$K_N = \int_{-N}^{N} \delta f(\delta x)\, dx \qquad \text{και} \qquad I_N = \int_{-N}^{N} f(x)\, dx. \tag{8.1.14}$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\delta > 1$. Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned} |K_N - I_N| &= \left| \int_{-N}^{N} \delta f(\delta x)\, dx - \int_{-N}^{N} f(x)\, dx \right| = \left| \int_{-\delta N}^{\delta N} f(x)\, dx - \int_{-N}^{N} f(x)\, dx \right| \\ &= \left| \int_{N}^{\delta N} f(x)\, dx - \int_{-\delta N}^{-N} f(x)\, dx \right| \leq \int_{N}^{\delta N} |f(x)|\, dx + \int_{-\delta N}^{-N} |f(x)|\, dx \\ &\leq 2 \int_{|x|\geq N} |f(x)|\, dx. \end{aligned}$$

Από την (8.1.4) συμπεραίνουμε ότι

$$K_N - I_N \to 0 \quad \text{όταν } N \to \infty. \tag{8.1.15}$$

Αφού το $\lim\limits_{N\to\infty} I_N$ υπάρχει, υπάρχει και το

$$\delta \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x)\, dx = \lim_{N\to\infty} K_N = \lim_{N\to\infty} I_N = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx. \tag{8.1.16}$$

(iv) Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $N > 0$ ώστε

$$\int_{|x|\geq N-1} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{8.1.17}$$

Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-N-1, N+1]$. Συνεπώς, υπάρχει $0 < t_0 < 1$ με την εξής ιδιότητα: αν $x \in [-N, N]$ και $|t| < t_0$, τότε

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4N}. \tag{8.1.18}$$

Τότε, αν $|t| < t_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|\, dx &\leq \int_{-N}^{N} |f(x+t) - f(x)|\, dx \\ &\quad + \int_{|x|\geq N} |f(x+t)|\, dx + \int_{|x|\geq N} |f(x)|\, dx \\ &\leq \int_{-N}^{N} \frac{\varepsilon}{4N}\, dx + \int_{|x|\geq N-1} |f(x)|\, dx + \int_{|x|\geq N} |f(x)|\, dx \\ &< 2N\,\frac{\varepsilon}{4N} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Για το $\int_{|x|\geq N} |f(x+t)|\,dx$ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι: αν $|x| \geq N$ και $|t| \leq t_0 < 1$, τότε $|x+t| \geq N-1$. $\square$

Η αρχική ιδέα είναι να ορίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier μέσω της

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx \tag{8.1.19}$$

για κάθε $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (8.1.19) υπάρχει, διότι η συνάρτηση $x \mapsto f(x)e^{-2\pi i x\xi}$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Άρα, ο $\widehat{f}(\xi)$ ορίζεται καλά για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ η οποία ορίζεται έτσι, είναι φραγμένη και μπορεί κανείς να δείξει ότι η $\widehat{f}$ είναι συνεχής και $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$. Όμως, δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι $\widehat{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Δεδομένου ότι βασικός μας στόχος είναι να αποδείξουμε τον τύπο αντιστροφής

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi, \tag{8.1.20}$$

περιορίζουμε τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier σε κατάλληλη υποκλάση $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ της $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ ώστε. αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ να μπορούμε να αποδείξουμε την (8.1.20).

Ορισμός 8.1.5 (ο χώρος του Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$)**.** Η κλάση $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ λέγεται **χώρος του Schwartz** και αποτελείται από όλες τις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ οι οποίες είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες και **φθίνουν πολύ γρήγορα** με την εξής έννοια: για κάθε $k, \ell \geq 0$ υπάρχει $A_{k,\ell} > 0$ ώστε

$$|x^k|\,|f^{(\ell)}(x)| \leq A_{k,\ell} \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \tag{8.1.21}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο χώρος του Schwartz είναι γραμμικός χώρος. Θα χρησιμοποιούμε συχνά το γεγονός ότι η κλάση $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι κλειστή ως προς την παραγώγιση και τον πολλαπλασιασμό με πολυώνυμα:

(i) Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(ii) Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε $xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Από την δεύτερη ιδιότητα έπεται άμεσα ότι: αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ και $p(x)$ είναι οποιοδήποτε πολυώνυμο, τότε $p(x)f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Η απόδειξη αυτών των ισχυρισμών αφήνεται ως άσκηση.

Παράδειγμα 8.1.6 (Gaussian συναρτήσεις)**.** Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα συνάρτησης $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι η Gaussian συνάρτηση

$$f(x) = e^{-x^2}. \tag{8.1.22}$$

Η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και όλες οι παράγωγοί της είναι της μορφής $p(x)e^{-x^2}$, όπου $p(x)$ πολυώνυμο. Μπορούμε τότε να ελέγξουμε εύκολα ότι η f ικανοποιεί την (8.1.21). Το ίδιο ισχύει για κάθε συνάρτηση της μορφής e^{-ax^2}, όπου $a > 0$.

Οι Gaussian συναρτήσεις θα παίξουν βασικό ρόλο στη μελέτη του μετασχηματισμού Fourier.

Ορισμός 8.1.7 (μετασχηματισμός Fourier)**.** Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ο **μετασχηματισμός Fourier** της f είναι η συνάρτηση

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx. \tag{8.1.23}$$

Στην επόμενη Πρόταση παραθέτουμε τις βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.

Πρόταση 8.1.8. *Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) *Αν $h \in \mathbb{R}$ και $g(x) = f(x+h)$, τότε $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i h\xi}$.*

(ii) *Αν $h \in \mathbb{R}$ και $g(x) = f(x)e^{-2\pi i x h}$, τότε $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi+h)$.*

(iii) *Αν $\delta > 0$ και $g(x) = f(\delta x)$, τότε $\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\delta}\widehat{f}(\xi/\delta)$.*

(iv) *Αν $g(x) = f'(x)$, τότε $\widehat{g}(\xi) = 2\pi i\xi\widehat{f}(\xi)$.*

(v) *Αν $g(x) = -2\pi i x f(x)$, τότε $\widehat{g}(\xi) = \frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi)$.*

Απόδειξη. (i) Με την αλλαγή μεταβλητής $y = x+h$, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+h)e^{-2\pi i x\xi}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi i(y-h)\xi}dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi i y\xi}e^{2\pi i h\xi}dy = e^{2\pi i h\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi i y\xi}dy \\
&= \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i h\xi}.
\end{aligned}$$

(ii) Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x h}e^{-2\pi i x\xi}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x(\xi+h)}dx \\
&= \widehat{f}(\xi+h).
\end{aligned}$$

(iii) Με την αλλαγή μεταβλητής $y = \delta x$, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x)e^{-2\pi i x\xi}dx = \frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi i(y/\delta)\xi}dy \\
&= \frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi i y(\xi/\delta)}dy = \frac{1}{\delta}\widehat{f}(\xi/\delta).
\end{aligned}$$

(iv) Κάνουμε ολοκλήρωση κατά μέρη: για κάθε $N > 0$ έχουμε

$$\int_{-N}^{N} f'(x)e^{-2\pi i x\xi}dx = \left[f(x)e^{-2\pi i x\xi}\right]_{-N}^{N} + 2\pi i\xi \int_{-N}^{N} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx. \tag{8.1.24}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\left[f(x)e^{-2\pi i x\xi}\right]_{-N}^{N} = f(N)e^{-2\pi i N\xi} - f(-N)e^{2\pi i N\xi} \to 0 \tag{8.1.25}$$

όταν $N \to \infty$, διότι $f(\pm N) \to 0$. Αφήνοντας το $N \to \infty$ παίρνουμε

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-2\pi i x\xi}dx = 2\pi i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx = 2\pi i\xi \widehat{f}(\xi). \tag{8.1.26}$$

(v) Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{\widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi)}{h} + \widehat{2\pi i x f}(\xi) = 0. \tag{8.1.27}$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi)}{h} + \widehat{2\pi i x f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h}dx \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi i x f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\left[\frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x\right] dx.
\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f(x)$ και $xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, μπορούμε να βρούμε $N > 0$ ώστε

$$\int_{|x|\geq N} |f(x)|\, dx < \varepsilon \qquad \text{και} \qquad \int_{|x|\geq N} |x|\,|f(x)|\, dx < \varepsilon. \tag{8.1.28}$$

Επίσης, μπορούμε να βρούμε $h_0 > 0$ ώστε, για κάθε $0 < |h| < h_0$,

$$\left|\frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x\right| < \frac{\varepsilon}{2N(\|f\|_\infty + 1)}. \tag{8.1.29}$$

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned}
\left|\frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x\right| &= \left|\frac{\cos(2\pi x h) - 1}{h} - i\frac{\sin(2\pi x h)}{h} + 2\pi i x\right| \\
&= \left|\frac{-2\sin^2(\pi x h)}{h} - 2\pi i\frac{\sin(2\pi x h)}{2\pi h} + 2\pi i x\right| \\
&\leq 2\pi^2 x^2 |h| \left|\frac{\sin^2(\pi x h)}{(\pi x h)^2}\right| + 2\pi|x| \left|\frac{\sin(2\pi x h)}{2\pi x h} - 1\right| \\
&\leq 2\pi^2 N^2 |h| + (2\pi)^4 N^4 |h|^2/6,
\end{aligned}$$

όπου, στο τέλος, χρησιμοποιήσαμε την $|\sin t - t| \leq |t|^3/6$. Έπεται ότι

$$\frac{e^{-2\pi i x h}-1}{h} \xrightarrow{\text{ομ}} -2\pi i x \tag{8.1.30}$$

στο $[-N,N]$, όταν $h\to 0$. Συνεπώς, αν $0<|h|<h_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{\widehat{f}(\xi+h)-\widehat{f}(\xi)}{h}+\widehat{2\pi i x f}(\xi)\right| &< 2\varepsilon+\int_{-N}^{N}|f(x)|\left|\frac{e^{-2\pi i x h}-1}{h}+2\pi i x\right|dx\\ &< 2\varepsilon+2N\|f\|_\infty\frac{\varepsilon}{2N(\|f\|_\infty+1)}<3\varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $-\widehat{2\pi i x f}(\xi)=\frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi)$. □

Θεώρημα 8.1.9. *Αν $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε $\widehat{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Απόδειξη. Παρατηρήστε πρώτα ότι, αν $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx, \tag{8.1.31}$$

δηλαδή η $\widehat{f}$ είναι φραγμένη. Για να δείξουμε ότι $\|\xi\widehat{f}(\xi)\|_\infty<+\infty$, παρατηρούμε ότι η $\xi\widehat{f}(\xi)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $\frac{1}{2\pi i}f'$, η οποία είναι επίσης στην $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Για να δείξουμε ότι η $\frac{d\widehat{f}}{d\xi}$ είναι φραγμένη, παρατηρούμε ότι η $\frac{d\widehat{f}}{d\xi}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $-2\pi i x f(x)$, η οποία είναι επίσης στην $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Γενικά, για κάθε $k,\ell\geq 0$, η συνάρτηση

$$\xi^k\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{\ell}\widehat{f}(\xi) \tag{8.1.32}$$

είναι ο μετασχηματισμός Fourier της

$$h_{k,\ell}(x):=\frac{1}{(2\pi i)^k}\left(\frac{d}{dx}\right)^k[(-2\pi i x)^{\ell}f(x)]. \tag{8.1.33}$$

Πράγματι, παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\begin{aligned}\frac{d^{\ell}\widehat{f}}{d\xi^{\ell}} &= \frac{d^{\ell-1}}{d\xi^{\ell-1}}\left(\frac{d\widehat{f}}{d\xi}\right)=\frac{d^{\ell-1}}{d\xi^{\ell-1}}\left(-\widehat{2\pi i x f}\right)\\ &= \cdots=\widehat{(2\pi i)^{\ell}x^{\ell}f}\end{aligned}$$

για κάθε $\ell\geq 1$, και

$$\xi^k\widehat{f}=\xi^{k-1}\xi\widehat{f}=\frac{1}{2\pi i}\xi^{k-1}\widehat{f'}=\cdots=\frac{1}{(2\pi i)^k}\widehat{f^{(k)}}$$

για κάθε $k \geq 1$. Συνδυάζοντας αυτές τις δύο ταυτότητες παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{h_{k,\ell}} &= \frac{1}{(2\pi i)^k} \widehat{\left(\frac{d}{dx}\right)^k [(-2\pi i x)^\ell f]} \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^k} \widehat{\left(\frac{d}{dx}\right)^k [(-2\pi i x)^\ell f]} \\
&= \frac{(2\pi i)^k \xi^k}{(2\pi i)^k} \widehat{(-2\pi i x)^\ell f} \\
&= \xi^k \frac{d^\ell}{d\xi^\ell} \widehat{f}.
\end{aligned}$$

Αφού η $h_{k,\ell}$ ανήκει στην $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, η συνάρτηση $\xi^k \frac{d^\ell}{d\xi^\ell}\widehat{f}$ είναι φραγμένη συνάρτηση. □

8.2 Ο τύπος αντιστροφής

Σκοπός μας σε αυτήν την Παράγραφο είναι να αποδείξουμε τον τύπο αντιστροφής για τον μετασχηματισμό Fourier.

Θεώρημα 8.2.1 (τύπος αντιστροφής). *Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi. \tag{8.2.1}$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 8.2.1 ϑα μελετήσουμε αρχικά τον μετασχηματισμό Fourier των συναρτήσεων της μορφής $f(x) = e^{-ax^2}$, όπου $a > 0$. Όλες αυτές οι συναρτήσεις ανήκουν στον χώρο του Schwartz.

Είναι βολικό να εξετάσουμε πρώτα την συνάρτηση $f(x) = e^{-\pi x^2}$ (δηλαδή, $a = \pi$). Ο λόγος είναι ότι, γι' αυτήν την επιλογή του a,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1. \tag{8.2.2}$$

Ένας πολύ γνωστός τρόπος για να δείξουμε την (8.2.2) είναι να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx\, dy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\infty} 2\pi r e^{-\pi r^2} dr \\
&= \left[-e^{-\pi r^2}\right]_0^{\infty} = 1,
\end{aligned}$$

κάνοντας ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες. Αυτό που θα δείξουμε είναι ότι, για την συγκεκριμένη συνάρτηση $f(x) = e^{-\pi x^2}$, ο μετασχηματισμός Fourier της f είναι η ίδια η f:

Θεώρημα 8.2.2. *Αν $f(x) = e^{-\pi x^2}$, τότε*

$$\widehat{f}(\xi) = f(\xi) = e^{-\pi\xi^2}, \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{8.2.3}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

$$F(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi} dx. \tag{8.2.4}$$

Παρατηρήστε ότι

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1. \tag{8.2.5}$$

Στην προηγούμενη Παράγραφο είδαμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $-2\pi i x g(x)$, όπου $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, είναι η παράγωγος $\frac{d\widehat{g}}{d\xi}$ της $\widehat{g}$. Αφού

$$f'(x) = -2\pi x f(x), \tag{8.2.6}$$

μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} F'(\xi) &= \frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi) = \widehat{-2\pi i x f}(\xi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi i x) f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx \\ &= i\int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi i x\xi} dx. \end{aligned}$$

Στην προηγούμενη Παράγραφο είδαμε επίσης ότι ο μετασχηματισμός Fourier της f' είναι η συνάρτηση $2\pi i\xi\widehat{f}(\xi)$. Συνεπώς,

$$i\int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi i x\xi} dx = i(2\pi i\xi)\widehat{f}(\xi) = -2\pi\xi\widehat{f}(\xi). \tag{8.2.7}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι

$$F'(\xi) = -2\pi\xi F(\xi). \tag{8.2.8}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $G(\xi) = F(\xi)e^{\pi\xi^2}$. Τότε, από την (8.2.8) παίρνουμε

$$G'(\xi) = F'(\xi)e^{\pi\xi^2} + 2\pi\xi F(\xi)e^{\pi\xi^2} = (-2\pi\xi F(\xi) + 2\pi\xi F(\xi))e^{\pi\xi^2} = 0, \tag{8.2.9}$$

δηλαδή η G είναι σταθερή. Αφού $G(0) = F(0) = 1$, έπεται ότι $G \equiv 1$, δηλαδή $\widehat{f}(\xi) = F(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$. $\square$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της $f(x) = e^{-ax^2}$ για οποιαδήποτε τιμή του a. Επιλέγουμε κάπως διαφορετική κανονικοποίηση.

Πρόταση 8.2.3. *Για κάθε $\delta > 0$ θεωρούμε την συνάρτηση $K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\pi x^2/\delta}$. Τότε,*

$$\widehat{K_\delta}(\xi) = e^{-\pi\delta\xi^2}. \tag{8.2.10}$$

Απόδειξη. Στην προηγούμενη Παράγραφο είδαμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $g(\eta x)$ είναι η συνάρτηση $\frac{1}{\eta}\widehat{g}(\xi/\eta)$. Αν $f(x) = e^{-\pi x^2}$, τότε

$$K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} f(x/\sqrt{\delta}). \tag{8.2.11}$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω με $\eta = 1/\sqrt{\delta}$, παίρνουμε

$$\widehat{K_\delta}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\sqrt{\delta}\widehat{f}(\sqrt{\delta}\xi) = e^{-\pi\delta\xi^2}. \qquad \square$$

Θεωρούμε την οικογένεια $\{K_\delta\}_{\delta>0}$, όπου

$$K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi x^2/\delta}. \tag{8.2.12}$$

Η $\{K_\delta\}$ ικανοποιεί τις πρώτες δύο ιδιότητες μιας οικογένειας καλών πυρήνων. Ολοκλήρωση με αντικατάσταση δείχνει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x)\, dx = 1 \tag{8.2.13}$$

για κάθε $\delta > 0$. Επιπλέον, οι K_δ παίρνουν μη αρνητικές πραγματικές τιμές. Συνεπώς, τετριμμένα έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_\delta(x)|\, dx \leq M \tag{8.2.14}$$

για κάθε $\delta > 0$, όπου $M = 1$. Για την τρίτη ιδιότητα, μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της K_δ όταν $\delta \to 0$. Θα δείξουμε ότι: για κάθε $s > 0$,

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_{|x|>s} |K_\delta(x)|\, dx = 0. \tag{8.2.15}$$

Παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $r > 0$ έχουμε

$$\int_r^\infty e^{-\pi y^2}dy \leq \frac{1}{2\pi r}\int_r^\infty 2\pi y e^{-\pi y^2}dy = \frac{1}{2\pi r}e^{-\pi r^2}. \tag{8.2.16}$$

Συνεπώς, για τυχόν $s > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{|x|>s} |K_\delta(x)|\,dx &= \frac{2}{\sqrt{\delta}}\int_s^\infty e^{-\pi x^2/\delta}dx \\ &= 2\int_{s/\sqrt{\delta}}^\infty e^{-\pi y^2}dy \\ &\leq \frac{\sqrt{\delta}}{\pi s}e^{-\pi s^2/\delta} \to 0 \end{aligned}$$

όταν $\delta \to 0^+$ (παρατηρήστε ότι $\sqrt{\delta} \to 0$ και $e^{-\pi s^2/\delta} \leq 1$ – για την ακρίβεια, ο δεύτερος όρος τείνει κι αυτός στο 0 και μάλιστα εκθετικά γρήγορα). Έτσι, έχουμε αποδείξει το ακόλουθο.

Θεώρημα 8.2.4. *Η οικογένεια $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων καθώς το $\delta \to 0$.* □

Ορισμός 8.2.5 (συνέλιξη στο $\mathbb{R}$)**.** Αν $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ορίζουμε την συνέλιξη $f * g$ των f και g μέσω της

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^\infty f(x-t)g(t)\,dt. \tag{8.2.17}$$

Δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $H(t) = f(x-t)g(t)$ ανήκει στην $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Συνεπώς, το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (8.2.17) υπάρχει, και η $f * g$ ορίζεται καλά.

Τροποποιώντας κατάλληλα το βασικό επιχείρημα για την «συνέλιξη με καλούς πυρήνες» μπορούμε να αποδείξουμε το εξής.

Θεώρημα 8.2.6. *Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε*

$$f * K_\delta \xrightarrow{o\mu} f \tag{8.2.18}$$

καθώς το $\delta \to 0$.

Απόδειξη. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{|x|\to+\infty} |f(x)| = 0$. Πράγματι, αφού $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ έχουμε

$$|f(x)| \leq \frac{M}{1+|x|} \tag{8.2.19}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έπεται ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$ (εξηγήστε γιατί). Επίσης, η f είναι φραγμένη: $\|f\|_\infty < +\infty$.

Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $s > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x-y| < s$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Τώρα, γράφουμε

$$\begin{aligned}(f * K_\delta)(x) - f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(t) f(x-t)\,dt - f(x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(t) f(x-t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(t) f(x)\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(t)[f(x-t) - f(x)]\,dt,\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την $\int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(t)\,dt = 1$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}|(f * K_\delta)(x) - f(x)| &\leq \int_{|t|\leq s} K_\delta(t)|f(x-t) - f(x)|\,dt\\ &\quad + \int_{|t|>s} K_\delta(t)(|f(x-t)| + |f(x)|)\,dt\\ &\leq \varepsilon \int_{|t|\leq s} K_\delta(t)\,dt + 2\|f\|_\infty \int_{|t|>s} K_\delta(t)\,dt\\ &\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \int_{|t|>s} K_\delta(t)\,dt.\end{aligned}$$

Αφού

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_{|t|>s} K_\delta(t)\,dt = 0, \tag{8.2.20}$$

υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $0 < \delta < \delta_0$, $|(f * K_\delta)(x) - f(x)| < 2\varepsilon$. Επιπλέον, η επιλογή του δ_0 είναι ανεξάρτητη από το x (το δ_0 εξαρτάται μόνο από το $s = s(\varepsilon)$). Άρα, $f * K_\delta \xrightarrow{\text{ομ}} f$ όταν $\delta \to 0^+$. □

Για την απόδειξη του τύπου αντιστροφής θα χρειαστούμε επίσης την ακόλουθη «πολλαπλασιαστική ταυτότητα».

Πρόταση 8.2.7. *Αν $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, τότε*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{g}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) g(y)\,dy. \tag{8.2.21}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής (η απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα Δ′). Υποθέτουμε ότι $F(x,y)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$, η οποία ικανοποιεί την

$$|F(x,y)| \leq \frac{A}{(1+x^2)(1+y)^2} \tag{8.2.22}$$

για κάποια σταθερά $A > 0$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $y \mapsto F(x,y)$ φθίνει αρκετά γρήγορα και η συνάρτηση $F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\,dy$ είναι συνεχής και φθίνει αρκετά γρήγορα. Ομοίως, η $F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\,dx$ είναι συνεχής και φθίνει αρκετά γρήγορα. Τέλος, ισχύει η ισότητα

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y)\,dy. \tag{8.2.23}$$

Εφαρμόζουμε αυτόν τον ισχυρισμό για την συνάρτηση

$$F(x,y) = f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}. \tag{8.2.24}$$

Παρατηρήστε ότι

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}dy = f(x)\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-2\pi ixy}dy = f(x)\widehat{g}(x), \tag{8.2.25}$$

και όμοια,

$$F_2(y) = \widehat{f}(y)g(y). \tag{8.2.26}$$

Από την (8.2.23) παίρνουμε την (8.2.21). □

Απόδειξη του Θεωρήματος 8.2.1. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,d\xi. \tag{8.2.27}$$

Για κάθε $\delta > 0$ θέτουμε $G_\delta(x) = e^{-\pi\delta x^2}$. Στην Πρόταση 8.2.3 είδαμε ότι $G_\delta = \widehat{K_\delta}$, όπου $K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\pi x^2/\delta}$. Εντελώς ανάλογο επιχείρημα δείχνει ότι $K_\delta = \widehat{G_\delta}$. Χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστική ταυτότητα (8.2.21) παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)K_\delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)G_\delta(\xi)\,d\xi. \tag{8.2.28}$$

Από το Θεώρημα 8.2.6, χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι η K_δ είναι άρτια συνάρτηση, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)K_\delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)K_\delta(-x)\,dx = (f * K_\delta)(0) \to f(0) \tag{8.2.29}$$

όταν $\delta \to 0$. Από την άλλη πλευρά,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)G_\delta(\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{-\pi\delta\xi^2}d\xi \to \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,d\xi \tag{8.2.30}$$

όταν $\delta \to 0$ (εξηγήστε τις λεπτομέρειες, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $e^{-\pi\delta\xi^2} \to 1$ όταν $\delta \to 0$, ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό διάστημα). Έπεται η (8.2.27).

Για το τυχόν $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $F(y) = f(x+y)$ και εφαρμόζουμε την (8.2.27) γι' αυτήν. Αφού $\widehat{F}(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}$, παίρνουμε

$$f(x) = F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{F}(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi, \tag{8.2.31}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παρατήρηση 8.2.8. Θεωρούμε τους τελεστές $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ και $\mathcal{F}^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ που ορίζονται ως εξής:

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi} dx \tag{8.2.32}$$

και

$$\mathcal{F}^*(g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{2\pi i x\xi} d\xi. \tag{8.2.33}$$

Προφανώς,

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}, \tag{8.2.34}$$

δηλαδή, ο $\mathcal{F}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier. Ο τύπος αντιστροφής ουσιαστικά μας λέει ότι

$$(\mathcal{F}^* \circ \mathcal{F})(f) = \mathcal{F}^*(\widehat{f}) = f, \tag{8.2.35}$$

δηλαδή,

$$\mathcal{F}^* \circ \mathcal{F} = I. \tag{8.2.36}$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{F}^*(f)(-y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-2\pi i y\xi} d\xi = \mathcal{F}(f)(y). \tag{8.2.37}$$

Έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^* = I. \tag{8.2.38}$$

Δηλαδή $\mathcal{F}^* = (\mathcal{F})^{-1}$.

Πόρισμα 8.2.9. *Ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι ένα προς ένα και επί, με αντίστροφο τον $\mathcal{F}^*$.* □

8.3 Ο τύπος του Plancherel

Η επόμενη Πρόταση περιγράφει κάποιες βασικές ιδιότητες της συνέλιξης συναρτήσεων της κλάσης του Schwartz.

Πρόταση 8.3.1. *Αν* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *τότε*

(i) $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(ii) $f * g = g * f$.

(iii) $\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η $f * g$ φθίνει πολύ γρήγορα. Για το σκοπό αυτό, παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $\ell \geq 0$ ισχύει

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^\ell |g(x-y)| \leq A_\ell (1+|y|)^\ell \tag{8.3.1}$$

για κάποια σταθερά $A_\ell > 0$. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι $\sup_t |t|^s |g(t)| = M_s < \infty$ για κάθε $s \geq 0$, διότι $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Χρησιμοποιώντας και την ανισότητα

$$|x|^\ell \leq (|x-y| + y|)^\ell \leq 2^\ell \max\{|x-y|, |y|\}^\ell \leq 2^\ell (|x-y|^\ell + |y|^\ell), \tag{8.3.2}$$

γράφουμε

$$|x|^\ell |g(x-y)| \leq 2^\ell |x-y|^\ell |g(x-y)| + 2^\ell |y|^\ell |g(x-y)| \leq 2^\ell M_\ell + 2^\ell M_0 |y|^\ell, \tag{8.3.3}$$

απ' όπου έπεται η (8.3.1) με $A_\ell = 2^\ell \max\{M_\ell, M_0\}$. Τώρα, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} |x|^\ell |(f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(y)||x|^\ell |g(x-y)|\, dy \\ &\leq A_\ell \int_{\mathbb{R}} |f(y)|(1+|y|^\ell)\, dy \end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο, διότι $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Έπεται ότι

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^\ell |(f * g)(x)| < +\infty. \tag{8.3.4}$$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η $f * g$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και

$$(f * g)^{(k)}(x) = (f * g^{(k)})(x) \tag{8.3.5}$$

για κάθε $k \geq 1$. Για $k = 1$ η ισότητα προκύπτει ως εξής: έχουμε

$$\begin{aligned} &\left| \frac{(f * g)(x+t) - (f * g)(x)}{t} - (f * g')(x) \right| \\ = &\left| \int_{\mathbb{R}} f(y) \left[\frac{g(x+t-y) - g(x-y)}{t} - g'(x-y) \right] dy \right| \\ \leq &\int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left| \frac{g(x+t-y) - g(x-y)}{t} - g'(x-y) \right| dy. \end{aligned}$$

Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$g(x+t-y) = g(x-y) + tg'(x-y) + \frac{t^2}{2} g''(u) \tag{8.3.6}$$

για κάποιο u ανάμεσα στα $x-y$ και $x-y+t$. Συνεπώς,

$$\left| \frac{g(x+t-y) - g(x-y)}{t} - g'(x-y) \right| \leq \frac{|t| \|g''\|_\infty}{2}. \tag{8.3.7}$$

Έπεται ότι

$$\left| \frac{(f*g)(x+t) - (f*g)(x)}{t} - (f*g')(x) \right| \leq \frac{|t| \|g''\|_\infty}{2} \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \, dy \to 0 \tag{8.3.8}$$

όταν $t \to 0$. Αφού $g' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι

$$(f*g)'' = [(f*g)']' = (f*g')' = f*g''. \tag{8.3.9}$$

Με διαδοχικές επαναλήψεις του ιδίου επιχειρήματος προκύπτει η (8.3.5).

Αφού $g^{(k)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, συνδυάζοντας τις (8.3.1) και (8.3.5) παίρνουμε

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^\ell |(f*g)^{(k)}(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^\ell |(f*g^{(k)})(x)| < +\infty. \tag{8.3.10}$$

Έτσι, έχουμε δείξει ότι $f*g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Για το (ii) γράφουμε

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) \, dy \tag{8.3.11}$$

και παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $F(y) = f(y)g(x-y)$ ανήκει στη $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, οπότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(y) \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(-y) \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(-y+x) \, dy \tag{8.3.12}$$

από την Πρόταση 8.1.4. Όμως,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(-y+x) \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) \, dy = (g*f)(x). \tag{8.3.13}$$

Για το (iii) θεωρούμε την συνάρτηση $F(x,y) = f(y)g(x-y)e^{-2\pi i x \xi}$. Η $F(x,y)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$ και ικανοποιεί την

$$|F(x,y)| \leq \frac{A}{(1+x^2)(1+y^2)} \tag{8.3.14}$$

για κάποια σταθερά $A > 0$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, διότι $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Έπεται ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $y \mapsto F(x,y)$ φθίνει αρκετά γρήγορα και η συνάρτηση

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\,dy = (f * g)(x)e^{-2\pi i x\xi} \tag{8.3.15}$$

είναι συνεχής και φθίνει αρκετά γρήγορα. Ομοίως, η

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\,dx = f(y)e^{-2\pi i y\xi}\widehat{g}(\xi) \tag{8.3.16}$$

είναι συνεχής και φθίνει αρκετά γρήγορα. Τέλος, ισχύει η ισότητα

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y)\,dy, \tag{8.3.17}$$

δηλαδή

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)e^{-2\pi i x\xi}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi i y\xi}\widehat{g}(\xi)\,dy = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi). \tag{8.3.18}$$

Ορισμός 8.3.2. Το εσωτερικό γινόμενο στην κλάση $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ορίζεται ως εξής:

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx. \tag{8.3.19}$$

Η επαγόμενη νόρμα είναι η

$$\|f\| := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{8.3.20}$$

Θεώρημα 8.3.3 (τύπος του Plancherel)**.** *Για κάθε* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\|\widehat{f}\| = \|f\|. \tag{8.3.21}$$

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \overline{f(-x)}$. Τότε, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ και

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)}e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)}\,\overline{e^{-2\pi i(-x)\xi}}\,dx \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{-2\pi i(-x)\xi}dx} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi i y\xi}dy} \\
&= \overline{\widehat{f}(\xi)}.
\end{aligned}$$

Θεωρούμε την $h = f * g$. Τότε, $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ και

$$\widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi)} = |\widehat{f}(\xi)|^2. \tag{8.3.22}$$

Επίσης,

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(-y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\overline{f(y)}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy. \tag{8.3.23}$$

Από τον τύπο αντιστροφής του Fourier,

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\xi)\,d\xi, \tag{8.3.24}$$

δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi. \tag{8.3.25}$$

Με άλλα λόγια, $\|f\|^2 = \|\widehat{f}\|^2$. □

8.4 Ο τύπος άθροισης του Poisson

Σε αυτήν την Παράγραφο περιγράφουμε μια διαδικασία «περιοδικοποίησης» για συναρτήσεις που ορίζονται στο $\mathbb{R}$ και ανήκουν στην κλάση του Schwartz. Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, αντιστοιχίζουμε στην f την συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που ορίζεται μέσω της

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k). \tag{8.4.1}$$

Θα δούμε ότι η F ορίζεται καλά, είναι 1-περιοδική και συνεχής. Η F είναι η **περιοδικοποίηση** της f. Μία από τις εφαρμογές της είναι ο **τύπος άθροισης του Poisson**.

Θεώρημα 8.4.1 (τύπος άθροισης του Poisson). *Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, τότε*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{2\pi ikx} \tag{8.4.2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k). \tag{8.4.3}$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό διάστημα $[-B, B]$, $B > 0$. Αυτό αποδεικνύει ότι η F ορίζεται καλά στο $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής συνάρτηση.

Θεωρούμε τυχόν $B > 0$ και ορίζουμε $g_k(x) = f(x+k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Αφού $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, υπάρχει σταθερά $M_2 > 0$ ώστε

$$|y|^2 |f(y)| \leq M_2 \tag{8.4.4}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι, αν $|k| > 2B$ τότε για κάθε $x \in [-B, B]$ έχουμε $|x+k| \geq |k| - |x| \geq |k|/2$. Από την (8.4.4) βλέπουμε ότι

$$|g_k(x)| = |f(x+k)| \leq \frac{M_2}{|x+k|^2} \leq \frac{4M_2}{k^2} \tag{8.4.5}$$

για κάθε $x \in [-B, B]$. Αφού $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4M_2}{k^2} < +\infty$, από το κριτήριο του Weierstrass συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{|k|>2B} g_k(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-B, B]$, και αφού όλες οι g_k είναι συνεχείς συναρτήσεις, η σειρά

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k) \tag{8.4.6}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση στο $[-B, B]$.

Το γεγονός ότι η F είναι 1-περιοδική προκύπτει άμεσα από τον τρόπο ορισμού της F: για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θέτοντας $m = k+1$ βλέπουμε ότι

$$F(x+1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+1+k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+m) = F(x). \tag{8.4.7}$$

Ορίζουμε τώρα $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

$$G(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}. \tag{8.4.8}$$

Η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει ομοιόμορφα: γνωρίζουμε ότι $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, άρα $|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C}{1+k^2}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, όπου C θετική σταθερά. Αν λοιπόν ορίσουμε $h_k(x) = \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}$, τότε

$$\|h_k\|_\infty = |\widehat{f}(k)| \leq \frac{C}{1+k^2} \tag{8.4.9}$$

και, αφού $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|h_k\|_\infty < +\infty$, το κριτήριο του Weierstrass εφαρμόζεται κι εδώ. Αφού κάθε h_k είναι συνεχής και 1-περιοδική (εξηγήστε γιατί), η G είναι επίσης συνεχής και 1-περιοδική.

Για την (8.4.2) αρκεί να δείξουμε ότι $F \equiv G$. Οι F και G είναι συνεχείς και 1-περιοδικές, αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier. Στην περίπτωση μιας 1-περιοδικής συνάρτησης u, ο συντελεστής Fourier $\widehat{u}(k)$ ορίζεται από την

$$\widehat{u}(k) = \int_0^1 u(x) e^{-2\pi i k x} dx. \tag{8.4.10}$$

Έστω $m \in \mathbb{Z}$. Από το γεγονός ότι

$$s_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{2\pi ikx} \xrightarrow{\text{ομ}} G(x) \tag{8.4.11}$$

και

$$\widehat{s_n}(m) = \int_0^1 s_n(x)e^{-2\pi imx}dx = \widehat{f}(m) \tag{8.4.12}$$

για κάθε $n \geq |m|$, είναι φανερό ότι $\widehat{G}(k) = \widehat{f}(m)$. Από την άλλη πλευρά, από την ομοιόμορφη σύγκλιση της $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)$ στο $[0,1]$ έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(m) &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=-n}^{n} f(x+k) \right) e^{-2\pi imx}dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \int_0^1 f(x+k)e^{-2\pi imx}dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \int_k^{k+1} f(y)e^{-2\pi imy}dy \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n+1} f(y)e^{-2\pi imy}dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi imy}dy \\
&= \widehat{f}(m).
\end{aligned}$$

Αφού $\widehat{F}(m) = \widehat{G}(m) = \widehat{f}(m)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι $F \equiv G$. □

8.5 Η αρχή αβεβαιότητας του Heisenberg

Η αρχή της αβεβαιότητας ισχυρίζεται ότι αν το «μεγαλύτερο μέρος» της μάζας μιας συνάρτησης συγκεντρώνεται σε κάποιο διάστημα μήκους L, τότε το «μεγαλύτερο μέρος» της μάζας του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης δεν μπορεί να συγκεντρώνεται σε κάποιο διάστημα που έχει μήκος πολύ μικρότερο από $1/L$. Η ακριβής διατύπωση είναι η εξής.

Θεώρημα 8.5.1 (αρχή της αβεβαιότητας). *Έστω $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ με την ιδιότητα*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1. \tag{8.5.1}$$

Τότε,

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2|\psi(x)|^2dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2}. \tag{8.5.2}$$

Γενικότερα, για κάθε $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$,

$$(8.5.3)\qquad \left(\int_{-\infty}^{\infty}(x-x_0)^2|\psi(x)|^2dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}(\xi-\xi_0)^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2d\xi\right) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα την ανισότητα (8.5.2). Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι ψ και ψ' φθίνουν πολύ γρήγορα, με ολοκλήρωση κατά μέρη και γράφοντας $|\psi|^2 = \psi\overline{\psi}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} 1 = \int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx &= -\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{d}{dx}|\psi(x)|^2dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty}\left(x\psi'(x)\overline{\psi(x)} + x\overline{\psi'(x)}\psi(x)\right)dx. \end{aligned}$$

Φράσσοντας απολύτως, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα και την ανισότητα Cauchy–Schwarz, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} 1 &\leq 2\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,|\psi(x)|\,|\psi'(x)|\,dx \\ &\leq 2\left(\int_{-\infty}^{\infty}x^2|\psi(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\psi'(x)|^2dx\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Από την ταυτότητα του Plancherel και το γεγονός ότι $\widehat{\psi'}(\xi) = 2\pi i\xi\widehat{\psi}(\xi)$, παίρνουμε

$$(8.5.4)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}|\psi'(x)|^2dx = 4\pi^2\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2d\xi.$$

Έπεται ότι

$$(8.5.5)\qquad 1 \leq 4\pi\left(\int_{-\infty}^{\infty}x^2|\psi(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε την (8.5.2).

Η ανισότητα (8.5.3) προκύπτει άμεσα αν αντικαταστήσουμε την $\psi(x)$ με την $e^{-2\pi ix\xi_0}\psi(x+x_0)$ στην (8.5.2) και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής. □

8.6 Ασκήσεις

Ομάδα Α′

1. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

και

$$g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{αν } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η f δεν είναι συνεχής, όμως το ολοκλήρωμα που ορίζει τον μετασχηματισμό Fourier έχει νόημα και γι' αυτήν. Δείξτε ότι

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin 2\pi\xi}{\pi\xi} \qquad \text{και} \qquad \widehat{g}(\xi) = \left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right)^2,$$

με τη σύμβαση $\widehat{f}(0) = 2$ και $\widehat{g}(0) = 1$.

2. Έστω $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{f}$ της f είναι συνεχής και υπάρχουν $0 < \alpha < 1$ και $M > 0$ ώστε

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{M}{|\xi|^{1+\alpha}}$$

για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f ικανοποιεί συνθήκη Hölder τάξης α, δηλαδή υπάρχει $B > 0$ ώστε

$$|f(x+t) - f(x)| \leq B|t|^\alpha$$

για κάθε $x, t \in \mathbb{R}$.

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με τις εξής ιδιότητες: $f(0) = 0$, $f(x) = 0$ αν $|x| \geq 1$ και $f(x) = 1/\log(1/|x|)$ στο $(-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ για κάποιο $\delta \in (0,1)$. Δείξτε ότι $\widehat{f} \notin \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

4. (α) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x \notin (a,b)$ και

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x-a}} e^{-\frac{1}{b-x}}, \qquad x \in (a,b).$$

Δείξτε ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

(β) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Δείξτε ότι υπάρχει άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τα εξής: $F(x) = 0$ αν $x \leq a$, $F(x) = 1$ αν $x \geq b$, η F είναι γνησίως αύξουσα στο (a,b).

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση f του (α) και δοκιμάστε συναρτήσεις της μορφής

$$F(x) = c\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \qquad c > 0.$$

5. Έστω $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x) - f\big(x - \frac{1}{2\xi}\big)\right] e^{-2\pi i x\xi} dx,$$

και συμπεράνατε ότι
$$\lim_{|\xi|\to\infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0.$$

6. Έστω $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ με $\widehat{f}(\xi) = 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$. Δείξτε πρώτα ότι
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{g}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)g(y)\,dy$$
για κάθε $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ και, χρησιμοποιώντας την υπόθεση για την $\widehat{f}$, συμπεράνατε ότι $f \equiv 0$ στο $\mathbb{R}$.

7. Δείξτε ότι: αν $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ τότε $f * g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.
Υπόδειξη. Γράψτε
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{|y|\leq |x|/2} f(x-y)g(y)\,dy + \int_{|y|>|x|/2} f(x-y)g(y)\,dy.$$

8. Έστω $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Αν
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy = 0$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $f \equiv 0$ στο $\mathbb{R}$.
Υπόδειξη. Θεωρήστε την $f * e^{-x^2}$.

Ομάδα Β΄

9. Ο **πυρήνας του Fejér στο** $\mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση
$$\mathcal{F}_R(t) = \begin{cases} R\left(\frac{\sin \pi tR}{\pi tR}\right)^2 & \text{αν } t \neq 0 \\ R & \text{αν } t = 0 \end{cases}$$

(α) Δείξτε ότι: αν $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ τότε
$$\int_{-R}^{R} \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right) \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi = (f * \mathcal{F}_R)(x).$$

(β) Δείξτε ότι η $\{\mathcal{F}_R\}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων καθώς το $R \to \infty$.
(γ) Δείξτε ότι: αν $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ τότε
$$\int_{-R}^{R} \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right) \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi \xrightarrow{\text{ομ}} f(x)$$

όταν $R \to \infty$.

10. Αν $\mathcal{F}_R$ είναι ο πυρήνας του Fejér της προηγούμενης άσκησης, δείξτε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_n(x+k) = F_n(x)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου

$$F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{2\pi i k x} = \frac{1}{n}\frac{\sin^2(n\pi x)}{\sin^2(\pi x)}.$$

11. Έστω $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι: αν οι f και $\widehat{f}$ μηδενίζονται έξω από κάποιο κλειστό διάστημα, τότε $f \equiv 0$.

12. Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι

$$\int_a^b x^2|f(x)|^2 dx \geq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2 dx$$

και

$$\int_c^d \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Δείξτε ότι

$$(b-a)(d-c) \geq \frac{1}{2\pi}.$$

13. Θεωρούμε τον **τελεστή του Hermite** $L : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ που ορίζεται από την σχέση

$$L(f) = -\frac{d^2 f}{dx^2} + x^2 f.$$

Στον $S(\mathbb{R})$ θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

(α) Δείξτε ότι

$$\langle L(f), f\rangle \geq \langle f, f\rangle$$

για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (υπόδειξη: ολοκλήρωση κατά μέρη).

(β) Θεωρούμε τους τελεστές A και A^* που ορίζονται στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ μέσω των

$$A(f) = \frac{df}{dx} + xf \qquad \text{και} \qquad A^*(f) = -\frac{df}{dx} + xf.$$

Δείξτε ότι, για κάθε $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

(i) $\langle A(f), g\rangle = \langle f, A^*(g)\rangle$.

(ii) $\langle A(f), A(f)\rangle = \langle A^*A(f), f\rangle \geq 0$.

(iii) $A^*A = L - I$, όπου I ο ταυτοτικός τελεστής.

(γ) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τους τελεστές A_t και A_t^* που ορίζονται στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ μέσω των

$$A_t(f) = \frac{df}{dx} + txf \qquad \text{και} \qquad A_t^*(f) = -\frac{df}{dx} + txf.$$

Δείξτε ότι $\langle A_t^*A_t(f), f\rangle \geq 0$ και με βάση αυτήν την παρατήρηση δώστε μια δεύτερη απόδειξη της αρχής της αβεβαιότητας: αν $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1$, τότε

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{df}{dx}\right|^2 dx\right) \geq \frac{1}{4}.$$

14. Ο **n-οστός πυρήνας του Landau** είναι η συνάρτηση

$$L_n(x) = \begin{cases} \frac{(1-x^2)^n}{c_n} & \text{αν } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{αν } |x| \geq 1 \end{cases}$$

όπου η σταθερά $c_n > 0$ επιλέγεται έτσι ώστε

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_n(x)\, dx = 1.$$

Δείξτε ότι η $\{L_n\}_{n\geq 0}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα δείξτε ότι, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση που μηδενίζεται έξω από το $[-1/2, 1/2]$, τότε η ακολουθία $\{f * L_n\}$ είναι ακολουθία πολυωνύμων στο $[-1/2, 1/2]$, η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

Ομάδα Γ′

15. Οι **αριθμοί Bernoulli** B_n ορίζονται από την

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k.$$

(α) Δείξτε ότι $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$ και $B_5 = 0$.

(β) Δείξτε ότι, για κάθε $k \geq 1$,

$$B_k = -\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j} B_j.$$

(γ) Δείξτε ότι $B_k = 0$ αν ο k είναι περιττός και $k > 1$.
(δ) Έστω $t > 0$. Εφαρμόζοντας τον τύπο άθροισης του Poisson για την $f(x) = \frac{t}{\pi(x^2+t^2)}$ και την $\widehat{f}(\xi) = e^{-2\pi t|\xi|}$, δείξτε ότι

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{t^2+k^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|k|}.$$

(ε) Η **συνάρτηση ζήτα** ορίζεται από την σχέση

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}, \qquad s > 1.$$

Για κάθε $t > 0$ δείξτε τις ταυτότητες

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{t}{t^2+k^2} = \frac{1}{\pi t} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\zeta(2m)t^{2m-1}$$

και

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|k|} = \frac{2}{1-e^{-2\pi t}} - 1.$$

(στ) Χρησιμοποιώντας την

$$\frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)!}z^{2m}$$

δείξτε ότι, για κάθε $m \geq 1$,

$$2\zeta(2m) = (-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!}B_{2m}.$$

16. Οι **συναρτήσεις Hermite** $h_k(x)$, $k \geq 0$, ορίζονται ως εξής:

$$h_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^k (e^{-x^2}).$$

(α) Δείξτε ότι $h_0(x) = e^{-x^2/2}$ και $h_1(x) = 2xe^{-x^2/2}$.
(β) Δείξτε ότι $h_k(x) = P_k(x)e^{-x^2/2}$, όπου P_k είναι πολυώνυμο βαθμού k και συμπεράνατε ότι $h_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
(γ) Δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)\frac{t^k}{k!} = e^{-(x^2/2-2tx+t^2)}.$$

(δ) Δείξτε ότι *η οικογένεια* $\{h_k\}_{k\geq 0}$ *είναι πλήρης*: αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ και

$$\langle f, h_k\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h_k(x)\,dx = 0$$

για κάθε $k \geq 0$, τότε $f \equiv 0$ (χρησιμοποιήστε την Άσκηση 8).
(ε) Ορίζουμε $h_k^*(x) = h_k(\sqrt{2\pi}x)$. Δείξτε ότι

$$\widehat{h_k^*}(\xi) = (-i)^k h_k^*(\xi).$$

Δηλαδή, οι h_k^* είναι ιδιοσυναρτήσεις του μετασχηματισμού Fourier.
(στ) Αν $L(f) = -\frac{d^2 f}{dx^2} + x^2 f$, δείξτε ότι

$$L(h_k) = (2k+1)h_k$$

για κάθε $k \geq 0$. Συμπεράνατε ότι οι h_k είναι ορθογώνιες ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ του Schwartz.
(ζ) Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} [h_k(x)]^2 dx = \sqrt{\pi}2^k k!.$$

Μέρος IV

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις

Κεφάλαιο 9

Ανάλυση Fourier

9.1 Εισαγωγή

Ομάδα Α΄

1. *Έστω* $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ *τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν το* T *είναι περιττή συνάρτηση, τότε* $\lambda_k = 0$ *για κάθε* $k = 0, 1, \ldots, n$.

(β) *Αν το* T *είναι άρτια συνάρτηση, τότε* $\mu_k = 0$ *για κάθε* $k = 1, \ldots, n$.

Υπόδειξη. (α) Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $k = 1, \ldots, n$,

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\cos kx\, dx.$$

Αφού το T είναι περιττή συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\cos kx\, dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(-y)\cos(-ky)\, dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [-T(y)\cos ky]\, dy \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(y)\cos ky\, dy = -\lambda_k.\end{aligned}$$

Από την $\lambda_k = -\lambda_k$ έπεται ότι $\lambda_k = 0$. Για $k = 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(-y)\, dy \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(y)\, dy = -\lambda_0,\end{aligned}$$

άρα, $\lambda_0 = 0$.

(β) Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $k = 1, \ldots, n$,

$$\mu_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\sin kx\,dx.$$

Αφού το T είναι άρτια συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\sin kx\,dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(-y)\sin(-ky)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[T(y)(-\sin ky)]\,dy \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(y)\sin ky\,dy = -\mu_k.\end{aligned}$$

Από την $\mu_k = -\mu_k$ έπεται ότι $\mu_k = 0$.

2. *Δείξτε ότι: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυώνυμο $p(t)$ βαθμού $2k$ ώστε $\sin^{2k} x = p(\cos x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Με επαγωγή ως προς k. Έχουμε $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = p_1(\cos x)$, όπου $p_1(t) = 1 - t^2$, πολυώνυμο βαθμού 2.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p_k(t)$ βαθμού $2k$ ώστε $\sin^{2k} x = p_k(\cos x)$. Τότε,

$$\sin^{2k+2} x = \sin^{2k} x \cdot \sin^2 x = p_k(\cos x)p_1(\cos x).$$

Παρατηρήστε ότι το πολυώνυμο

$$p_{k+1}(t) = p_k(t)p_1(t) = p_k(t)(1 - t^2)$$

έχει βαθμό $2k + 2$ και $\sin^{2k+2} x = p_{k+1}(\cos x)$.

3. *Αποδείξτε πλήρως την Πρόταση 1.1.6 : οι συναρτήσεις*

$$1, \cos x, \ldots, \cos nx, \sin x, \ldots, \sin nx$$

είναι ορθογώνιες.

Υπόδειξη. Για κάθε $k, m = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(k+m)x + \sin(m-k)x]\,dx = 0$$

διότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin sx\,dx = 0$$

για κάθε $s \in \mathbb{Z}$.

Αν $k \neq m$ τότε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k-m)x + \cos(k+m)x] \, dx = 0$$

και

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k-m)x - \cos(k+m)x] \, dx = 0,$$

διότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos sx \, dx = 0$$

για κάθε $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Αν $k = 0$ και $m = 1, \ldots, n$ τότε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos mx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin mx \, dx = 0.$$

4. *Ορίζουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < 2\pi$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, και επεκτείνουμε την f σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η*

$$S[f](x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Υπόδειξη. Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi, \pi]$. Έχουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < \pi$ και $f(x) = f(x + 2\pi) = -\pi - x$ αν $-\pi < x < 0$. Παρατηρήστε ότι

$$f(-x) = -\pi + x = -(\pi - x) = -f(x)$$

για κάθε $0 < x < \pi$, δηλαδή η f είναι περιττή στο $[-\pi, \pi]$. Συνεπώς,

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ομοίως, $a_0(f) = 0$.

Υπολογίζουμε τους συντελεστές $b_k(f)$: αφού η $f(x) \sin kx$ είναι άρτια, έχουμε

$$\begin{aligned} b_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x) \sin kx \, dx \\ &= \left[-2\frac{(\pi - x)\cos kx}{\pi k}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{k} \, dx \\ &= \frac{2\pi}{\pi k} + \left[\frac{2\sin kx}{\pi k^2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$S[f](x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

Ομάδα Β΄

5. *Έστω $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ ώστε $|g(x)| \leq \|f\|_\infty$ για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$ και*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε διαμέριση $P = \{-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = \pi\}$ του $[-\pi,\pi]$ ώστε $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$. Συμβολίζουμε με f^* την κλιμακωτή συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

$$f^*(x) = \sup_{x_{j-1}\leq y\leq x_j} f(y), \qquad x \in [x_{j-1}, x_j), \quad 1 \leq j \leq N.$$

Από τον τρόπο ορισμού της f^* έχουμε $|f^*| \leq \|f\|_\infty$. Επιπλέον,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - f(x)|\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f^*(x) - f(x))\,dx < \varepsilon.$$

Πράγματι,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f^*(x) - f(x))\,dx = U(f,P) - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \leq U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Τροποποιούμε τώρα την f^* ώστε να πάρουμε μια συνεχή και περιοδική συνάρτηση η οποία να προσεγγίζει κι αυτή την f. Για αρκετά μικρό $\delta > 0$, θέτουμε $g(x) = f^*(x)$ αν η απόσταση του x από καθένα από τα σημεία $x_0, \ldots, x_N$ είναι $\geq \delta$. Στην δ-περιοχή του x_j για $j = 1, \ldots, N-1$, ορίζουμε την g να είναι η γραμμική συνάρτηση που ικανοποιεί τις $g(x_j \pm \delta) = f^*(x_j \pm \delta)$. Κοντά στο $x_0 = -\pi$, παίρνουμε την g γραμμική με $g(-\pi) = 0$ και $g(-\pi+\delta) = f^*(-\pi+\delta)$. Όμοια, κοντά στο $x_N = \pi$, παίρνουμε την g γραμμική με $g(\pi) = 0$ και $g(\pi - \delta) = f^*(\pi - \delta)$. Παρατηρήστε ότι η απόλυτη τιμή της g παραμένει φραγμένη από $\|f\|_\infty$. Επιπλέον, η g διαφέρει από την f^* μόνο στα $N+1$ διαστήματα μήκους 2δ ή δ γύρω από τα $x_0, \ldots, x_N$. Συνεπώς,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - g(x)|\,dx \leq 2\|f\|_\infty N \cdot 2\delta.$$

Αν επιλέξουμε το δ αρκετά μικρό, παίρνουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - g(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Η τριγωνική ανισότητα μας δίνει

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx < 2\varepsilon.$$

Σημείωση. Αφού $g(-\pi) = g(\pi)$, μπορούμε να επεκτείνουμε την g σε μια συνεχή περιοδική συνάρτηση σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

6. *Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$.*
(α) *Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ ώστε $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.*
(β) *Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $\|f - h\|_2 < \varepsilon$.*
(γ) *Δείξτε ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο T ώστε $\|f - T\|_2 < \varepsilon$.*

Υπόδειξη. (α) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_\infty > 0$, αλλιώς $f \equiv 0$ και μπορούμε να επιλέξουμε $g = f$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την Άσκηση 5 υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ ώστε $|g(x)| \leq \|f\|_\infty$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ και

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx < \frac{\pi\varepsilon^2}{2\|f\|_\infty}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx &\leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|(|f(x)| + |g(x)|)\, dx \\
&\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx \\
&\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\pi}\frac{\pi\varepsilon^2}{2\|f\|_\infty} = \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\|f - g\|_2 = \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

(β) Στην Άσκηση 5 είδαμε ότι η g του ερωτήματος (α) μπορεί να οριστεί έτσι ώστε να ικανοποιεί την $g(-\pi) = g(\pi)$. Μπορούμε λοιπόν να την επεκτείνουμε σε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση h ορισμένη στο $\mathbb{R}$.

(γ) Έστω $\varepsilon > 0$. Από το ερώτημα (β) υπάρχει συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $\|f - h\|_2 < \varepsilon/2$. Από το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο T ώστε $\|h - T\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\|h - T\|_2 &= \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h(x) - T(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|h - T\|_\infty^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{2}\|h - T\|_\infty < \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

Από την τριγωνική ανισότητα,

$$\|f-T\|_2 \le \|f-h\|_2 + \|h-T\|_2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

7. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$. Δείξτε ότι*

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|^2dx = 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon>0$. Από την Άσκηση 6 υπάρχει συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|^2dx < \varepsilon^2/3.$$

Τότε, για κάθε $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|^2dx\right)^{1/2} &\le \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-g(x+t)|^2dx\right)^{1/2}\\ &\quad+\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x+t)-g(x)|^2dx\right)^{1/2}\\ &\quad+\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)-f(x)|^2dx\right)^{1/2}\\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x+t)-g(x)|^2dx\right)^{1/2}\\ &\quad+2\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)-f(x)|^2dx\right)^{1/2}\\ &< \left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x+t)-g(x)|^2dx\right)^{1/2}+\frac{2\varepsilon}{3},\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι, λόγω της 2π-περιοδικότητας της $f-g$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-g(x+t)|^2dx = \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|^2dx$$

για κάθε $t\in\mathbb{R}$.

Η g είναι συνεχής και 2π-περιοδική, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υπάρχει λοιπόν $t_0>0$ ώστε: αν $|t|<t_0$ τότε $|g(x+t)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τότε, αν $|t|<t_0$ έχουμε

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x+t)-g(x)|^2dx\right)^{1/2} \le \left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varepsilon^2}{9\cdot 2\pi}dx\right)^{1/2} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Έπεται ότι
$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \varepsilon$$
για κάθε $|t| < t_0$. Άρα,
$$\lim_{t\to 0}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-f(x)|^2 dx\right)^{1/2} = 0,$$
δηλαδή το ζητούμενο.

8. *Θεωρούμε την συνάρτηση* $f(x) = (\pi - x)^2$ *στο* $[0, 2\pi]$ *και την επεκτείνουμε σε μια* 2π*-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο* $\mathbb{R}$. *Δείξτε ότι*
$$S[f](x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$
Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $f(0) = f(2\pi)$, άρα η f επεκτείνεται σε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση. Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi, \pi]$. Έχουμε $f(x) = (\pi - x)^2$ αν $0 < x < \pi$ και $f(x) = f(x+2\pi) = (-\pi - x)^2 = (\pi + x)^2$ αν $-\pi < x < 0$. Παρατηρήστε ότι
$$f(-x) = (\pi - x)^2 = f(x)$$
για κάθε $0 < x < \pi$, δηλαδή η f είναι άρτια στο $[-\pi, \pi]$. Συνεπώς,
$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx = 0$$
για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Για τον $a_0(f)$ γράφουμε
$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - x)^2 dx = \left[\frac{-(\pi - x)^3}{6\pi}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi^3}{6\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$
Υπολογίζουμε τους συντελεστές $a_k(f)$, $k \geq 1$: αφού η $f(x)\cos kx$ είναι άρτια, έχουμε
$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)^2 \cos kx\, dx \\ &= \left[\frac{2(\pi - x)^2 \sin kx}{\pi k}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{2(\pi - x)\sin kx}{k}\, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{\pi}\int_0^\pi \frac{(\pi - x)\sin kx}{k}\,dx \\
&= \left[-\frac{4(\pi-x)\cos kx}{\pi k^2}\right]_0^\pi - \frac{4}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos kx}{k^2} \\
&= \frac{4\pi}{\pi k^2} = \frac{4}{k^2}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$S[f](x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^\infty (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Αφού

$$\sum_{k=1}^\infty (|a_k(f)| + |b_k(f)|) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} < +\infty,$$

η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Δηλαδή,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos kx}{k^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα,

$$f(0) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2},$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

9. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση με*

$$\int_{-\pi}^\pi f(x)\,dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' δείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^\pi |f(x)|^2 dx \le \int_{-\pi}^\pi |f'(x)|^2 dx,$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(x) = a\cos x + b\sin x$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Με ολοκλήρωση κατά μέρη βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} a_k(f') &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx = \left[\frac{f(x)\cos kx}{\pi}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)k\sin kx\,dx \\ &= kb_k(f) \end{aligned}$$

αν $k \geq 1$, ενώ

$$a_0(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}(f(\pi) - f(-\pi)) = 0,$$

διότι η f είναι 2π-περιοδική. Όμοια, για κάθε $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} b_k(f') &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\,dx = \left[\frac{f(x)\sin kx}{\pi}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)k\cos kx\,dx \\ &= -ka_k(f). \end{aligned}$$

Από την ταυτότητα του Parseval έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = |a_0(f)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2) = \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2),$$

διότι $a_0(f) = 0$ λόγω της υπόθεσης ότι $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$. Ομοίως, για την f' έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2).$$

Για κάθε $k \geq 1$ έχουμε

$$(*) \qquad |a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2 \leq k^2(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2),$$

οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε την

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

Ισότητα μπορεί να ισχύει αν και μόνο αν έχουμε ισότητα στην $(*)$ για κάθε $k \geq 1$. Αυτό όμως συμβαίνει αν και μόνο αν $a_k(f) = b_k(f) = 0$ για κάθε $k \geq 2$ (εξηγήστε γιατί). Ισοδύναμα (εξηγήστε γιατί) αν

$$f(x) = a_1(f)\cos x + b_1(f)\sin x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

Ομάδα Γ′

10. (α) *Για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *θέτουμε*

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \sin jx.$$

Δείξτε ότι: αν $k > m$ *τότε*

$$|A_k(x) - A_m(x)| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) *Αν* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$, *δείξτε ότι*

$$\left| \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j \sin jx \right| \leq \frac{\lambda_{m+1}}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $n \geq k > m \geq 1$ *και για κάθε* $0 < x < \pi$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $k > m$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} A_k(x) - A_m(x) &= \sum_{j=m+1}^{k} \sin(jx) = \frac{1}{\sin(x/2)} \sum_{j=m+1}^{k} \sin(x/2)\sin(jx) \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)} \sum_{j=m+1}^{k} \left[\cos\big(j - \frac{1}{2}\big)x - \cos\big(j + \frac{1}{2}\big)x \right] \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)} \left[\cos\big(m + \frac{1}{2}\big)x - \cos\big(k + \frac{1}{2}\big)x \right]. \end{aligned}$$

Από την $|\cos t| \leq 1$ έπεται ότι

$$|A_k(x) - A_m(x)| \leq \frac{2}{2|\sin(x/2)|} = \frac{1}{|\sin(x/2)|}.$$

(β) Χρησιμοποιούμε άθροιση κατά μέρη: είναι

$$\begin{aligned} \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j \sin(jx) &= \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j (A_j(x) - A_{j-1}(x)) \\ &= \lambda_k A_k(x) - \lambda_{m+1} A_m(x) + \sum_{j=m+1}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) A_j(x) \\ &= \lambda_k (A_k(x) - A_m(x)) + \sum_{j=m+1}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1})(A_j(x) - A_m(x)), \end{aligned}$$

διότι

$$\lambda_{m+1}A_m(x) = \left[\lambda_k + \sum_{j=m+1}^{k-1}(\lambda_j - \lambda_{j+1})\right] A_m(x).$$

Τότε, χρησιμοποιώντας το (α) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=m+1}^{k}\lambda_j \sin(jx)\right| &\leq \lambda_k|A_k(x) - A_m(x)| + \sum_{j=m+1}^{k-1}(\lambda_j - \lambda_{j+1})|A_j(x) - A_m(x)| \\
&\leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}\left(\lambda_k + \sum_{j=m+1}^{k-1}(\lambda_j - \lambda_{j+1})\right) \\
&= \frac{\lambda_{m+1}}{|\sin(x/2)|}.
\end{aligned}$$

11. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $M > 0$. Αν $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ και $k\lambda_k \leq M$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, δείξτε ότι*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \sin kx\right| \leq (\pi + 1)M$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < x < \pi$ διότι η συνάρτηση $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \sin kx$ είναι περιττή. Γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \sin kx = \sum_{k=1}^{m}\lambda_k \sin kx + \sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k \sin kx,$$

όπου $m = \min\{n, \lfloor \pi/x \rfloor\}$. Για το πρώτο άθροισμα έχουμε

$$0 \leq \sum_{k=1}^{m}\lambda_k \sin(kx) \leq \sum_{k=1}^{m}\frac{M \sin kx}{k} \leq \sum_{k=1}^{m}\frac{Mkx}{k} = Mmx \leq M\pi,$$

διότι $m = \lfloor \pi/x \rfloor \leq \pi/x$. Για το δεύτερο άθροισμα χρησιμοποιούμε την Άσκηση 10(β): είναι

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k \sin kx\right| \leq \frac{\lambda_{m+1}}{\sin(x/2)} \leq \frac{M}{(m+1)\sin(x/2)} \leq M,$$

διότι $m + 1 > \pi/x$, άρα

$$(m+1)\sin(x/2) \geq \frac{\pi}{x}\frac{2x}{2\pi} = 1$$

από την $\sin y \geq \frac{2y}{\pi}$, $0 \leq y \leq \pi/2$.

12. *Έστω $0 < \alpha \leq 1$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$|a_k(f)| \leq \frac{C}{k^\alpha} \qquad \text{και} \qquad |b_k(f)| \leq \frac{C}{k^\alpha}.$$

Υπόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + \pi/k$, έχουμε

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} f(y - \pi/k)\cos(ky - \pi)\,dy \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} f(x - \pi/k)\cos(kx)\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x - \pi/k)\cos(kx)\,dx, \end{aligned}$$

λόγω της 2π-περιοδικότητας της f. Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x - \pi/k)]\cos(kx)\,dx,$$

και χρησιμοποιώντας την υπόθεση παίρνουμε

$$|a_k(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x - \pi/k)|\,|\cos(kx)|\,dx \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M|\pi/k|^\alpha dx = \frac{C}{k^\alpha},$$

όπου $C = M\pi^\alpha$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $|b_k(f)| \leq C/k^\alpha$.

9.2 Σειρές Fourier

Ομάδα Α΄

1. (α) *Δείξτε ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητο.*
(β) *Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις*

$$e^{i\lambda_1 x}, e^{i\lambda_2 x}, \ldots, e^{i\lambda_n x}$$

είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητες. Χρειάζεται η υπόθεση ότι όλοι οι λ_j είναι θετικοί;

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n \in \mathbb{Z}$ και υποθέτουμε ότι για κάποιους $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$t_1 e^{ik_1 x} + \cdots + t_n e^{ik_n x} \equiv 0.$$

Τότε, για κάθε $s = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik_s x}\left(\sum_{j=1}^{n} t_j e^{ik_j x}\right) dx = \sum_{j=1}^{n} t_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j-k_s)x} dx \\ &= 2\pi t_s, \end{aligned}$$

διότι $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j-k_s)x}dx = 0$ αν $j \neq s$ και 2π αν $j = s$. Έπεται ότι $t_1 = \cdots = t_n = 0$. Αυτό δείχνει ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητο.

(β) Χρησιμοποιούμε μόνο το γεγονός ότι οι $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι διακεκριμένοι. Υποθέτουμε ότι για κάποιους $t_1, \ldots, t_n$ ισχύει

$$t_1 e^{i\lambda_1 x} + t_2 e^{i\lambda_2 x} + \cdots + t_n e^{i\lambda_n x} \equiv 0.$$

Παραγωγίζοντας $n-1$ φορές ως προς x και θέτοντας $x = 0$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + \cdots + t_n &= 0 \\ \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \cdots + \lambda_n t_n &= 0 \\ \lambda_1^2 t_1 + \lambda_2^2 t_2 + \cdots + \lambda_n^2 t_n &= 0 \\ \cdots \quad & \quad \cdots \\ \lambda_1^{n-1} t_1 + \lambda_2^{n-1} t_2 + \cdots + \lambda_n^{n-1} t_n &= 0. \end{aligned}$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι μη μηδενική (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$.

2. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα. Δείξτε ότι: για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\,dx = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\,dx,$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,dx.$$

Υπόδειξη. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + 2\pi$ παίρνουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(y-2\pi)\,dy = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(y)\,dy = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\,dx,$$

διότι $f(y-2\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x - 2\pi$ παίρνουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(y+2\pi)\,dy = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(y)\,dy = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\,dx,$$

διότι $f(y+2\pi)=f(y)$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

Κάνοντας την αντικατάσταση $y=x+a$ παίρνουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,dx=\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(y)\,dy=\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

διότι

$$\int_{-\pi}^{-\pi+a} f(y)\,dy=\int_{\pi}^{\pi+a} f(y)\,dy$$

από την 2π-περιοδικότητα της f, άρα

$$\begin{aligned}\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(y)\,dy &= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(y)\,dy+\int_{\pi}^{\pi+a} f(y)\,dy\\ &= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(y)\,dy+\int_{-\pi}^{-\pi+a} f(y)\,dy\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy.\end{aligned}$$

3. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, Riemann ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν η f είναι άρτια, τότε $\widehat{f}(-k)=\widehat{f}(k)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ και η $S[f]$ είναι σειρά συνημιτόνων.*

(β) *Αν η f είναι περιττή, τότε $\widehat{f}(-k)=-\widehat{f}(k)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ και η $S[f]$ είναι σειρά ημιτόνων.*

(γ) *Αν $f(x+\pi)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε $\widehat{f}(k)=0$ για κάθε περιττό ακέραιο k.*

(δ) *Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\hat{f}(k)}=\hat{f}(-k)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε ισχύει και το αντίστροφο.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $k\in\mathbb{Z}$. Κάνοντας την αντικατάσταση $y=-x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-y)e^{-iky}dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}dy=\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

(β) Έστω $k\in\mathbb{Z}$. Κάνοντας την αντικατάσταση $y=-x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-y)e^{-iky}dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (-f(y))e^{-iky}dy=-\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

(γ) Έστω k περιττός ακέραιος. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
2\pi\widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{0} f(x)e^{-ikx}dx + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\
&= \int_{0}^{\pi} f(y-\pi)e^{-ik(y-\pi)}dy + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\
&= e^{ik\pi}\int_{0}^{\pi} f(y)e^{-iky}dy + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\
&= -\int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\
&= 0,
\end{aligned}$$

διότι $f(y-\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ από την υπόθεση, και $e^{ik\pi} = -1$ αφού ο k είναι περιττός.

(δ) Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\overline{\widehat{f}(k)} &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)e^{-ikx}}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x}dx \\
&= \widehat{f}(-k).
\end{aligned}$$

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής και $\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε από την

$$\widehat{\overline{f}}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}e^{-ikx}dx = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx} = \overline{\widehat{f}(-k)} = \widehat{f}(k)$$

βλέπουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $g = f - \overline{f}$ έχει συντελεστές Fourier

$$\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{\overline{f}}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{f}(k) = 0,$$

συνεπώς $g \equiv 0$. Έπεται ότι $f = \overline{f}$, άρα $f(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, Riemann ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε*

$$\tau_a(x) = f(x-a).$$

Περιγράψτε το γράφημα της τ_a σε σχέση με αυτό της f. Είναι η τ_a περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της τ_a συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

Υπόδειξη. Το γράφημα της τ_a είναι μεταφορά του γραφήματος της f κατά a. Το σημείο $(x, f(x))$ μεταφέρεται στο $(x+a, \tau_a(x+a)) = (x+a, f(x))$. Έχουμε

$$\tau_a(x+2\pi) = f(x-a+2\pi) = f(x-a) = \tau_a(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η τ_a είναι 2π-περιοδική. Τέλος,

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_a}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-a)e^{-ikx}dx = e^{-ika}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-a)e^{-ik(x-a)}dx \\ &= e^{-ika}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = e^{-ika}\widehat{f}(k). \end{aligned}$$

5. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, Riemann ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε*

$$g_m(x) = f(mx).$$

Περιγράψτε το γράφημα της g_m σε σχέση με αυτό της f. Είναι η g_m περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της g_m συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

Υπόδειξη. Η g_m έχει περίοδο $2\pi/m$ (άρα και 2π) και το γράφημά της είναι το γράφημα της f συμπιεσμένο: σε ένα διάστημα μήκους 2π «επαναλαμβάνεται» m-φορές. Αν $m \mid k$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $f(y)e^{-iky/m}$ είναι 2π-περιοδική, γράφουμε

$$\begin{aligned} \widehat{g_m}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(mx)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi m}\int_{-\pi m}^{\pi m} f(y)e^{-iky/m}dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-i(k/m)y}dy = \widehat{f}(k/m). \end{aligned}$$

Αν ο m δεν διαιρεί τον k, τότε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $f(my)e^{-iky}$ είναι 2π-περιοδική γράφουμε

$$\begin{aligned} \widehat{g_m}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(mx)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-2\pi/m}^{\pi-2\pi/m} f(my+2\pi)e^{-ik(y+2\pi/m)}dy \\ &= e^{-i2k\pi/m}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-2\pi/m}^{\pi-2\pi/m} f(my)e^{-iky}dy \\ &= e^{-i2k\pi/m}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(my)e^{-iky}dy \\ &= e^{-i2k\pi/m}\widehat{g_m}(k). \end{aligned}$$

Αφού ο m δεν διαιρεί τον k, έχουμε $e^{-i2k\pi/m} \neq 1$, άρα $\widehat{g_m}(k) = 0$.

6. *Θεωρούμε την περιττή 2π-περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που στο $[0,\pi]$ ορίζεται από την*

$$f(x)=x(\pi-x).$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι

$$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)^3}.$$

Υπόδειξη. Αφού η f είναι περιττή, έχουμε $\widehat{f}(0)=0$. Για $k\neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx=\frac{-i}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin(kx)\,dx\\
&= \frac{-i}{\pi}\left[-\frac{\pi x\cos(kx)}{k}+\frac{\pi\sin(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}+\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin(kx)\,dx\\
&= i\frac{(-1)^k\pi}{k}-\frac{i}{\pi}\left[\frac{x^2\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi}+\frac{2i}{\pi k}\int_0^{\pi}x\cos(kx)\,dx\\
&= i\frac{(-1)^k\pi}{k}-i\frac{(-1)^k\pi}{k}+\frac{2i}{\pi k}\left[\frac{x\sin(kx)}{k}+\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}\\
&= \frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned}
\sum_{k\neq 0}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{ikx} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{ikx}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{-ikx}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}(e^{ikx}-e^{-ikx})\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k+1)^3}\sin((2k+1)x),
\end{aligned}$$

διότι $(-1)^k-1=0$ αν ο k είναι άρτιος, και

$$2i[(-1)^k-1](e^{i(2k+1)x}-e^{-i(2k+1)x})=-4i(2i\sin((2k+1)x))=8\sin((2k+1)x).$$

7. *Έστω $0<\delta<\pi$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ με*

$$f(x)=\begin{cases}1-\frac{|x|}{\delta} & \textit{αν } |x|\leq\delta\\ 0 & \textit{αν } \delta\leq|x|\leq\pi\end{cases}$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos k\delta}{k^2\pi\delta} \cos kx.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\Big(1-\frac{x}{\delta}\Big)\,dx = \frac{\delta}{2\pi}.$$

Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left(1-\frac{|x|}{\delta}\right)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left(1-\frac{|x|}{\delta}\right)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\Big(1-\frac{x}{\delta}\Big)\cos(kx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k} - \frac{x\sin(kx)}{\delta k} - \frac{\cos(kx)}{\delta k^2}\right]_0^{\delta} \\
&= \frac{\sin(k\delta)}{\pi k} - \frac{\delta\sin(k\delta)}{\pi\delta k} + \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2} \\
&= \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned}
S[f](x) &= \frac{\delta}{2\pi} + \sum_{k\neq 0}\frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}e^{ikx} = \frac{\delta}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}(e^{ikx}+e^{-ikx}) \\
&= \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}\cos(kx).
\end{aligned}$$

Αφού

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)| = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2} < +\infty,$$

έχουμε $f(x) = S[f](x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

8. *Θεωρούμε την 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[-\pi,\pi]$ ορίζεται από την*

$$f(x) = |x|.$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \pi/2$ και

$$\widehat{f}(k) = \frac{-1 + (-1)^k}{\pi k^2}, \qquad k \neq 0.$$

Γράψτε τη σειρά Fourier $S[f]$ της f σαν σειρά συνημιτόνων και ημιτόνων. Θέτοντας $x = 0$ δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} + \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} e^{ikx} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \\
&= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^k - 1]}{\pi k^2} \cos(kx) \\
&= \frac{\pi}{2} - 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)x).
\end{aligned}$$

Αφού

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)^2} < +\infty,$$

έχουμε $f(x) = S[f](x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα,

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(2k+1)^2},$$

δηλαδή

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Τότε,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{3}\,\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ομάδα Β′

9. Έστω $[a,b]$ κλειστό διάστημα που περιέχεται στο εσωτερικό του $[-\pi,\pi]$. Θεωρούμε την $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ που ορίζεται στο $[-\pi,\pi]$ από τις $f(x) = 1$ αν $x \in [a,b]$ και $f(x) = 0$ αλλιώς, και την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S[f](x) = \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{2\pi ik} e^{ikx}.$$

Δείξτε ότι η $S[f]$ δε συγκλίνει απολύτως για κανένα $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η $S[f](x)$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. Έχουμε

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_a^b 1\,dx = \frac{b-a}{2\pi}.$$

Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ γράφουμε:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-ikx}\,dx = \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{2\pi ik}.$$

Επομένως, η σειρά Fourier της f είναι η

$$S[f](x) = \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{2\pi ik} e^{ikx}.$$

Δείχνουμε πρώτα ότι η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$. Αν $x = a$ τότε η σειρά γράφεται

$$S[f](a) = \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{e^{ik\theta}}{2\pi ik},$$

με $\theta = a - b \in (-2\pi, 0)$. Η τελευταία όμως συγκλίνει από το κριτήριο του Dirichlet. Όμοια, αν $x = b$. Αν $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{a, b\}$ τότε προκύπτουν δυο σειρές της παραπάνω μορφής, οπότε το συμπέρασμα πάλι έπεται από το κριτήριο του Dirichlet.

Από την άλλη μεριά η σειρά δε συγκλίνει απολύτως για καμιά τιμή του x. Γι' αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|e^{-ika} - e^{-ikb}|}{2\pi k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin(k(a-b)/2)|}{\pi k}$$

αποκλίνει. Θέτουμε $\theta = \frac{b-a}{2} \in (0, \pi)$, οπότε θέλουμε να δείξουμε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin(k\theta)|}{k} \quad , \quad \theta \in (0, \pi).$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ γράφουμε:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\sin(k\theta)|}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2(k\theta)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2\theta k)}{k} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

10. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική, η οποία ανήκει στην κλάση C^m (είναι m-φορές παραγωγίσιμη και η $f^{(m)}$ είναι συνεχής). Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f) > 0$ ώστε*

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C(f)}{|k|^m}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι αν η $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε

$$\widehat{g'}(k) = ik\widehat{g}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω για τις $f, f', \ldots, f^{(m-1)}$, βλέπουμε ότι

$$\widehat{f^{(m)}}(k) = ik\widehat{f^{(m-1)}}(k) = \cdots (ik)^m \widehat{f}(k).$$

Συνεπώς,

$$|k|^m |\widehat{f}(k)| = |\widehat{f^{(m)}}(k)| \leq \|f^{(m)}\|_\infty$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

11. *Έστω f, f_n ($n \in \mathbb{N}$) συναρτήσεις 2π-περιοδικές, ολοκληρώσιμες στο $[-\pi, \pi]$, οι οποίες ικανοποιούν την*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_n(x)|\, dx = 0.$$

Δείξτε ότι

$$\widehat{f_n}(k) \to \widehat{f}(k) \quad \text{όταν } n \to \infty,$$

ομοιόμορφα ως προς k. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| < \varepsilon.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} |\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) e^{-ikx} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_n(x) - f(x)) e^{-ikx} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\, |e^{-ikx}|\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\, dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

12. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια*

$$f(x^-) := \lim_{t\to x^-} f(t) \quad \text{και} \quad f(x^+) := \lim_{t\to x^+} f(t).$$

Δείξτε ότι η σειρά Fourier $S[f]$ της f είναι Cesàro αθροίσιμη στο σημείο x: πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x) = \lim_{n\to\infty} (f * F_n)(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Για την απόδειξη τροποποιήστε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.4.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $0 < y < \delta$ τότε $|f(x-y) - f(x^-)| < \varepsilon/2$ και αν $-\delta < y < 0$ τότε $|f(x-y) - f(x^+)| < \varepsilon/2$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η F_n είναι άρτια, μη αρνητική συνάρτηση με μέση τιμή 1, γράφουμε

$$\begin{aligned}(f * F_n)(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y) f(x-y)\,dy - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} F_n(y)[f(x-y) - f(x^+)]\,dy\\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} F_n(y)\,[f(x-y) - f(x^-)]\,dy.\end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} F_n(y)[f(x-y) - f(x^+)]\,dy\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} F_n(y)\,|f(x-y) - f(x^+)|\,dy\\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(y)\,|f(x-y) - f(x^+)|\,dy.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι: αν $-\delta < y < 0$ τότε $|f(x-y) - f(x^+)| < \varepsilon/2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} F_n(y)\,|f(x-y) - f(x^+)|\,dy &\leq \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\delta}^{0} F_n(y)\,dy\\ &\leq \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)\,dy = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(y)\,|f(x-y) - f(x^+)|\,dy &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(y)\,(|f(x-y)| + |f(x^+)|\,dy\\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(y)\,dy \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $n \to \infty$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(y)\,|f(x-y) - f(x^+)|\,dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} F_n(y)[f(x-y) - f(x^+)]\,dy \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} F_n(y)[f(x-y)-f(x^-)]\,dy \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Προσθέτοντας, παίρνουμε το ζητούμενο.

13. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια*

$$f(x^-) := \lim_{t\to x^-} f(t) \quad \text{και} \quad f(x^+) := \lim_{t\to x^+} f(t).$$

Δείξτε ότι η σειρά Fourier $S[f]$ της f είναι Abel αθροίσιμη στο σημείο x: πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{r\to 1^-} A_r(f)(x) = \lim_{r\to 1^-} (f * P_r)(x) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}.$$

Για την απόδειξη τροποποιήστε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.4 και χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} P_r(x)\,dx.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $0 < y < \delta$ τότε $|f(x-y)-f(x^-)| < \varepsilon/2$ και αν $-\delta < y < 0$ τότε $|f(x-y)-f(x^+)| < \varepsilon/2$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η P_r είναι άρτια, μη αρνητική συνάρτηση με μέση τιμή 1, γράφουμε

$$\begin{aligned}(f*P_r)(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(y)f(x-y)\,dy - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(y)[f(x-y)-f(x^+)]\,dy\\ &\quad +\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} P_r(y)[f(x-y)-f(x^-)]\,dy.\end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(y)[f(x-y)-f(x^+)]\,dy\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\,|f(x-y)-f(x^+)|\,dy\\ &\quad +\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,|f(x-y)-f(x^+)|\,dy.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι: αν $-\delta < y < 0$ τότε $|f(x-y)-f(x^+)| < \varepsilon/2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\,|f(x-y)-f(x^+)|\,dy &\leq \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\,dy\\ &\leq \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(y)\,dy = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,|f(x-y)-f(x^+)|\,dy &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,(|f(x-y)|+|f(x^+)|\,dy \\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,dy \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $r \to 1^-$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, υπάρχει $r_0 \in (0,1)$ ώστε, για κάθε $r_0 \leq r < 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,|f(x-y)-f(x^+)|\,dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(y)[f(x-y)-f(x^+)]\,dy \to 0$$

καθώς το $r \to 1^-$. Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} P_r(y)[f(x-y)-f(x^-)]\,dy \to 0$$

καθώς το $r \to 1^-$. Προσθέτοντας, παίρνουμε το ζητούμενο.

Ομάδα Γ′

14. (α) *Έστω $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση των ρητών του $(0,1)$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ με*

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\chi_{[0,+\infty)}(x-q_k)$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη και ασυνεχής σε κάθε q_k (δηλαδή, ασυνεχής σε ένα πυκνό υποσύνολο του $[0,1]$).

(β) *Έστω $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση των ρητών του $(0,1)$. Ορίζουμε $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $g(0) = 0$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ με*

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} g(x-q_k)$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη, ασυνεχής σε κάθε q_k και δεν είναι μονότονη σε κανένα υποδιάστημα του $[0,1]$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_k(x) = k^{-2}\chi_{[0,\infty)}(x-q_k)$. Παρατηρούμε ότι κάθε f_k είναι Riemann ολοκληρώσιμη και επειδή η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα έπεται ότι η F είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Ένας άλλος τρόπος να το δούμε αυτό είναι ο εξής: Αν $x \in [0,1]$ ορίζουμε $I_x = \{k \in \mathbb{N} : q_k \leq x\}$. Παρατηρήστε ότι αν $x < y$ τότε $I_x \subset I_y$, οπότε

$$F(x) = \sum_{k \in I_x} \frac{1}{k^2} < \sum_{k \in I_y} \frac{1}{k^2} = F(y)$$

που αποδεικνύει ότι η F είναι γνησίως αύξουσα, άρα η F είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Τώρα δείχνουμε ότι η F είναι ασυνεχής σε κάθε q_k. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Αν $x < q_k \leq y$, τότε $k \in I_y \setminus I_x$, άρα

$$F(y) - F(x) = \sum_{j \in I_y \setminus I_x} \frac{1}{j^2} > \frac{1}{k^2}.$$

Αυτό δείχνει ότι η F παρουσιάζει άλμα ασυνέχειας στο q_k. Ειδικότερα, μπορούμε αν δείξουμε ότι $F(q_k) - F(q_k-) = 1/k^2$. Για να το δείτε αυτό παρατηρήστε ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$ με $N > k$ υπάρχει $\delta = \delta_{N,k} > 0$ ώστε $(q_k - \delta, q_k) \cap \{q_n : n \geq 1\} \subset \{q_j : j > N\}$. Τότε, για $q_k - \delta < x < q_k$ παίρνουμε:

$$\frac{1}{k^2} < F(q_k) - F(x) = \sum_{j : x < q_j \leq q_k} \frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{k^2} + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \frac{1}{k^2} + \frac{1}{N}.$$

Κάθως, το N μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα μεγάλο έχουμε το ζητούμενο.

(β) Θέτουμε $g_k(x) = g(x - q_k)$. Γνωρίζουμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα που περιέχει το 0 από το κριτήριο του Riemann. Από το κριτήριο του Weierstrass έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} g_k$ ορίζει Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Έστω $k \in \mathbb{N}$, θα δείξουμε ότι η G είναι ασυνεχής στο q_k. Από την ανισότητα $|\sin u - \sin v| \leq |u - v|$ προκύπτει ότι

$$|g(x) - g(y)| \leq \min\left\{2, \frac{|x-y|}{|xy|}\right\}$$

για $x, y \neq 0$. Έστω $0 < \delta < \min\{|q_j - q_k| : 1 \leq j < k\}$. Τότε, για $q_k - \delta < x < q_k < y < q_k + \delta$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
|G(x) - G(y)| &= \left| \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{3^j} \left(g(x - q_j) - g(y - q_j)\right) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^j} \left(g(x - q_j) - g(y - q_j)\right) \right| \\
&\geq \left| \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{3^j} \left(g(x - q_j) - g(y - q_j)\right) \right| - \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^j} \\
&= \left| \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{3^j} \left(g(x - q_j) - g(y - q_j)\right) \right| - \frac{1}{3^k}.
\end{aligned}$$

Έστω $0 < t < \delta$ (το οποίο θα καθοριστεί στη συνέχεια) και θεωρούμε $y = q_k + t$ και $x = q_k - t$. Τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$|G(x) - G(y)| \quad \geq \quad \left|\sum_{j=1}^{k-1} 3^{-j}\left(g(x-q_j) - g(y-q_j)\right) - \frac{2}{3^k}\sin\frac{1}{t}\right| - \frac{1}{3^k}.$$

Επίσης, $(x-q_j)(y-q_j) = (q_k - q_j)^2 - t^2$, οπότε για $0 < t < \delta/2$ είναι

$$|g(x-q_j) - g(y-q_j)| \leq \frac{|x-y|}{|x-q_j||y-q_j|} = \frac{2t}{(q_k-q_j)^2 - t^2} \leq \frac{2t}{\delta^2 - t^2} < \frac{4t}{\delta^2}.$$

για $1 \leq j < k$. Επομένως, το άθροισμα εκτιμάται:

$$(*) \qquad \left|\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{3^j}\left(g(x-q_j) - g(y-q_j)\right)\right| \leq \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{3^j}\cdot\frac{4t}{\delta^2} < \frac{2t}{\delta^2}.$$

Αν επιλέξουμε $t = t_m = (2\pi m + \pi/2)^{-1}$, για όλα τα μεγάλα $m \in \mathbb{N}$ προκύπτει:

$$|G(x_m) - G(y_m)| \geq \frac{1}{3^k} - \frac{2t_m}{\delta^2} > \frac{1}{2\cdot 3^k},$$

όπου $x_m = q_k - t_m$ και $y_m = q_k + t_m$. Αυτό αποδεικνύει ότι η G είναι ασυνεχής στον q_k.

Τέλος, δείχνουμε ότι η G δεν είναι μονότονη σε κανένα υποδιάστημα του $[0,1]$. Για να το δείξουμε αυτό αρκεί για κάθε $(a,b) \subset [0,1]$ να βρούμε $a < x < y < b$ ώστε $G(x) < G(y)$ και $a < u < v < b$ ώστε $G(u) > G(v)$. Έστω λοιπόν $0 < a < b < 1$. Υπάρχει $q_k \in (a,b)$ και έστω $\delta > 0$ όπως πριν και επιπλέον $(q_k - \delta, q_k + \delta) \subset (a,b)$. Έστω $x = q_k - t, y = q_k + t$ με $0 < t < \delta/2$. Γράφουμε:

$$\begin{aligned}
G(x) - G(y) &= \sum_{j\neq k} \frac{1}{3^j}\left(g(x-q_j) - g(y-q_j)\right) - \frac{2}{3^k}\sin\frac{1}{t} \\
&\geq \sum_{j<k} \frac{1}{3^j}\left(g(x-q_j) - g(y-q_j)\right) - \frac{2}{3^k}\sin\frac{1}{t} - \frac{1}{3^k} \\
&\geq -\left|\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{3^j}\left(g(x-q_j) - g(y-q_j)\right)\right| - \frac{2}{3^k}\sin\frac{1}{t} - \frac{1}{3^k} \\
&\geq -\frac{2t}{\delta^2} - \frac{2}{3^k}\sin\frac{1}{t} - \frac{1}{3^k},
\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την $(*)$. Για $t = t_m = (2\pi m + 3\pi/2)^{-1}$ έχουμε

$$G(x_m) - G(y_m) \geq \frac{1}{2\cdot 3^k} > 0,$$

για όλα τα μεγάλα $m \in \mathbb{N}$ όπως προηγουμένως. Για την αντίστροφη εκτίμηση, θεωρούμε $u = q_k - s$, $v = q_k + s$ με $0 < s < \delta/2$:

$$\begin{aligned} G(u) - G(v) &= \sum_{j \neq k} \frac{1}{3^j}(g(u - q_j) - g(v - q_j)) - \frac{2}{3^k}\sin\frac{1}{s} \\ &\leq \left| \sum_{j<k} \frac{1}{3^j}(g(u - q_j) - g(v - q_j)) \right| - \frac{2}{3^k}\sin\frac{1}{s} + \frac{1}{3^k} \\ &\leq \frac{2s}{\delta^2} - \frac{2}{3^k}\sin\frac{1}{s} + \frac{1}{3^k}. \end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε $s = s_m = (2\pi m + \pi/2)^{-1}$, τότε για όλα τα μεγάλα $m \in \mathbb{N}$ παίρνουμε:

$$G(u_m) - G(v_m) \leq \frac{2s_m}{\delta^2} - \frac{1}{3^k} < -\frac{1}{2 \cdot 3^k} < 0.$$

Η απόδειξη είναι πλήρης.

15. *Έστω $M > 0$ και έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχείς συναρτήσεις που μηδενίζονται έξω από το $[-M, M]$. Ορίζουμε $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μέσω της*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)\,dy.$$

(α) *Δείξτε ότι η $f*g$ είναι καλά ορισμένη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι $(f*g)(x) = 0$ αν $|x| > 2M$.*
(β) *Δείξτε ότι $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$, όπου*

$$\|u\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|\,dx.$$

Υπόδειξη. (α) Αφού η f μηδενίζεται έξω από το $[-M, M]$, έχουμε

$$(f * g)(x) = \int_{-M}^{M} f(y)g(x - y)\,dy.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό υπάρχει διότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $u_x : [-M, M] \to \mathbb{C}$ με $u_x(y) = f(y)g(x-y)$ είναι συνεχής συνάρτηση (αφού οι f, g είναι συνεχείς). Για το δεύτερο ερώτημα, δείχνουμε ότι: αν $|x| > 2M$ τότε $f(y)g(x-y) = 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αν $y \notin [-M, M]$ έχουμε $f(y) = 0$, ενώ αν $|y| \leq M$ τότε $|x - y| \geq |x| - |y| > 2M - M = M$, οπότε $g(x - y) = 0$.
(β) Γράφουμε

$$\|f * g\|_1 = \int_{-2M}^{2M} |(f * g)(x)|\,dx = \int_{-2M}^{2M} \left| \int_{-M}^{M} f(y)g(x - y)\,dy \right| dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{-2M}^{2M}\int_{-M}^{M}|f(y)|\,|g(x-y)|\,dy\,dx = \int_{-M}^{M}|f(y)|\left(\int_{-2M}^{2M}|g(x-y)|\,dx\right)dy \\
&\leq \int_{-M}^{M}|f(y)|\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(x-y)|\,dx\right)dy = \int_{-M}^{M}|f(y)|\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|\,dt\right)dy \\
&= \|g\|_1\int_{-M}^{M}|f(y)|\,dy = \|g\|_1\|f\|_1.
\end{aligned}
$$

16. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τον πυρήνα του Dirichlet*

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Δείξτε ότι: υπάρχει σταθερά $c>0$ ώστε

$$L_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(x)|\,dx \geq c\log n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $|\sin(x/2)| \leq |x|/2$. Συνεπώς,

$$|D_n(x)| = \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})x)|}{|\sin(x/2)|} \geq \frac{2|\sin((n+\frac{1}{2})x)|}{|x|}.$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
L_n &:= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(x)|\,dx \geq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin((n+\frac{1}{2})x)|}{|x|}\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{|\sin((n+\frac{1}{2})x)|}{x}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,dt \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,dt \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{0}^{\pi}\sin t\,dt \geq c\log n,
\end{aligned}
$$

διότι $\int_0^\pi \sin t\,dt = 2$ και $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \geq c_1\log n$.

17. *Δείξτε ότι*

$$\left|L_n - \frac{4}{\pi^2}\log n\right| \leq C_1$$

για κάποια σταθερά $C_1 > 0$ ανεξάρτητη από το n.

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin nx}{\tan(x/2)} + \cos nx = D_n^*(x) + g(x),$$

όπου $D_n^*(x) = \frac{\sin nx}{\tan(x/2)}$ και $g(x) = \cos nx$. Παρατηρήστε ότι

$$L_n \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n^*(x)|dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|dx \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n^*(x)|dx + 1,$$

και, εντελώς ανάλογα,

$$L_n \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n^*(x)|dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|dx \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n^*(x)|dx - 1,$$

διότι $\|g\|_\infty = 1$. Επίσης, αν γράψουμε

$$D_n^*(x) = \frac{\sin nx}{x/2} + \sin nx\left(\frac{1}{\tan(x/2)} - \frac{1}{x/2}\right)$$

και παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{1}{\tan(x/2)} - \frac{1}{x/2}$ επεκτείνεται συνεχώς στο 0, άρα είναι φραγμένη και ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h(x)\sin nx|\,dx \leq C,$$

δηλαδή

$$\left|L_n - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin nx|}{|x/2|}dx\right| \leq C+1.$$

Τώρα, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin nx|}{|x/2|}dx &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{|\sin nx|}{x}dx \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n}\frac{|\sin nx|}{x}dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/n}(\sin nt)\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{t+k\pi/n}\right)dt + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/n}\frac{\sin nt}{t}dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/n}(\sin nt)\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{t+k\pi/n}\right)dt + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt.
\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $t \in [0, \pi/n]$,

$$\frac{n}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{t+k\pi/n} \leq \frac{n}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k},$$

δηλαδή υπάρχει σταθερά $C_1 > 0$ ώστε

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{t+k\pi/n} - \frac{n\log n}{\pi}\right| \leq C_1$$

για κάθε $t \in [0, \pi/n]$. Αφού

$$\frac{n\log n}{\pi}\int_0^{\pi/n}\sin nt\,dt = \frac{2\log n}{\pi},$$

έπεται ότι

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin nx|}{|x/2|}dx - \frac{4}{\pi^2}\log n\right| \leq C_2.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, καταλήγουμε στην

$$\left|L_n - \frac{4}{\pi^2}\log n\right| \leq 1 + C + C_2.$$

18. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα. Δείξτε ότι*

$$\|s_n(f)\|_\infty \leq C\log(1+n)\|f\|_\infty,$$

όπου $C > 0$ σταθερά ανεξάρτητη από την f και από το n.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι

$$s_n(f)(x) = (f * D_n)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)D_n(y)dy$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα,

$$|s_n(f)(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)|\,|D_n(y)|\,dy \leq \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(y)|\,dy.$$

Δηλαδή,

$$\|s_n(f)\|_\infty = \sup_x |s_n(f)(x)| \leq L_n\|f\|_\infty.$$

Από την Άσκηση 17 γνωρίζουμε ότι $L_n \leq C\log(1+n)$, όπου $C > 0$ σταθερά ανεξάρτητη από την f και από το n. Έπεται το ζητούμενο.

19. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχής ώστε $\|f\|_\infty = 1$ και*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \operatorname{sign} D_n(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{n},$$

όπου $\operatorname{sign} u$ είναι το πρόσημο του u (και $\operatorname{sign} 0 = 0$). Συμπεράνατε ότι

$$\|s_n(f)\|_\infty \geq L_n - \varepsilon.$$

Υπόδειξη. Στην Άσκηση 1.5 είδαμε ότι αν $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ώστε $|f(x)| \leq \|g\|_\infty$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ και

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx < \delta.$$

Η συνάρτηση $g(x) = \operatorname{sign} D_n(x)$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη (έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας, όσα είναι τα σημεία στα οποία αλλάζει πρόσημο η D_n) και $\|g\|_\infty = 1$. Εφαρμόζοντας την Άσκηση 1.5 με $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$ βρίσκουμε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ώστε $\|f\|_\infty = 1$ και

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \operatorname{sign} D_n(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
|s_n(f)(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)D_n(y)\, dy\right| \\
&\geq \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign} D_n(x-y)D_n(y)\, dy\right| - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - g(x-y)||D_n(y)|\, dy \\
&\geq \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign} D_n(x-y)D_n(y)\, dy\right| - \frac{\varepsilon\|D_n\|_\infty}{4n} \\
&\geq \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign} D_n(x-y)D_n(y)\, dy\right| - \varepsilon,
\end{aligned}$$

διότι $\|D_n\|_\infty = 2n+1$. Όμως,

$$\begin{aligned}
s_n(\operatorname{sign} D_n)(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\operatorname{sign} D_n(-y)]D_n(y)\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\operatorname{sign} D_n(y)]D_n(y)\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(y)|\, dy = L_n,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η D_n, άρα και η $\operatorname{sign} D_n$, είναι άρτια. Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\|s_n(f)\|_\infty \geq |s_n(f)(0)| \geq |s_n(\operatorname{sign} D_n)(0)| - \varepsilon = L_n - \varepsilon.$$

20. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε*

$$Q_n(t) = \alpha_n \left(\frac{1+\cos t}{2} \right)^n,$$

όπου η θετική σταθερά α_n επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\, dt = 1.$$

Δείξτε ότι: αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε

$$f * Q_n \xrightarrow{o\mu} f.$$

Παρατηρήστε ότι αυτό δίνει άλλη μια απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

Υπόδειξη. Δείχνουμε ότι η $\{Q_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Από τον ορισμό της, κάθε Q_n είναι άρτια, μη αρνητική συνάρτηση και ικανοποιεί την $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)dt = 1$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι, για κάθε $0 < \delta < \pi$,

$$\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} Q_n(t)dt = 2\int_{\delta}^{\pi} Q_n(t)dt \to 0 \quad \text{όταν } n \to \infty.$$

Έστω $0 < \delta < \pi$. Παρατηρούμε ότι $\frac{1+\cos t}{2} \leq \frac{1+\cos\delta}{2} < 1$ για κάθε $t \in [\delta, \pi]$. Συνεπώς,

$$\int_{\delta}^{\pi} Q_n(t)dt \leq 2\pi\alpha_n \left(\frac{1+\cos\delta}{2} \right)^n.$$

Θα δείξουμε ότι $\alpha_n \leq 4(n+1)$, οπότε το ζητούμενο έπεται από την $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\theta^n = 0$ για $\theta = \frac{1+\cos\delta}{2} < 1$.

Για την ανισότητα $\alpha_n \leq n$ γράφουμε

$$\frac{2\pi}{\alpha_n} = 2\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2} \right)^n = 2\int_0^{\pi} \cos^{2n}(t/2)dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} y\, dy.$$

Η $f(y) = \cos y$ είναι κοίλη στο $[0, \pi/2]$ και $f(0) = 1$, $f(\pi/2) = 0$. Συνεπώς, $\cos y \geq 1 - \frac{2y}{\pi}$ για κάθε $y \in [0, \pi/2]$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\frac{2\pi}{\alpha_n} \geq \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{2y}{\pi} \right)^n dy = \frac{\pi}{2}\int_0^1 (1-s)^n ds = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Δηλαδή, $\alpha_n \leq 4(n+1)$.

Αφού η $\{Q_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων, για κάθε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ισχύει $f * Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$. Τέλος, παρατηρούμε ότι κάθε Q_n είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Άρα, οι συναρτήσεις $f * Q_n$ είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα (εξηγήστε γιατί). Έτσι, έχουμε απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

21. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε*

$$G_n(x) = F_n(x) \sin nx,$$

όπου F_n είναι ο n-οστός πυρήνας του Fejér. Δείξτε ότι: αν $T \in \mathcal{T}_n$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n, τότε

$$T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συμπεράνατε ότι

$$|T'(x)| \leq 2n\|T\|_\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτή είναι μια «ασθενής» έκδοση της ανισότητας του Bernstein, η οποία ισχυρίζεται ότι $\|T'\|_\infty \leq n\|T\|_\infty$ για κάθε $T \in \mathcal{T}_n$.

Υπόδειξη. Τα δύο μέλη της ισότητας $T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$ είναι γραμμικά ως προς T, αρκεί λοιπόν να την επαληθεύσουμε για όλες τις συναρτήσεις $T_k(x) = e^{ikx}$, $|k| \leq n$. Έχουμε

$$T_k'(x) = ike^{ikx}$$

και

$$\begin{aligned}
(T_k * G_n)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_k(x-y)G_n(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-y)}F_n(y)\sin(ny)\,dy \\
&= \sum_{s=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-y)}e^{isy}\sin(ny)\,dy \\
&= e^{ikx}\sum_{s=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k)y}\frac{e^{iny}-e^{-iny}}{2i}\,dy \\
&= \frac{1}{2i}e^{ikx}\sum_{s=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[e^{i(s-k+n)y}-e^{i(s-k-n)y}]\,dy.
\end{aligned}$$

Έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k+n)y}dy = 0$$

εκτός αν $s = k - n$ και

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k-n)y}dy = 0$$

εκτός αν $s = n + k$. Το πρώτο μπορεί να συμβεί μόνο αν $k > 0$ και το δεύτερο μόνο αν $k < 0$. Συνεπώς, αν $0 < k < n$ έχουμε

$$(T_k * G_n)(x) = \frac{1}{2i}e^{ikx}\left(1 - \frac{n-k}{n}\right) = \frac{k}{2ni}e^{ikx} = \frac{-ik}{2n}e^{ikx}.$$

Αν $-n < k < -1$, έχουμε

$$(T_k * G_n)(x) = -\frac{1}{2i}e^{ikx}\left(1 - \frac{n+k}{n}\right) = \frac{k}{2ni}e^{ikx} = \frac{-ik}{2n}e^{ikx}.$$

Σε κάθε περίπτωση, αν $k \neq 0$ παίρνουμε

$$(*) \qquad T_k'(x) = -2n(T_k * G_n)(x).$$

Αν πάλι $k = 0$, τα δύο μέλη της $(*)$ είναι ίσα με μηδέν. Έτσι, έχουμε αποδείξει την $T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$ για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n.

Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} |T'(x)| &= 2n|(T * G_n)(x)| \leq 2n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |T(x-y)|\,|F_n(y)\sin ny|\,dy \\ &\leq 2n\|T\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)\,dy = 2n\|T\|_\infty. \end{aligned}$$

9.3 Σύγκλιση σειρών Fourier

Ομάδα Α΄

1. *Δείξτε ότι ο $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι πλήρης.*

Υπόδειξη. Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον $\ell_2(\mathbb{Z})$. Γράφουμε $x_n = (x_n(k))_{k\in\mathbb{Z}}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n, s \geq n_0$,

$$(*) \qquad \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_n(k) - x_s(k)|^2\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n, s \geq n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$|x_n(k) - x_s(k)| \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_n(k) - x_s(k)|^2\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Δηλαδή, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ η ακολουθία $(x_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στο $\mathbb{C}$. Από την πληρότητα του $\mathbb{C}$, υπάρχουν $x(k) \in \mathbb{C}$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Ορίζουμε $x = (x(k))_{k\in\mathbb{Z}}$. Θα δείξουμε ότι $x \in \ell_2(\mathbb{Z})$ και $\|x_n - x\|_2 \to 0$.

Σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$: από την $(*)$ έχουμε, για κάθε $n, s \geq n_0$,

$$\left(\sum_{k=-N}^{N} |x_n(k) - x_s(k)|^2\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Επίσης,

$$\lim_{s\to\infty}\left(\sum_{k=-N}^{N} |x_n(k) - x_s(k)|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=-N}^{N} |x_n(k) - x(k)|^2\right)^{1/2},$$

άρα, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\left(\sum_{k=-N}^{N} |x_n(k) - x(k)|^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

Αφήνοντας το $N \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $n \geq n_0$,

$$(**) \qquad \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_n(k) - x(k)|^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

Ειδικότερα, για $n = n_0$ έχουμε ότι $x - x_{n_0} \in \ell_2(\mathbb{Z})$ και, αφού $x_{n_0} \in \ell_2(\mathbb{Z})$, από την ανισότητα του Minkowski βλέπουμε ότι $x = (x - x_{n_0}) + x_{n_0} \in \ell_2(\mathbb{Z})$. Επιπλέον, η $(**)$ δείχνει ότι, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\|x - x_n\|_2 \leq \varepsilon,$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $x_n \to x$.

2. *Θεωρούμε τον χώρο $\mathcal{R}$ των ολοκληρώσιμων $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με τη νόρμα*

$$\|f\| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

(α) *Δείξτε ότι, αν $f \in \mathcal{R}$ και $\|f\| = 0$, τότε $f(x) = 0$ σε κάθε σημείο x στο οποίο η f είναι συνεχής.*

(β) *Αντίστροφα, δείξτε ότι αν η f παίρνει την τιμή 0 σε όλα τα σημεία στα οποία είναι συνεχής, τότε $\|f\| = 0$.*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in [0, 2\pi]$ και ότι $f(x_0) \neq 0$. Τότε, $|f(x_0)| > 0$ και από την συνέχεια της f στο x_0 έπεται ότι υπάρχει διάστημα $I = [a, b] \subset$

$[0, 2\pi]$ ώστε $x_0 \in I$ και $|f(x)| \geq |f(x_0)|/2$ για κάθε $x \in I$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} 2\pi\|f\|^2 &= \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \int_I |f(x)|^2 dx + \int_{[0,2\pi]\setminus I} |f(x)|^2 dx \\ &\geq \int_I |f(x)|^2 dx \geq \frac{(b-a)|f(x_0)|^2}{4} > 0. \end{aligned}$$

Αυτό είναι άτοπο, διότι $\|f\| = 0$.

(β) Έστω ότι $\|f\| > 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = |f(x)|^2$. Τότε, $\int_0^{2\pi} g(x)dx > 0$. Συνεπώς, υπάρχει διαμέριση $P = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 2\pi\}$ του $[0, 2\pi]$ ώστε

$$L(g, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(g)(x_{k+1} - x_k) > 0.$$

Έπεται ότι $m_k(g) = \inf\{g(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} > 0$ για κάποιο $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Όμως, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[x_k, x_{k+1}]$, άρα έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας z στο $[x_k, x_{k+1}]$ (γνωστή άσκηση από τον Απειροστικό Λογισμό ΙΙ). Από την υπόθεση έχουμε $f(z) = 0$, άρα $g(z) = |f(z)|^2 = 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $g(z) \geq m_k(g) > 0$.

3. *Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με*

$$f(\theta) = \begin{cases} \ln(1/\theta), & \text{αν } 0 < \theta \leq 2\pi \\ 0, & \text{αν } \theta = 0 \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f δεν ανήκει στον $\mathcal{R}$. Θεωρούμε τώρα την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, όπου

$$f_n(\theta) = \begin{cases} \ln(1/\theta), & \text{αν } \frac{1}{n} < \theta \leq 2\pi \\ 0, & \text{αν } 0 \leq \theta \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Δείξτε ότι κάθε f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη και ότι η $\{f_n\}$ είναι βασική ακολουθία του $\mathcal{R}$, αλλά δεν υπάρχει $g \in \mathcal{R}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} \|g - f_n\| = 0$.

Υπόδειξη. Η f δεν είναι φραγμένη: παρατηρήστε ότι $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \ln(1/\theta) = +\infty$. Άρα, η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη. Είναι φραγμένη από την τιμή της στο $1/n$, δηλαδή $\|f_n\|_\infty = \ln n$. Επίσης,

$$\int_0^{2\pi} f_n(\theta)d\theta = -\int_{1/n}^{2\pi} \ln\theta \, d\theta = \big[-\theta\ln\theta + \theta\big]_{1/n}^{2\pi}.$$

Η $\{f_n\}$ είναι βασική ακολουθία: αν $m > n$ τότε

$$2\pi\|f_n - f_m\|^2 = \int_{1/m}^{1/n} \ln^2\theta \, d\theta = \big[\theta\ln^2\theta\big]_{1/m}^{1/n} - 2\int_{1/m}^{1/n} \ln\theta \, d\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\ln^2 n}{n} - \frac{\ln^2 m}{m} - 2\big[\theta\ln\theta - \theta\big]_{1/m}^{1/n} \\
&= \frac{\ln^2 n}{n} - \frac{\ln^2 m}{m} + \frac{2\ln n}{n} - \frac{2\ln m}{m} + \frac{2}{n} - \frac{2}{m} \to 0
\end{aligned}
$$

όταν $n, m \to +\infty$. Έστω ότι υπάρχει $g \in \mathcal{R}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} \|g - f_n\| = 0$. Τότε, για κάθε $b \in (0, 2\pi)$ και για κάθε $n > 1/b$,

$$\int_b^{2\pi} |g(\theta) - \ln(1/\theta)|^2 d\theta = \int_b^{2\pi} |g(\theta) - f_n(\theta)|^2 d\theta \leq 2\pi \|g - f_n\|^2 \to 0,$$

δηλαδή

$$\int_b^{2\pi} |g(\theta) - \ln(1/\theta)|^2 d\theta = 0.$$

Από την Άσκηση 3.2(α), για κάθε $b \in (0, 2\pi)$ και για κάθε $\theta \in (b, 2\pi)$ στο οποίο η g είναι συνεχής ισχύει $g(\theta) = \ln(1/\theta)$. Άρα, για κάθε $\theta \in (0, 2\pi)$ στο οποίο η g είναι συνεχής ισχύει $g(\theta) = \ln(1/\theta)$. Όμως, η g είναι ολοκληρώσιμη, άρα έχει σημείο συνέχειας σε κάθε υποδιάστημα του $[0, 2\pi]$. Παίρνοντας διαστήματα της μορφής $[0, 1/k]$, βρίσκουμε ακολουθία (θ_k) στο $[0, 2\pi]$ με $\theta_k \to 0$ και $g(\theta_k) = \ln(1/\theta_k) \to +\infty$. Αυτό είναι άτοπο, γιατί η g, ως ολοκληρώσιμη συνάρτηση, πρέπει να είναι φραγμένη.

4. *Θεωρούμε την ακολουθία* $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ *με*

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{αν } k \geq 1 \\ 0, & \text{αν } k \leq 0 \end{cases}$$

Δείξτε ότι $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ *αλλά δεν υπάρχει* $f \in \mathcal{R}$ *με την ιδιότητα* $\widehat{f}(k) = a_k$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Η ακολουθία $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ ανήκει στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ διότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $f \in \mathcal{R}$ με την ιδιότητα $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε, $|k\widehat{f}(k)| = 0$ αν $k \leq 0$ και $|k\widehat{f}(k)| = 1$ αν $k \geq 1$. Δηλαδή, η ακολουθία $\{k\widehat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Από την Πρόταση 3.4.3, τα μερικά αθροίσματα $s_n(f)$ της f είναι ομοιόμορφα φραγμένα. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|s_n(f)(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in \mathbb{T}$. Όμως,

$$s_n(f)(0) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty$$

όταν $n \to \infty$. Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο.

5. *Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \qquad \textit{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Χρησιμοποιώντας την 2π-περιοδική περιττή συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x(\pi - x)$ στο $[0, \pi]$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} e^{ikx}.$$

Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\frac{\pi^2}{4} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k+1)^4} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Όμως,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^4}=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{16}{15}\frac{\pi^4}{96}=\frac{\pi^4}{90}.$$

(β) Αφού η f είναι περιττή, έχουμε $\widehat{f}(0)=0$. Για $k\neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx=\frac{-i}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin(kx)\,dx\\
&= \frac{-i}{\pi}\left[-\frac{\pi x\cos(kx)}{k}+\frac{\pi\sin(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}+\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin(kx)\,dx\\
&= i\frac{(-1)^k\pi}{k}-\frac{i}{\pi}\left[\frac{x^2\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi}+\frac{2i}{\pi k}\int_0^{\pi}x\cos(kx)\,dx\\
&= i\frac{(-1)^k\pi}{k}-i\frac{(-1)^k\pi}{k}+\frac{2i}{\pi k}\left[\frac{x\sin(kx)}{k}+\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}\\
&= \frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\sum_{k\neq 0}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{ikx}.$$

Από την ταυτότητα του Parseval,

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2k+1)^6}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2x^2dx=\frac{\pi^4}{30}.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}=\frac{\pi^6}{960}.$$

Όμως,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^6}=\frac{\pi^6}{960}+\frac{1}{64}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{64}{63}\frac{\pi^6}{960}=\frac{\pi^6}{945}.$$

6. *Δείξτε ότι: αν $\alpha \notin \mathbb{Z}$, τότε η σειρά Fourier της συνάρτησης*

$$f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{i(\pi - x)\alpha}$$

στο $[0, 2\pi]$, είναι η

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k+\alpha}.$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Parseval, συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}.$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{i\pi\alpha} e^{-ix(\alpha+k)}dx \\
&= \frac{e^{i\pi\alpha}}{2\sin \pi\alpha} \left[\frac{-e^{-ix(\alpha+k)}}{i(k+\alpha)} \right]_0^{2\pi} = \frac{e^{i\pi\alpha}}{2\sin \pi\alpha} \frac{1-e^{-2\pi i\alpha}}{i(k+\alpha)} \\
&= \frac{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}{2i(k+\alpha)\sin \pi\alpha} = \frac{2i\sin \pi\alpha}{2i(k+\alpha)\sin \pi\alpha} \\
&= \frac{1}{k+\alpha}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k+\alpha}.$$

Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)},$$

αφού $|f(x)| = \frac{\pi}{|\sin(\pi\alpha)|}$ για κάθε x.

Ομάδα Β′

7. *Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $\{f_n\}$ ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx = 0,$$

αλλά για κάθε $x \in [0,2\pi]$ η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει.

Υπόδειξη. Θεωρούμε μια ακολουθία $\{I_n\}$ υποδιαστημάτων του $[0,2\pi]$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Για κάθε $x \in [0,2\pi]$, τα σύνολα $A_x = \{n \in \mathbb{N} : x \in I_n\}$ και $B_x = \{n \in \mathbb{N} : x \notin I_n\}$ είναι άπειρα.

(ii) $\ell(I_n) \to 0$, όπου $\ell(I)$ είναι το μήκος ενός διαστήματος I.

Ένας τρόπος να ορίσουμε μια τέτοια ακολουθία είναι ο εξής: παίρνουμε $I_1 = [0,2\pi]$, στη συνέχεια χωρίζουμε το $[0,2\pi]$ σε δύο διαδοχικά διαστήματα I_2 και I_3 μήκους π, στη συνέχεια χωρίζουμε το $[0,2\pi]$ σε τέσσερα διαδοχικά διαστήματα $I_4,\dots,I_7$ μήκους $\pi/2$ και ούτω καθεξής.

Ορίζουμε $f_n = \chi_{I_n}$, $n = 1,2,\dots$. Παρατηρήστε ότι κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\ell(I_n)}{2\pi} = 0.$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $x \in [0,2\pi]$ έχουμε ότι τα A_x και B_x είναι άπειρα υποσύνολα του $\mathbb{N}$, άρα μπορούμε να βρούμε γνησίως αύξουσες ακολουθίες φυσικών (k_n) και (λ_n) στα A_x και B_x αντίστοιχα. Τότε,

$$f_{k_n}(x) = \chi_{I_{k_n}}(x) = 1 \to 1 \ \text{ και } \ f_{\lambda_n}(x) = \chi_{I_{\lambda_n}}(x) = 0 \to 0,$$

δηλαδή η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει.

8. *Δείξτε ότι η τριγωνομετρική σειρά*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}$$

συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αλλά δεν είναι η σειρά Fourier κάποιας Riemann ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

Υπόδειξη. Έστω $x \in [0,2\pi]$. Αν $x \neq 0, 2\pi$, έχουμε δει ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

δηλαδή,

$$\left|\sum_{k=2}^{n} \sin(kx)\right| \leq |\sin x| + \frac{1}{|\sin(x/2)|}.$$

Άρα, η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \sin(kx)$ έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα. Το ίδιο ισχύει αν $x = 0$ ή $x = 2\pi$, διότι, σε αυτήν την περίπτωση, έχουμε $\sin(kx) = 0$ για κάθε $k \geq 2$. Αφού η ακολουθία

$\left(\frac{1}{\ln k}\right)_{k\geq 2}$ είναι φθίνουσα και μηδενική, από το κριτήριο του Dirichlet συμπεραίνουμε ότι η τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}$$

συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι υπάρχει $f \in \mathcal{R}$ ώστε $S[f](x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{\ln k}$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε, $\widehat{f}(k) = -\frac{ib_k(f)}{2} = -\frac{i}{2\ln k}$ αν $k \geq 2$, $\widehat{f}(k) = -\frac{ib_k(f)}{2} = \frac{i}{2\ln(-k)}$ αν $k \geq 2$ και $\widehat{f}(k) = 0$ αλλιώς. Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4\ln^2 k}.$$

Αυτό είναι άτοπο, διότι $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 k} = +\infty$.

9. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως.*

Υπόδειξη. Η f' είναι ολοκληρώσιμη. Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f'}(k)|^2 = \|f'\|^2 < +\infty.$$

Γνωρίζουμε ότι $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k)$, συνεπώς

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2|\widehat{f}(k)|^2 < +\infty.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{k\neq 0}(k|\widehat{f}(k)|)\frac{1}{k}\right)^2 \leq \left(\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\right)\left(\sum_{k\neq 0}k^2|\widehat{f}(k)|^2\right) < +\infty.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = |\widehat{f}(0)| + \sum_{k\neq 0}|\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

10. (α) *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $k \neq 0$. Δείξτε ότι*

$$\widehat{f}(k) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi/k)e^{-ikx}dx,$$

και συμπεράνατε ότι

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - f(x+\pi/k)]e^{-ikx}dx.$$

(β) *Υποθέτουμε ότι η* f *ικανοποιεί την συνθήκη Hölder* $|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^{\alpha}$ *για κάποιον* $0 < \alpha \leq 1$, *κάποια σταθερά* $C > 0$ *και για κάθε* x, h. *Χρησιμοποιώντας το (α) δείξτε ότι υπάρχει* $M > 0$ *ώστε*

$$|k|^{\alpha}|\widehat{f}(k)| \leq M$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(γ) *Δείξτε ότι, αν* $0 < \alpha < 1$, *τότε η συνάρτηση*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha}e^{i2^k x}$$

ικανοποιεί την συνθήκη Hölder του (β), και

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{k^{\alpha}} \quad \text{αν } \; k = 2^s, s \in \mathbb{N}.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι, με την αντικατάσταση $y = x + \frac{\pi}{k}$,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f\big(x+\frac{\pi}{k}\big)e^{-ikx}dx &= \int_{-\pi+\frac{\pi}{k}}^{\pi+\frac{\pi}{k}} f(y)e^{-ik\left(y-\frac{\pi}{k}\right)}dy = \int_{-\pi+\frac{\pi}{k}}^{\pi+\frac{\pi}{k}} f(y)e^{-iky}e^{i\pi}dy\\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}dy = -2\pi\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

Άρα,

$$\widehat{f}(k) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi/k)e^{-ikx}dx,$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{\widehat{f}(k)+\widehat{f}(k)}{2} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx - \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi/k)e^{-ikx}dx\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - f(x+\pi/k)]e^{-ikx}dx.\end{aligned}$$

(β) Έστω $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Χρησιμοποιώντας το (α) και την συνθήκη Hölder γράφουμε

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(k)| &\leq \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - f(x+\pi/k)|\,dx \leq \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C\left|\frac{\pi}{k}\right|^{\alpha}dx\\ &= \frac{C\pi^{\alpha}}{2|k|^{\alpha}} = \frac{M}{|k|^{\alpha}},\end{aligned}$$

όπου $M = C\pi^\alpha/2$. Έπεται ότι $|k|^\alpha|\widehat{f}(k)| \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
(γ) Γράφουμε

$$|f(x+h) - f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{i2^k x}(e^{i2^k h} - 1)\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha}|1 - e^{i2^k h}|.$$

Παρατηρούμε ότι

$$|1 - e^{i\theta}| = \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \sqrt{4\sin^2(\theta/2)} = 2|\sin(\theta/2)| \leq |\theta|.$$

Επίσης, $|1 - e^{i\theta}| \leq 1 + |e^{i\theta}| = 2$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha}|1 - e^{i2^k h}| &= \sum_{2^k|h|>1} 2^{-k\alpha}|1 - e^{i2^k h}| + \sum_{2^k|h|\leq 1} 2^{-k\alpha}|1 - e^{i2^k h}| \\ &\leq 2\sum_{2^k|h|>1} 2^{-k\alpha} + \sum_{2^k|h|\leq 1} 2^k|h|2^{-k\alpha}.\end{aligned}$$

Αν k_0 είναι ο μικρότερος φυσικός για τον οποίον $2^k|h| > 1$, τότε

$$2\sum_{2^k|h|>1} 2^{-k\alpha} = 2\sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k\alpha} = 2 \cdot 2^{-k_0\alpha}\frac{1}{1-2^{-\alpha}} \leq \frac{2}{1-2^{-\alpha}}|h|^\alpha.$$

Για το δεύτερο άθροισμα έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{2^k|h|\leq 1} 2^k|h|2^{-k\alpha} &= \sum_{k=0}^{k_0-1} 2^k|h|2^{-k\alpha} = |h|\sum_{k=0}^{k_0-1} 2^{(1-\alpha)k} \\ &= |h|\frac{2^{(1-\alpha)k_0} - 1}{2^{1-\alpha} - 1} \leq \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1}|h|2^{(1-\alpha)(k_0-1)} \leq \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1}|h| \cdot |h|^{-(1-\alpha)} \\ &= \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1}|h|^\alpha.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε

$$|f(x+h) - f(x)| \leq c(\alpha)|h|^\alpha,$$

όπου $c(\alpha) > 0$ σταθερά που εξαρτάται μόνο από το α. Δηλαδή, η f ικανοποιεί συνθήκη Hölder τάξης α. Από τον ορισμό της f είναι φανερό ότι, αν $k = 2^s$ για κάποιον $s \in \mathbb{N}$, τότε

$$\widehat{f}(k) = 2^{-s\alpha} = \frac{1}{k^\alpha}.$$

Ομάδα Γ′

11. (α) *Έστω* $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις με* $\int_0^{2\pi} g(t)dt = 0$. *Δείξτε ότι*

$$\left|\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,dt\right|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 dt.$$

(β) *Έστω* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με* $f(a) = f(b) = 0$. *Δείξτε ότι*

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$

Υπόδειξη. (α) Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\left|\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,dt\right|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt.$$

Αφού $\int_0^{2\pi} g(t)dt = 0$, από την Άσκηση 1.9 έχουμε

$$\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 dt,$$

και έπεται το ζητούμενο.

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι $[a,b] = [0,\pi]$. Αφού $f(0) = f(\pi) = 0$, μπορούμε να επεκτείνουμε την f σε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση με $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$, θέτοντας $f(x) = -f(-x)$ για $x \in [-\pi, 0]$. Η επέκταση της f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $(k\pi, k\pi + \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Εφαρμόζοντας το (α) με $g = f$, παίρνουμε

$$\left|\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt\right|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι η f είναι περιττή, συμπεραίνουμε ότι

$$(*) \qquad \int_0^{\pi} |f(t)|^2\,dt \leq \int_0^{\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

Αν το $[a,b]$ είναι τυχόν, θεωρούμε την $F : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ με $F(x) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi}x\right)$. Τότε, η $(*)$ ισχύει για την F, δηλαδή

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \left|f\left(a + \frac{b-a}{\pi}x\right)\right|^2 dx &= \int_0^{\pi} |F(x)|^2\,dx \leq \int_0^{\pi} |F'(x)|^2 dx \\
&= \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \left|f'\left(a + \frac{b-a}{\pi}x\right)\right|^2 dx.
\end{aligned}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = a + \frac{b-a}{\pi} x$, παίρνουμε

$$\int_a^b |f(t)|^2\, dt \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$

12. *Δείξτε ότι*

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι το ολοκλήρωμα του n-οστού πυρήνα του Dirichlet στο $[-\pi, \pi]$ είναι ίσο με 2π. Δηλαδή,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\, dt = 2\pi.$$

Γράφουμε

$$2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t/2}\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\, dt,$$

όπου $g(t) = \frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{1}{t/2}$. Παρατηρούμε ότι η g μπορεί να οριστεί στο 0 ώστε να γίνει συνεχής συνάρτηση στο $[-\pi, \pi]$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς,

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(t/2)\sin(nt)\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(t/2)\cos(nt)\, dt \to 0$$

όταν $n \to \infty$, από το Λήμμα Riemann–Lebesgue για τις συνεχείς συναρτήσεις $g(t)\cos(t/2)$ και $g(t)\sin(t/2)$. Έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} 2\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t/2}\, dt = 2\pi.$$

Όμως,

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t/2}\, dt = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{2\sin x}{x}\, dx.$$

Έπεται ότι

$$\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \to \frac{\pi}{2}$$

όταν $n \to \infty$. Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι υπάρχει το

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.

13. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Lipshitz*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$ σταθερά.
(α) *Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $g_t(x) = f(x+t) - f(x-t)$. Δείξτε ότι*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2$$

και συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leq K^2 t^2.$$

(β) *Έστω $p \in \mathbb{N}$. Επιλέγοντας $t = \pi/2^{p+1}$, δείξτε ότι*

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) *Δώστε άνω φράγμα για το*

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\widehat{f}(k)|$$

και συμπεράνατε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

Υπόδειξη. (α) Από την ταυτότητα του Parseval έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{g_t}(k)|^2.$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier της g_t: είναι

$$\widehat{g_t}(k) = f\widehat{(x+t)}(k) - f\widehat{(x-t)}(k) = e^{ikt}\widehat{f}(k) - e^{-ikt}\widehat{f}(k) = (2i\sin kt)\widehat{f}(k).$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2.$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη Lipschitz παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2 &= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x-t)|^2 dx \leq \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} K^2(2t)^2 dx \\ &= K^2t^2.\end{aligned}$$

(β) Εφαρμόζοντας το (α) για $t = \pi/2^{p+1}$ έχουμε

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\sin(k\pi/2^{p+1})|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin(k\pi/2^{p+1})|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+2}}.$$

Όμως, αν $2^{p-1} < |k| \leq 2^p$ έχουμε $\frac{\pi}{4} \leq \left|\frac{k\pi}{2^{p+1}}\right| \leq \frac{\pi}{2}$. Άρα, $|\sin(k\pi/2^{p+1})| \geq \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ γι' αυτές τις τιμές του k. Επιστρέφοντας στην προηγούμενη ανισότητα, παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+2}},$$

δηλαδή

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$. Χρησιμοποιώντας το (β) και την ανισότητα Cauchy–Schwarz, έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{|k|>1} |\widehat{f}(k)| &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\widehat{f}(k)| \leq \sum_{p=1}^{\infty} 2^{p/2} \left(\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{p=1}^{\infty} 2^{p/2} \frac{K\pi}{\sqrt{2}2^p} = \frac{K\pi}{\sqrt{2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^p} < +\infty.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = \sum_{k=-1}^{1} |\widehat{f}(k)| + \sum_{|k|>1} |\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

Ομάδα Δ΄

14. *Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε*

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{M}{|k|}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιούμε την παρατήρηση ότι η f προσεγγίζεται από συναρτήσεις της μορφής

$$(*) \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{N} t_k \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x),$$

όπου $-\pi = b_1 < b_2 < \cdots < b_{N+1} = \pi$ και $-\|f\|_\infty \leq t_1 \leq \cdots \leq t_N \leq \|f\|_\infty$. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, χωρίστε το $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ σε m διαδοχικά διαστήματα $I_1, \ldots, I_m$ του ιδίου μήκους, και θεωρήστε τα $J_r = f^{-1}(I_r)$, $r = 1, \ldots, m$. Επειδή η f είναι αύξουσα, κάθε J_r είναι διάστημα ή μονοσύνολο ή το κενό σύνολο (εξηγήστε γιατί). Προκύπτει έτσι μια διαμέριση $-\pi = b_1 < b_2 < \cdots < b_{N+1} = \pi$ του $[-\pi, \pi]$, όπου $[b_s, b_{s+1}]$ είναι εκείνα τα J_r που είναι διαστήματα. Αν ορίσουμε $t_s = \inf\{f(x) : b_s \leq x \leq b_{s+1}\}$, τότε $|f(x) - t_s| \leq \frac{1}{m}$ στο (b_s, b_{s+1}). Επίσης, $-\|f\|_\infty \leq t_1 \leq \cdots \leq t_N \leq \|f\|_\infty$, διότι η f είναι αύξουσα. Αν ορίσουμε $g_m(x) = \sum_{s=1}^N t_s \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x)$, τότε

$$(**) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g_m(x)|\, dx \leq \frac{1}{m}.$$

Αν δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε για κάθε συνάρτηση g της μορφής $(*)$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ να ισχύει $|k\widehat{g}(k)| \leq M$, τότε από την $(**)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} |k\widehat{f}(k)| &\leq |k\widehat{g_m}(k)| + |k||\widehat{f}(k) - \widehat{g_m}(k)| \\ &\leq M + |k|\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g_m(x)|\, dx \leq M + |k|\frac{1}{m} \end{aligned}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$, και αφήνοντας το $m \to \infty$, βλέπουμε ότι $|k\widehat{f}(k)| \leq M$.

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier συναρτήσεων της μορφής $h := \chi_{[b_s, b_{s+1}]}$: αν $k \neq 0$, έχουμε

$$\widehat{h}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{b_s}^{b_{s+1}} e^{-ikx} dx = \frac{e^{-ikb_s} - e^{-ikb_{s+1}}}{2\pi ik}.$$

Έπεται ότι, για την $g(x) = \sum_{s=1}^N t_s \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x)$,

$$2\pi ik\widehat{g}(k) = \sum_{s=1}^N t_s (e^{-ikb_s} - e^{-ikb_{s+1}}) = t_1 e^{-ib_1 x} - t_N e^{-ib_{N+1} x} + \sum_{s=2}^N e^{-ikb_s}(t_s - t_{s-1}).$$

Συνεπώς,

$$|k\widehat{g}(k)| \leq |t_1| + |t_N| + \sum_{k=2}^N (t_s - t_{s-1}) = |t_1| + |t_N| + (t_N - t_1) \leq 4\|f\|_\infty,$$

διότι $t_N - t_1 \leq \|f\|_\infty - (-\|f\|_\infty) = 2\|f\|_\infty$. Έπεται το ζητούμενο, με $M = 2\|f\|_\infty / \pi$.

15. *Έστω $\{\varepsilon_k\}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\varepsilon_k \to 0$. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με την ιδιότητα: για άπειρες τιμές του $k \in \mathbb{Z}$,*

$$|\widehat{f}(k)| \geq \varepsilon_k.$$

Υπόδειξη. Αφού $\varepsilon_k \to 0$, μπορούμε να βρούμε υπακολουθία (ε_{s_k}) της (ε_k) ώστε
$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{s_k} < +\infty.$$
Θεωρούμε την σειρά
$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{s_k} e^{is_k x}.$$
Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Weierstrass ελέγχουμε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση. Αν $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{s_k} e^{is_k x}$, τότε
$$|\widehat{f}(s_k)| = \widehat{f}(s_k) = \varepsilon_{s_k}$$
για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, για άπειρες τιμές του $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε $|\widehat{f}(k)| \geq \varepsilon_k$.

16. *Ο* **συζυγής πυρήνας του Dirichlet** *ορίζεται από την*
$$\tilde{D}_n(x) = \sum_{|k|\leq n} \mathrm{sign}(k) e^{ikx},$$
όπου $\mathrm{sign}(t)$ *είναι το πρόσημο του* t.
(α) *Δείξτε ότι*
$$\tilde{D}_n(x) = i\frac{\cos(x/2) - \cos((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}$$
και
$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{D}_n(x)|\, dx \leq c \log n.$$
(β) *Δείξτε ότι: αν η* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *είναι ολοκληρώσιμη, τότε*
$$|(f * \tilde{D}_n)(0)| \leq C \log n.$$
(γ) *Δείξτε ότι, για κάθε* $0 < \alpha < 1$, *η τριγωνομετρική σειρά*
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^{\alpha}}$$
συγκλίνει για κάθε x, *αλλά δεν είναι σειρά Fourier κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.*

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $x \in (0, 2\pi)$ μπορούμε να γράψουμε:
$$\begin{aligned}
\tilde{D}_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} - e^{-ikx} = 2i \sum_{k=1}^{n} \sin kx \\
&= \frac{i}{\sin(x/2)} \sum_{k=1}^{n} \big[\cos(k-1/2)x - \cos(k+1/2)x\big] \\
&= i\frac{\cos(x/2) - \cos((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}.
\end{aligned}$$

Για κάθε x γράφουμε

$$\tilde{D}_n(x) = i\frac{\cos(x/2) - 1}{\sin(x/2)} + i\frac{1 - \cos(n + 1/2)x}{\sin(x/2)}.$$

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $x \mapsto \frac{\cos(x/2)-1}{\sin(x/2)}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$ και το ίδιο ισχύει για την $x \mapsto \frac{1-\cos[(n+1/2)x]}{\sin(x/2)} = 2\frac{\sin^2[(n+1/2)x/2]}{\sin(x/2)}$. Επομένως, είναι

$$\begin{aligned} \|\tilde{D}_n\|_1 &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1 - \cos x}{\sin(x/2)} \right| dx + 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin((n + 1/2)x/2)|}{|\sin(x/2)|} dx \\ &\leq c_1 + 4\int_0^{\pi} \frac{|\sin((n + 1/2)x/2)|}{\sin(x/2)} dx \\ &\leq c_1 + 8\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin((n + 1/2)x)|}{\sin x} dx. \end{aligned}$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα μπορούμε να δείξουμε όπως στον πυρήνα του Dirichlet ότι φράσσεται από $c_2 \log n$ και το ζητούμενο έπεται.

(β) Έπεται άμεσα από το (α) αν γράψουμε:

$$|(f * \tilde{D}_n)(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(0 - t)||\tilde{D}_n(t)|\, dt \leq \|f\|_\infty \|\tilde{D}_n\|_1.$$

(γ) Η σύγκλιση της σειράς έπεται από το κριτήριο του Dirichlet. Αν ήταν σειρά Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης θα είχαμε από το (β) ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = O(\log n),$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\, dx \geq \frac{1}{1 - a} n^{1-a}.$$

17. *Έστω $\alpha > 1/2$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Hölder*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$ σταθερά. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

Υπόδειξη. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτήν της Άσκησης 13. Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $g_t(x) = f(x+t) - f(x-t)$ και, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2.$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη Hölder παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2 &= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x-t)|^2 dx \leq \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} K^2 (2t)^{2\alpha} dx \\ &= K^2 t^{2\alpha}.\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $t = \pi/2^{p+1}$, έχουμε

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\sin(k\pi/2^{p+1})|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin(k\pi/2^{p+1})|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}}.$$

Όμως, αν $2^{p-1} < |k| \leq 2^p$ έχουμε $\frac{\pi}{4} \leq \left|\frac{k\pi}{2^{p+1}}\right| \leq \frac{\pi}{2}$. Άρα, $|\sin(k\pi/2^{p+1})| \geq \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ γι' αυτές τις τιμές του k. Επιστρέφοντας στην προηγούμενη ανισότητα, παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}},$$

δηλαδή

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{2K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy–Schwarz, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{|k|>1} |\widehat{f}(k)| &= \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\widehat{f}(k)| \leq \sum_{p=1}^{\infty} 2^{p/2}\left(\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{p=1}^{\infty} 2^{p/2}\frac{\sqrt{2}K\pi^{\alpha}}{2^{\alpha p+\alpha}} = \frac{\sqrt{2}K\pi^{\alpha}}{2^{\alpha}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)p}} < +\infty,\end{aligned}$$

διότι $\alpha - \frac{1}{2} > 0$. Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = \sum_{k=-1}^{1} |\widehat{f}(k)| + \sum_{|k|>1} |\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

Κεφάλαιο 10

Ολοκλήρωμα Lebesgue

10.1 Μέτρο Lebesgue

Ομάδα Α΄

1. (α) *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A+t)$$

(το εξωτερικό μέτρο είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές).

(β) *Αν επιπλέον το A είναι μετρήσιμο, τότε το $A+t$ είναι μετρήσιμο.*

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι αν $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα, τότε η $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $J_n = t + I_n$, είναι κάλυψη του $A+t$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n),$$

διότι $\ell(t+I) = \ell(I)$ για κάθε διάστημα. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \mu^*(A+t) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : A+t \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right\} \leq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(t+I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \\ &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} = \mu^*(A). \end{aligned}$$

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, παρατηρήστε ότι αν $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια κάλυψη του $A+t$ από ανοικτά διαστήματα, τότε η $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $I_n = -t + J_n$, είναι κάλυψη του A.

(β) Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \mu^*(X) &= \mu^*(X-t) = \mu^*((X-t)\cap A) + \mu^*((X-t)\setminus A) \\ &= \mu^*(-t + (X\cap (A+t))) + \mu^*(-t + (X\setminus (A+t))) \\ &= \mu^*(X\cap (A+t)) + \mu^*(X\setminus (A+t)). \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το αναλλοίωτο του εξωτερικού μέτρου ως προς μεταφορές (το οποίο αποδείχτηκε στο (α)) και, για την δεύτερη ισότητα, το γεγονός ότι το A είναι μετρήσιμο.

2. (α) *Έστω A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\mu^*(A) < +\infty$.*
(β) *Έστω ότι το $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο. Δείξτε ότι $\mu^*(A) > 0$.*

Υπόδειξη. (α) Αφού το A είναι φραγμένο, υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $A \subseteq (-\alpha, \alpha)$. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου,

$$\mu^*(A) \leq \ell((-\alpha,\alpha)) = 2\alpha < +\infty.$$

(β) Έστω x_0 εσωτερικό σημείο του A. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq A$. Από την μονοτονία του εξωτερικού μέτρου,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*((x_0-\delta, x_0+\delta)) = \ell((x_0-\delta, x_0+\delta)) = 2\delta > 0.$$

3. (α) *Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\mu^*(B) = 0$, δείξτε ότι $\mu^*(A\cup B) = \mu^*(A)$.*
(β) *Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\mu^*(A \triangle B) = 0$, δείξτε ότι $\mu^*(A) = \mu^*(B)$ (με $A \triangle B$ συμβολίζουμε τη συμμετρική διαφορά $(A\setminus B)\cup (B\setminus A)$ των A και B).*

Υπόδειξη. (α) Αφού $A \subseteq A\cup B$, έχουμε $\mu^*(A) \leq \mu^*(A\cup B)$. Από την υπόθεση και από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου προκύπτει η αντίστροφη ανισότητα:

$$\mu^*(A\cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A),$$

διότι $\mu^*(B) = 0$.
(β) Παρατηρήστε ότι $\mu^*(A\setminus B) \leq \mu^* A\triangle B) = 0$. Συνεπώς, $\mu^*(A\setminus B) = 0$. μοια, $\mu^*(B\setminus A) = 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\leq \mu^*(A\cup B) = \mu^*(B\cup (A\setminus B)) \\ &\leq \mu^*(B) + \mu^*(A\setminus B) = \mu^*(B). \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$.

4. (α) *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με tA το σύνολο $tA = \{tx \mid x \in A\}$. Δείξτε ότι $\mu^*(tA) = |t|\, \mu^*(A)$.*

(β) *Έστω $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$ για κάθε $x, y \in B$. Δείξτε ότι*

$$\mu^*(f(A)) \leq C\mu^*(A)$$

για κάθε $A \subseteq B$.

(γ) *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu(A) = 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $A' = \{x^2 \mid x \in A\}$ έχει επίσης μέτρο $\mu(A') = 0$.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $t \neq 0$ (η περίπτωση $t = 0$ δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον). Παρατηρήστε ότι αν $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα, τότε η $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $J_n = tI_n$, είναι κάλυψη του tA και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) = |t| \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n),$$

διότι $\ell(tI) = |t|\ell(I)$ για κάθε διάστημα (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \mu^*(tA) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : tA \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right\} \leq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(tI_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \\ &= \inf\left\{|t| \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} = |t|\,\mu^*(A). \end{aligned}$$

(β) Έστω $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \cap I_n \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $x, y \in A \cap I_n$, τότε

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y| \leq C\,\ell(I_n).$$

Συνεπώς, $\mathrm{diam}(f(A \cap I_n)) \leq C\,\ell(I_n)$. Έπεται ότι το σύνολο $f(A \cap I_n)$ περιέχεται σε διάστημα J_n μήκους $\ell(J_n) \leq C\,\ell(I_n)$. Η $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $J_n = t + I_n$, είναι κάλυψη του $f(A)$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \mu^*(f(A)) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : f(A) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right\} \leq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} C\,\ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \\ &= C\,\mu^*(A). \end{aligned}$$

(γ) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = A \cap [-n, n]$. Παρατηρήστε ότι $\mu(A_n) = 0$ και ότι η $f(x) = x^2$ είναι $2n$-Lipschitz στο A_n. Από το (β) συμπεραίνουμε ότι

$$\mu^*(f(A_n)) \leq 2n\mu(A_n) = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\mu^*(f(A)) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(f(A_n)) = 0,$$

δηλαδή, $\mu(f(A)) = 0$.

5. *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $0 < \mu^*(E) < +\infty$ και έστω $0 < \alpha < 1$. Δείξτε ότι υπάρχει ανοιχτό διάστημα I με την ιδιότητα*

$$\mu^*(E \cap I) > \alpha\, \ell(I).$$

Υπόδειξη. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{I_n\}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1+\varepsilon)\mu^*(A).$$

Από την υποπροσθετικότητα του μ^* παίρνουμε

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap I_n).$$

Από τις παραπάνω ανισότητες έπεται ότι, για κάποιον $m \in \mathbb{N}$,

$$\mu^*(A \cap I_m) \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\, \ell(I_m).$$

Παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{\alpha} - 1 > 0$ έχουμε το ζητούμενο.

Σημείωση. Το συμπέρασμα ισχύει και στην περίπτωση που $\mu^*(E) = \infty$. Παρατηρήστε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε το $E_M := E \cap [-M, M]$ να ικανοποιεί την $0 < \mu^*(E_M) < \infty$. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της Άσκησης 5 για το E_M, βρίσκουμε ανοιχτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\mu^*(E \cap I) \geq \mu^*(E_M \cap I) > \alpha\, \ell(I).$$

6. *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και $\delta > 0$ ώστε $\mu(A \cap I) \geq \delta\, \ell(I)$ για κάθε ανοιχτό διάστημα. Δείξτε ότι $\mu(A^c) = 0$.*

Υπόδειξη. Αφού $\mu(A \cap I) \leq \ell(I)$ για κάθε ανοικτό διάστημα I, συμπεραίνουμε ότι $0 < \delta \leq 1$. Αν πάλι $\delta = 1$, έχουμε $\mu(A \cap (-n, n)) = 2n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\mu(A^c \cap (-n, n)) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\mu(A^c) = 0$ (εξηγήστε τα βήματα).

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $0 < \delta < 1$. Έστω ότι $\mu(A^c) > 0$. Από την Άσκηση 5, υπάρχει ανοιχτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\mu(A^c \cap I) > (1-\delta)\, \ell(I).$$

Τότε,

$$\mu(A \cap I) = \mu(I) - \mu(A^c \cap I) < \ell(I) - (1-\delta)\,\ell(I) = \delta\,\ell(I),$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

7. *Έστω* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *με*

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{|x-y| : x \in A, y \in B\} > 0.$$

Δείξτε ότι

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Υπόδειξη. Η ανισότητα $\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$ ισχύει πάντα, από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου.

Για την αντίστροφη ανισότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu^*(A \cup B) < \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια κάλυψη του $A \cup B$ από ανοικτά διαστήματα. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος ανοικτά διαστήματα $J_{n,1}, \ldots, J_{n,k_n}$ με μήκος μικρότερο από $\delta/2$, όπου $\delta = \mathrm{dist}(A,B)$, ώστε $I_n \subseteq J_{n,1} \cup \cdots \cup J_{n,k_n}$ και $\ell(I_n) < \sum_{s=1}^{k_n} \ell(J_{n,s}) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ (αν $I_n = (a_n, b_n)$, θεωρήστε το κλειστό διάστημα $\left[a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, b_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right]$ και χωρίστε το σε k_n διαδοχικά διαστήματα μήκους μικρότερου από $\delta/2$). Τότε, η $\{J_{n,s} : n \in \mathbb{N}, 1 \leq s \leq k_n\}$ είναι κάλυψη του $A \cup B$ από ανοικτά διαστήματα μήκους μικρότερου από $\delta/2$, και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{k_n} \ell(J_{n,s}) < \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \varepsilon.$$

Αν $\{U_s\}_{s=1}^{\infty}$ είναι η οικογένεια των $J_{n,s}$ για τα οποία $A \cap J_{n,s} \neq \emptyset$ και $\{V_s\}_{s=1}^{\infty}$ είναι η οικογένεια των $J_{n,s}$ για τα οποία $B \cap J_{n,s} \neq \emptyset$, τότε $A \subseteq \bigcup_{s=1}^{\infty} U_s$, $B \subseteq \bigcup_{s=1}^{\infty} V_s$ και $U_s \cap V_m = \emptyset$ για κάθε s, m: για τον τελευταίο ισχυρισμό παρατηρήστε ότι αν $y \in U_s \cap V_m$ τότε υπάρχουν $a \in A \cap U_s$ και $b \in B \cap V_m$ ώστε $|y-a| < \ell(U_s) < \delta/2$ και $|y-b| < \ell(V_m) < \delta/2$, οπότε $\mathrm{dist}(A,B) \leq |a-b| \leq |a-y| + |y-b| < \delta$, το οποίο είναι άτοπο. Με άλλα λόγια, καθένα από τα ανοικτά διαστήματα $J_{n,s}$ ανήκει σε μία το πολύ από τις $\{U_s\}_{s=1}^{\infty}$ και $\{V_s\}_{s=1}^{\infty}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) + \mu^*(B) &\leq \sum_{s=1}^{\infty} \ell(U_s) + \sum_{s=1}^{\infty} \ell(V_s) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{k_n} \ell(J_{n,s}) \\
&< \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Παίρνοντας infimum ως προς όλες τις καλύψεις $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ του $A \cup B$, συμπεραίνουμε ότι

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) \leq \mu^*(A \cup B) + \varepsilon,$$

και, αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε ότι $\mu^*(A) + \mu^*(B) \leq \mu^*(A \cup B)$.

8. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο με $0 < \mu(A) < +\infty$.*
(α) *Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \mu(A \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.*
(β) *Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο F με $F \subseteq A$ και $\mu(F) = \mu(A)/2$.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Παρατηρήστε ότι

$$A \cap (-\infty, y] \subseteq (A \cap (-\infty, x]) \cup [x, y],$$

άρα

$$f(y) = \mu(A \cap (-\infty, y]) \leq \mu(A \cap (-\infty, x]) + \mu([x, y]) = f(x) + (y - x).$$

Έπεται ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

(εξηγήστε γιατί), δηλαδή η f είναι 1-Lipschitz.
(β) Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap (-\infty, n]) = \mu(A)$$

και

$$\lim_{n\to\infty} f(-n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap (-\infty, -n]) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ακολουθία $A \cap (-\infty, n]$ αυξάνει στο A και η ακολουθία $A \cap (-\infty, -n]$ φθίνει στο κενό σύνολο (και $\mu(A \cap (-\infty, -1]) \leq \mu(A) < \infty$). Αφού η f είναι συνεχής και

$$0 = \lim_{n\to\infty} f(-n) < \frac{\mu(A)}{2} < \lim_{n\to\infty} f(n) = \mu(A),$$

υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x) = \mu(A \cap (-\infty, x]) = \frac{\mu(A)}{2}.$$

Θέτοντας $F = A \cap (-\infty, x]$, παίρνουμε το ζητούμενο.

9. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το A είναι μετρήσιμο.*

(ii) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό $F \subseteq \mathbb{R}$ με $F \subseteq A$ και $\mu^*(A \setminus F) < \varepsilon$.*

(iii) *Υπάρχει F_σ-σύνολο Γ ώστε $\Gamma \subseteq A$ και $\mu^*\big(A \setminus \Gamma\big) = 0$.*

Υπόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii). Έστω $\varepsilon > 0$. Το A είναι μετρήσιμο, άρα το A^c είναι μετρήσιμο. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο G ώστε $A^c \subseteq G$ και $\mu^*(G \setminus A^c) = \mu(G \setminus A^c) < \varepsilon$. Θέτουμε $F = G^c$. Τότε, το F είναι κλειστό, $F \subseteq A$, και $A \setminus F = G \setminus A^c$. Συνεπώς,

$$\mu^*(A \setminus F) = \mu^*(G \setminus A^c) < \varepsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Υποθέτοντας το (ii), για κάθε $k \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε κλειστό $F_k \subseteq \mathbb{R}$ με $F_k \subseteq A$ και $\mu^*(A \setminus F_k) < 1/k$. Ορίζουμε $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. Το Γ είναι F_σ-σύνολο και $\Gamma \subseteq A$. Παρατηρούμε ότι

$$\mu^*(A \setminus \Gamma) \leq \mu^*(A \setminus F_k) < \frac{1}{k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$\mu^*(A \setminus \Gamma) = 0.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το (iii).
(iii) $\Rightarrow$ (i). Υποθέτουμε ότι υπάρχει F_σ-σύνολο Γ ώστε $\Gamma \subseteq A$ και $\mu^*\big(A \setminus \Gamma\big) = 0$. Το $A \setminus \Gamma$ είναι μετρήσιμο (έχει μηδενικό εξωτερικό μέτρο). Το Γ ανήκει στην Borel σ-άλγεβρα (ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων). Άρα, το Γ είναι μετρήσιμο. Γράφοντας

$$A = \Gamma \cup (A \setminus \Gamma)$$

συμπεραίνουμε ότι το A είναι μετρήσιμο.

10. *Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε τα σύνολα*

$$\limsup A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_n \text{ για άπειρα } n\}$$

και

$$\liminf A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ υπάρχει } n_0(x) \in \mathbb{N} \text{ ώστε } x \in A_n \text{ για κάθε } n \geq n_0(x)\}.$$

Δείξτε ότι

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \geq n$ ώστε $x \in A_k$. Εξηγήστε γιατί η τελευταία πρόταση ισχύει αν και μόνο αν $x \in A_k$ για άπειρες τιμές του k.
(β) Παρατηρήστε ότι $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ αν και μόνο υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geq n$ να ισχύει $x \in A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν το x ανήκει σε τελικά όλα τα A_k.

11. *Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι:*

(α) *Τα* $\limsup A_n$ *και* $\liminf A_n$ *είναι μετρήσιμα σύνολα.*
(β) $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$ *και αν* $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) < +\infty$ *τότε*

$$\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n).$$

(γ) *Αν* $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$*, τότε* $\mu(\limsup A_n) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Αφού κάθε A_n είναι μετρήσιμο σύνολο, από τις

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

είναι φανερό ότι τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα (χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αριθμήσιμες τομές και αριθμήσιμες ενώσεις μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμα σύνολα).
(β) Θέτουμε $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Η ακολουθία (B_n) είναι αύξουσα και $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \liminf A_n$. Άρα,

$$\mu(\liminf A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

Από την άλλη πλευρά, $B_n \subseteq A_n$ άρα $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$. Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$.

Όμοια, θέτουμε $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Η ακολουθία (C_n) είναι φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \limsup A_n$. Από την υπόθεση έχουμε $\mu(C_1) < +\infty$, άρα,

$$\mu(\limsup A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n).$$

Από την άλλη πλευρά, $A_n \subseteq C_n$ άρα $\mu(A_n) \leq \mu(C_n)$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(C_n).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$.
(γ) Με τον συμβολισμό του (β), για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\mu(\limsup A_n) \leq \mu(C_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k).$$

Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < +\infty$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) = 0.$$

Έπεται ότι $\mu(\limsup A_n) = 0$.

12. *Δείξτε ότι τα ακόλουθα σύνολα είναι σύνολα Borel και βρείτε το μέτρο τους:* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$, $C+1$, $2C$, *όπου* C *το σύνολο του Cantor.*

Υπόδειξη. (α) Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, άρα μετρήσιμο σύνολο και $\mu(\mathbb{Q}) = 0$.

(β) Το $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ είναι μετρήσιμο ως συμπλήρωμα μετρήσιμου συνόλου. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\mu([0,n]\setminus\mathbb{Q}) = n - \mu([0,n]\cap\mathbb{Q}) = n - 0 = n$. Συνεπώς, $\mu(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \geq \mu([0,n]\setminus\mathbb{Q}) = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $\mu(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \infty$.

(γ) Το $[0,1]\setminus\mathbb{Q} = [0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ είναι μετρήσιμο ως τομή μετρήσιμων συνόλων. Όπως στο (β), βλέπουμε ότι $\mu([0,1]\setminus\mathbb{Q}) = \mu([0,1]) - \mu([0,1]\cap\mathbb{Q}) = 1 - 0 = 1$.

(δ) Το C είναι μετρήσιμο και έχει μέτρο μηδέν. Από την Άσκηση 1, το ίδιο ισχύει και για το $C+1$ (μεταφορά του C).

(ε) Το C είναι μετρήσιμο και έχει μέτρο μηδέν. Δουλεύοντας όπως στην Άσκηση 4, βλέπουμε ότι το $2C$ είναι μετρήσιμο και έχει μέτρο μηδέν.

13. *Έστω* A *υπεραριθμήσιμο σύνολο και* $\mathcal{X}$ *η οικογένεια των υποσυνόλων* X *του* A *που ικανοποιούν το εξής: είτε το* X *ή το* $A\setminus X$ *είναι αριθμήσιμο. Δείξτε ότι η* $\mathcal{X}$ *είναι* σ*-άλγεβρα.*

Υπόδειξη. Έχουμε $A \in \mathcal{X}$ διότι το $A\setminus A = \emptyset$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Έστω $X \in \mathcal{X}$ Τότε, είτε το X είναι αριθμήσιμο ή το $A\setminus X$ είναι αριθμήσιμο. Αν το X είναι αριθμήσιμο, έχουμε ότι $A\setminus X \in \mathcal{X}$ διότι το $A\setminus(A\setminus X) = X$ είναι αριθμήσιμο, ενώ αν το $A\setminus X$ είναι αριθμήσιμο έπεται πάλι (άμεσα) ότι $A\setminus X \in \mathcal{X}$.

Έστω $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{X}$. Αν όλα τα X_n είναι αριθμήσιμα σύνολα, τότε το $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι αριθμήσιμο κι αυτό, άρα ανήκει στην $\mathcal{X}$. Αν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε το $A\setminus X_m$ να είναι αρίθμήσιμο, τότε από την $A\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \subseteq A\setminus X$ έπεται ότι το $A\setminus X_m$ είναι αριθμήσιμο, άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \in \mathcal{X}$. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, η ένωση των X_n ανήκει στην $\mathcal{X}$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι η $\mathcal{X}$ είναι σ-άλγεβρα.

14. *Δείξτε ότι ο αριθμός* $1/4$ *ανήκει στο σύνολο του Cantor.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $1/4$ βρίσκεται στο εσωτερικό κάποιου από τα κλειστά διαστήματα $I_k^{(n)}$ που σχηματίζουν το C_n, και χωρίζει το $I_k^{(n)}$ σε δύο μέρη που έχουν λόγο $3:1$ αν n περιττός και $1:3$ αν n άρτιος. Έπεται ότι $\frac{1}{4} \in C$ αλλά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $\frac{1}{4}$ δεν είναι άκρο κανενός από τα 2^n κλειστά διαστήματα $I_k^{(n)}$ που σχηματίζουν το C_n.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι $x \in I_k^{(n)} = (a,b)$ και $x - a = 3(b-x)$ (εδώ, ο n είναι περιττός). Στο επόμενο βήμα, χωρίζουμε το $[a,b]$ σε τρία ίσα μέρη και κρατάμε τα $\left[a, \frac{2a+b}{3}\right]$, $\left[\frac{2b+a}{3}, b\right]$. Παρατηρήστε ότι $x = \frac{3b+a}{4}$, άρα $\frac{2b+a}{3} < x < b$ και

$$b - x = b - \frac{3b+a}{4} = \frac{b-a}{4} = 3\left(\frac{3b+a}{4} - \frac{2b+a}{3}\right) = 3\left(x - \frac{2b+a}{3}\right).$$

15. *Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:*

(i) *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\mu^*(A) = 0$, τότε το A είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο.*

(ii) *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και το A δεν είναι μετρήσιμο, τότε $\mu^*(A) > 0$.*

(iii) *Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\mu^*(A) < +\infty$, $B \subseteq A$, το B είναι μετρήσιμο και $\mu(B) = \mu^*(A)$, τότε το A είναι μετρήσιμο.*

(iv) *Έστω $A \subseteq [a, b]$. Τότε, $\mu^*(A) = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει κάλυψη του A από μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων (I_n) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ και κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα το πλήθος από τα διαστήματα I_n.*

(v) *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε $\mu(A) = 0$ αν και μόνο αν όλα τα υποσύνολα του A είναι μετρήσιμα.*

Υπόδειξη. (i) Ψευδής: το σύνολο του Cantor έχει μηδενικό μέτρο αλλά είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

(ii) Αληθής: διότι, κάθε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu^*(A) = 0$ είναι μετρήσιμο.

(iii) Αληθής: διότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει G_n ανοιχτό σύνολο ώστε $A \subseteq G_n$ και $\mu(G_n) < \frac{1}{n} + \mu^*(A)$. Ορίζουμε $G = \cap G_n$, οπότε $B \subseteq A \subseteq G$ και

$$\mu(G \setminus B) = \mu(G) - \mu(B) < \frac{1}{n},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ που σημαίνει ότι το $N = G \setminus B$ είναι μηδενικό σύνολο. Τότε, $A = B \cup (A \cap N)$, το οποίο είναι μετρήσιμο.

(iv) Αληθής: Αν $\mu^*(A) = 0$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα (J_n^{ε}) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n^{\varepsilon}) < \varepsilon$. Θέτουμε $I_{n,m} := J_n^{1/2^m}$. Τότε, η οικογένεια των ανοικτών διαστημάτων $I_{n,m}$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Αντίστροφα· έστω (I_n) κάλυψη ανοικτών διαστημάτων με $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$ Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=n_0}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$. Καθώς, κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα (I_n), έπεται ότι $A \subseteq \bigcup_{n=n_0}^{\infty} I_n$. Συμπεραίνουμε ότι $\mu^*(A) < \varepsilon$. Εφόσον, το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν έχουμε $\mu^*(A) = 0$.

(v) Αληθής: Αν $\mu(A) = 0$, τότε προφανώς όλα τα υποσύνολά του είναι μετρήσιμα. Αν $\mu(A) > 0$, τότε το A περιέχει μη μετρήσιμο σύνολο.

Ομάδα Β′

16. *Έστω $A \subseteq [a, b]$ με $\mu(A) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Υπόδειξη. Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε $A - A = \{x - y : x, y \in A\} \subseteq \mathbb{Q}$. Αφού $\mu(A) > 0$, το A είναι μη κενό. Σταθεροποιούμε $x_0 \in A$ και από την

$$A - x_0 \subseteq A - A \subseteq \mathbb{Q}$$

συπεραίνουμε ότι το $A - x_0$, άρα και το A, είναι αριθμήσιμο σύνολο. Τότε, $\mu(A) = 0$, το οποίο είναι άτοπο: από την υπόθεση έχουμε $\mu(A) > 0$.

17. (α) *Αν το A είναι μετρήσιμο και $\mu(A\triangle B) = 0$, τότε το B είναι μετρήσιμο και $\mu(B) = \mu(A)$.*

(β) *Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, τότε*

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(γ) *Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, $A \subseteq B$ και $\mu(A) = \mu(B) < +\infty$, τότε $\mu(B \setminus A) = 0$.*

(δ) *Δώστε παράδειγμα μετρήσιμων συνόλων A, B με $A \subseteq B$ και $\mu(A) = \mu(B)$, αλλά $\mu(B \setminus A) > 0$.*

Υπόδειξη. (α) Από την $\mu(A\triangle B) = 0$ έχουμε ότι τα $A \setminus B$, $B \setminus A$ είναι μετρήσιμα και $\mu(A \setminus B) = 0$ και $\mu(B \setminus A) = 0$. Γράφοντας

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) = [A \setminus (A \setminus B)] \cup (B \setminus A),$$

συμπεραίνουμε ότι το B είναι μετρήσιμο, και

$$\mu(B) = [\mu(A) - \mu(A \setminus B)] + \mu(B \setminus A) = \mu(A).$$

(β) Γράφουμε

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B),$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα $A \setminus B$, B είναι ξένα και $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$.

(γ) Από την $B = A \cup (B \setminus A)$ παίρνουμε $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$, διότι τα A και $B \setminus A$ είναι ξένα. Αφού $\mu(A) = \mu(B) < +\infty$, διαγράφοντάς τα, από την προηγούμενη ισότητα παίρνουμε $\mu(B \setminus A) = 0$.

(δ) Αν $A = [1, +\infty)$ και $B = [0, +\infty)$, τότε $A \subseteq B$, $\mu(A) = \mu(B) = +\infty$ και $B \setminus A = [0, 1)$, δηλαδή $\mu(B \setminus A) = 1 > 0$.

18. *Έστω $E_n = \{x \in [0, 2\pi] \mid \sin x < 1/n\}$. Υπολογίστε τα $\mu\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\big)$ και $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.*

Υπόδειξη. Έχουμε $E_n = [0, a_n) \cup (\pi - a_n, 2\pi]$, όπου $a_n = \arcsin(1/n)$. Συνεπώς,

$$\mu(E_n) = \pi + 2a_n = \pi + 2\arcsin(1/n).$$

Παρατηρήστε ότι η $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{0\} \cup [\pi, 2\pi]$. Άρα,

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \pi.$$

19. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το σύνολο*

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$$

είναι σύνολο Borel.

Υπόδειξη. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε για κάθε } y, z \in (x-\delta, x+\delta) \text{ να ισχύει } |f(y) - f(z)| < \frac{1}{m} \right\}.$$

Δείξτε ότι $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ και ότι κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο. Έπεται ότι το A είναι G_δ–σύνολο.

20. *Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο*

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$$

είναι σύνολο Borel.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = +\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $s \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq k$ να ισχύει $f_n(x) > s$. Συνεπώς,

$$B = \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > s\}.$$

Αφού οι f_n είναι συνεχείς, κάθε σύνολο της μορφής $\{x : f_n(x) > s\}$ (όπου $s, n \in \mathbb{N}$) είναι ανοικτό. Άρα, το B είναι σύνολο Borel.

21. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.*

Υπόδειξη. Έστω $\mathcal{B}$ η Borel σ-άλγεβρα. Ορίζουμε $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}\}$.

(i) Έχουμε $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \in \mathcal{B}$, άρα $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ και, αφού η $\mathcal{B}$ είναι σ–άλγεβρα, $f^{-1}(A^c) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. Συνεπώς, $A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) Αν $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{B}$$

διότι η $\mathcal{B}$ είναι σ–άλγεβρα. Συνεπώς, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(iv) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, τότε το $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό διότι η f είναι συνεχής, άρα $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. Δηλαδή, η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Έπεται ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, άρα $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$. Αυτό δείχνει ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.

22. *Για κάθε $x \in [0,1)$ συμβολίζουμε με $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ την δεκαδική παράσταση του x (αν το x έχει δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις θεωρούμε εκείνη που τελειώνει σε άπειρα μηδενικά). Βρείτε το εξωτερικό μέτρο καθενός από τα σύνολα:*

(i) $A_1 = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5\}$.

(ii) $A_2 = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5 \ \text{ και } \ x_2 \neq 5\}$.

(iii) $A_3 = \{x \in [0,1) \mid \text{ για κάθε } \ n = 1, 2, \dots, \ x_n \neq 5\}$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{6}{10}, 1\right).$$

Συνεπώς, $\mu(A_1) = \frac{9}{10}$.

(β) Για τον ορισμό του A_1 χωρίσαμε το $[0,1)$ σε δέκα ίσα και διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα $[0, 1/10), [1/10, 2/10), \dots, [9/10, 1)$ και αφαιρέσαμε το $[5/10, 6/10)$ το οποίο είναι το σύνολο των $x \in [0,1)$ για τα οποία $x_1 = 5$. Για να ορίσουμε το A_2 χωρίζουμε καθένα από τα υπόλοιπα διαστήματα $[k/10, (k+1)/10)$, $k \neq 5$, σε δέκα ίσα και διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα μήκους $1/10^2$ και αφαιρούμε το ένα από αυτά (το έκτο κάθε φορά είναι το σύνολο των σημείων του υποδιαστήματος για τα οποία $x_2 = 5$). Αυτό σημαίνει ότι το A_2 αποτελείται από 81 ξένα ημιανοικτά διαστήματα μήκους $1/100$. Συνεπώς,

$$\mu(A_2) = \frac{81}{100} = \left(\frac{9}{10}\right)^2.$$

(γ) Συνεχίζοντας αυτόν τον συλλογισμό, βλέπουμε ότι το σύνολο

$$A_n = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5, \dots, x_n \neq 5\}$$

έχει μέτρο

$$\mu(A_n) = \left(\frac{9}{10}\right)^n.$$

Συνεπώς, για το σύνολο $A = \{x \in [0,1) \mid \text{για κάθε } \ n = 1, 2, \dots, \ x_n \neq 5\}$ έχουμε $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ και, αφού η $\{A_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συνόλων, παίρνουμε

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0.$$

23. *Έστω $\theta \in (0,1)$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με τη διαφορά ότι στο n-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοιχτό διάστημα μήκους $\theta/3^n$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα. Καταλήγουμε σε ένα σύνολο C_θ «τύπου Cantor». Δείξτε ότι:*

(α) *Το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει ανοιχτά διαστήματα.*
(β) *Το C_θ είναι υπεραριθμήσιμο.*
(γ) *Το C_θ είναι μετρήσιμο και $\mu(C_\theta) = 1-\theta > 0$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε το διάστημα $I^{(0)} = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\theta}{3}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα και ονομάζουμε $I^{(1)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(1)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και $\mu(I^{(1)}) = 1-\frac{\theta}{3}$. Χωρίζουμε καθένα από τα δύο διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(1)}$ σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\theta}{3^2}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Κατόπιν, αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε $I^{(2)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(2)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και

$$\mu(I^{(2)}) = \mu(I^{(1)}) - 2\frac{\theta}{3^2} = 1-\frac{\theta}{3} - 2\frac{\theta}{3^2}.$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1,2,\dots$ ένα κλειστό σύνολο $I^{(n)}$ έτσι ώστε η ακολουθία $(I^{(n)})$ να έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $I^{(n)} \supset I^{(n+1)}$ για κάθε $n \geq 0$.

(ii) Το $I^{(n)}$ είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων που έχουν το ίδιο μήκος.

(iii) $\mu(I^{(n)}) = 1-\frac{\theta}{3} - 2\frac{\theta}{3^2} - \cdots - 2^{n-1}\frac{\theta}{3^n}$.

Τέλος, ορίζουμε

$$C_\theta = \bigcap_{n=0}^{\infty} I^{(n)}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mu(C_\theta) = \lim_{n\to\infty} \mu(I^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \left[1-\theta\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right] = 1-\theta.$$

Αν $I_k^{(n)}$ είναι κάποιο από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(n)}$, τότε το μήκος του $I_k^{(n)}$ είναι ίσο με $\frac{1}{2^n}\left[1-\theta\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right] \to 0$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την πληροφορία και δουλεύοντας όπως στην περίπτωση του κλασικού συνόλου του Cantor, μπορούμε να δείξουμε ότι το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει διαστήματα.

Ομάδα Γ΄

24. *Έστω $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Για κάθε $\varepsilon>0$ ορίζουμε*

$$A(\varepsilon)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_n-\frac{\varepsilon}{2^n},q_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

Τέλος, θέτουμε $A=\cap_{j=1}^{\infty}A(1/j)$.

(α) *Δείξτε ότι $\mu(A(\varepsilon))\leq 2\varepsilon$.*

(β) *Αν $\varepsilon<\frac{1}{2}$ δείξτε ότι το $[0,1]\setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.*

(γ) *Δείξτε ότι $A\subseteq[0,1]$ και $\mu(A)=0$.*

(δ) *Δείξτε ότι $\mathbb{Q}\cap[0,1]\subseteq A$ και ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.*

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\mu(A(\varepsilon))\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left(q_n-\frac{\varepsilon}{2^n},q_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\varepsilon}{2^n}=2\varepsilon.$$

(β) Αν το $[0,1]\setminus A(\varepsilon)$ ήταν κενό, θα είχαμε $[0,1]\subseteq A(\varepsilon)$, οπότε $1\leq\mu(A(\varepsilon))$. Όμως, αν $\varepsilon<\frac{1}{2}$, από το (α) παίρνουμε $\mu(A(\varepsilon))\leq 2\varepsilon<1$.

(γ) Αφού $0\leq q_n\leq 1$, για κάθε $j\in\mathbb{N}$ έχουμε $A\subseteq A(1/j)\subseteq[-1/j,1+1/j]$. Άρα,

$$A\subseteq\bigcap_{j=1}^{\infty}[-1/j,1+1/j]=[0,1].$$

Επίσης, από το (α),

$$\mu(A)\leq\mu(A(1/j))\leq 2/j$$

για κάθε $j\in\mathbb{N}$. Άρα, $\mu(A)=0$.

(δ) Έχουμε $\mathbb{Q}\cap[0,1]=\{q_n:n\in\mathbb{N}\}\subseteq A(1/j)$ για κάθε $j\in\mathbb{N}$, άρα $\mathbb{Q}\cap[0,1]\subseteq\bigcap_{j=1}^{\infty}A(1/j)=A$.

Για κάθε $j\in\mathbb{N}$, το $[0,1]\setminus A(1/j)$ είναι κλειστό και πουθενά πυκνό (διότι δεν περιέχει ρητούς). Ας υποθέσουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο. Αν $A=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$[0,1]=A\cup([0,1]\setminus A)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}([0,1]\setminus A(1/j))\right).$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο: όλα τα σύνολα $\{x_n\}$, $[0,1]\setminus A(1/j)$ είναι κλειστά, άρα κάποιο από αυτά θα έπρεπε να περιέχει διάστημα, από το θεώρημα του Baire. Συνεπώς, το A είναι υπεραριθμήσιμο.

25. *Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα*

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) = 1.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $0 < \alpha < 1$ υπάρχει υπακολουθία $\{A_{k_n}\}$ της $\{A_n\}$ με

$$\mu\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) > \alpha.$$

Υπόδειξη. Αφού $\limsup\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 1$, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $n > m$ ώστε $\mu(A_n) > 1 - \varepsilon$.

Έστω $0 < \alpha < 1$. Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε

$$\mu(A_{k_n}) > 1 - \frac{1-\alpha}{2^n}.$$

Τότε, αν θέσουμε $A_{k_n}^c := [0,1] \setminus A_{k_n}$, έχουμε

$$\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{k_n}^c) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{2^n} = 1 - \alpha.$$

Συνεπώς,

$$\mu\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) = 1 - \mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\right) > \alpha.$$

26. *Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\mu(E) < \infty$. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E και έστω $c > 0$ με την ιδιότητα $\mu(A_n) \geq c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(α) *Δείξτε ότι $\mu(\limsup A_n) > 0$.*

(β) *Δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset.$$

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\cup_{n=k}^{\infty} A_n \supseteq A_k$, άρα

$$\mu\left(\cup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \geq \mu(A_k) \geq c.$$

Αν θέσουμε $E_k = \cup_{n=k}^{\infty} A_n$, τότε $E_k \searrow \limsup A_n$ και $\mu(E_1) \leq \mu(E) < \infty$. Συνεπώς,

$$\mu(\limsup A_n) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k) \geq c > 0.$$

(β) Αφού $\mu(\limsup A_n) > 0$, έχουμε $\limsup A_n \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in E$ το οποίο ανήκει σε άπειρα το πλήθος A_n. Ισοδύναμα, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα $x \in \cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}$. Με άλλα λόγια, $\cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset$.

27. *Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\mu(E) > 1$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x \neq y$ στο E ώστε $x - y \in \mathbb{Z}$.*

Υπόδειξη. Ορίζουμε $E_m = E \cap [m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$. Κάθε E_m είναι Lebesgue μετρήσιμο, τα E_m είναι ξένα ανά δύο, και η ένωση τους είναι το E.

Θέτουμε $F_m = E_m - m = \{x - m : x \in E_m\}$. Παρατηρήστε ότι $F_m \subseteq [0,1)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $m \neq n$ στο $\mathbb{Z}$ ώστε $F_m \cap F_n \neq \emptyset$. Πράγματι, αν τα F_m ήταν ξένα ανά δύο, τότε θα είχαμε

$$1 = \mu([0,1)) \geq \mu\left(\cup_{m\in\mathbb{Z}} F_m\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mu(F_m).$$

Όμως, $\mu(F_m) = \mu(E_m)$ για κάθε m. Συνεπώς,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mu(F_m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mu(E_m) = \mu(E) > 1.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες καταλήγουμε σε άτοπο: $1 > 1$.

Υπάρχουν λοιπόν $m \neq n$ ώστε $(E_m - m) \cap (E_n - n) \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχουν $x \in E_m$ και $y \in E_n$ ώστε

$$x - m = y - n.$$

Με άλλα λόγια, υπάρχουν x, y στο E ώστε $x - y = m - n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

28. *Έστω E ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε το εσωτερικό μέτρο Lebesgue του E θέτοντας*

$$\mu_{(i)}(E) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\}.$$

(α) *Δείξτε ότι $\mu_{(i)}(E) \leq \mu^*(E)$.*

(β) *Υποθέτουμε ότι $\mu^*(E) < \infty$. Δείξτε ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν $\mu_{(i)}(E) = \mu^*(E)$.*

(γ) *Δείξτε ότι αν $\mu^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο* (β) *δεν είναι πάντα σωστή.*

Υπόδειξη. (α) Από την μονοτονία του εξωτερικού μέτρου έχουμε $\mu(F) \leq \mu^*(E)$ για κάθε κλειστό $F \subseteq E$. Συνεπώς,

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\} \leq \mu^*(E).$$

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο. Έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε ότι υπάρχει κλειστό $F \subseteq E$ ώστε $\mu(E) < \mu(F) + \varepsilon$. Από τον ορισμό του $\mu_*(E)$ έπεται ότι $\mu(E) < \mu_*(E) + \varepsilon$. Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $\mu^*(E) \leq \mu_*(E)$. Από το (α) προκύπτει η ισότητα.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $\mu^*(E) = \mu_*(E) < \infty$. Μπορούμε τότε να βρούμε G_δ–σύνολο G και F_σ–σύνολο F ώστε $F \subseteq E \subseteq G$ και $\mu(F) = \mu^*(E) = \mu(G) < \infty$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, $\mu(G \setminus F) = \mu(G) - \mu(F) = 0$ και $E \setminus F \subseteq G \setminus F$, οπότε το $E \setminus F$ είναι

Lebesgue μετρήσιμο (με $\mu(E \setminus F) = 0$). Έπεται ότι το $E = F \cup (E \setminus F)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(γ) Αν $\mu^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο (β) δεν είναι πάντα σωστή, με την εξής έννοια: υπάρχει μη μετρήσιμο σύνολο E με $\mu_*(E) = \mu^*(E) = \infty$. Παράδειγμα: θεωρήστε ένα μη μετρήσιμο $A \subset [0,1]$ και πάρτε σαν E το $A \cup [2, +\infty)$.

29. *Για κάθε $A \in \mathcal{M}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε*

$$\rho(A, x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\mu(A \cap (x - t, x + t))}{2t},$$

αν αυτό το όριο υπάρχει. Ο $\rho(A, x)$ είναι η **μετρική πυκνότητα** *του A στο σημείο x.*

(α) *Δείξτε ότι $\rho(\mathbb{Q}, x) = 0$ και $\rho(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

(β) *Έστω $0 < \alpha < 1$. Κατασκευάστε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\rho(A, 0) = \alpha$.*

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\mu(\mathbb{Q} \cap (x - t, x + t)) = 0 \ \text{ και } \ \mu((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (x - t, x + t)) = 2t.$$

[Παρατηρήστε ότι τα δύο σύνολα είναι ξένα, έχουν ένωση το $(x - t, x + t)$, και το πρώτο είναι αριθμήσιμο ως υποσύνολο του $\mathbb{Q}$.] Έπεται ότι

$$\rho(\mathbb{Q}, x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\mu(\mathbb{Q} \cap (x - t, x + t))}{2t} = 0$$

και

$$\rho(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\mu((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (x - t, x + t))}{2t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{2t}{2t} = 1.$$

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$C_n = \left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1} \right] \cup \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right).$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε μετρήσιμο $A_n \subset C_n$ ώστε $\mu(A_n) = \alpha\mu(C_n)$ (το C_n είναι απλό σύνολο και η επιλογή του A_n δεν παρουσιάζει δυσκολίες – θυμηθείτε όμως και την Άσκηση 8(β)). Ορίζουμε

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Παρατηρήστε ότι, αν $\frac{1}{n+1} \leq t < \frac{1}{n}$, τότε

$$\frac{\mu(A \cap (-t, t))}{2t} \leq \frac{\mu(A \cap (-1/n, 1/n))}{2/(n+1)} = \frac{2\alpha/n}{2/(n+1)} = \alpha \frac{n+1}{n} \leq \alpha(1 + 2t),$$

και

$$\frac{\mu(A\cap(-t,t))}{2t}\geq\frac{\mu(A\cap(-1/(n+1),1/(n+1)))}{2/n}=\frac{2\alpha/(n+1)}{2/n}=\alpha\frac{n}{n+1}\geq\alpha(1-2t).$$

Έπεται ότι

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\mu(A\cap(-t,t))}{2t}=\alpha,$$

δηλαδή $\rho(A,0)=\alpha$.

10.2 Μετρήσιμες συναρτήσεις

Ομάδα Α′

1. *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και $f:A\to[-\infty,+\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι, για κάθε $a\in\mathbb{R}$, η συνάρτηση $f_a:A\to[-\infty,+\infty]$ με*

$$f_a(x)=\begin{cases} f(x) & ,\ \text{αν } f(x)\leq a\\ a & ,\ \text{αν } f(x)>a,\end{cases}$$

είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε $f_a=f\cdot\chi_E+a\cdot\chi_{A\setminus E}$, όπου $E=[f\leq a]$. Παρατηρήστε ότι το E είναι μετρήσιμο άρα η συνάρτηση f_a είναι μετρήσιμη ως πράξεις μετρησίμων.

Ένας άλλος τρόπος να το δούμε είναι ο εξής: Έστω $b\in\mathbb{R}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) $a\leq b$. Τότε $[f_a\leq b]=A$, το οποίο είναι μετρήσιμο.

(β) $a>b$. Τότε, $[f_a\leq b]=[f\leq b]$, το οποίο είναι μετρήσιμο αφού η f είναι μετρήσιμη.

Έτσι, σε κάθε περίπτωση το $[f_a\leq b]$ είναι μετρήσιμο.

2. *Αν η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε η f' είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n:(a,b)\to\mathbb{R}$ με $f_n(x)=n[f(x+1/n)-f(x)]$. Εφόσον, η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in(a,b)$ ισχύει $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f'(x)$. Κάθε f_n είναι μετρήσιμη οπότε η f' είναι μετρήσιμη.

3. (α) *Αν $A\subseteq\mathbb{R}$ με $\mu(A)=0$, δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f:A\to[-\infty,+\infty]$ είναι μετρήσιμη.*

(β) *Έστω A,B μετρήσιμα σύνολα με $\mu(B)=0$ και έστω $f:A\cup B\to[-\infty,+\infty]$ μια συνάρτηση της οποίας ο περιορισμός $f|_A$ στο A είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.*

(γ) *Αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο σύνολο και η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν παντού στο A, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. (α) Άμεσο αφού κάθε υποσύνολο μηδενικού συνόλου είναι μετρήσιμο.

(β) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$[f > b] = \{x \in A \cup B : f(x) > b\} = \{x \in B : f(x) > b\} \cup \{x \in A : f(x) > b\}.$$

Το πρώτο σύνολο στην προηγούμενη ένωση είναι μετρήσιμο ως υποσύνολο μηδενικού συνόλου ενώ το δεύτερο είναι μετρήσιμο διότι η $f|_A$ είναι μετρήσιμη.

(γ) Έστω $C = C(f)$ το σύνολο των σημείων συνέχειας της f. Τότε, το $B = A \setminus C$ είναι μηδενικό σύνολο αφού η f είναι συνεχής σχεδόν παντού. Καθώς, κάθε συνεχής συνάρτηση είναι μετρήσιμη, το συμπέρασμα έπεται από το (β).

4. (α) *Δώστε παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης f με την ιδιότητα η f^2 να είναι μετρήσιμη.*

(β) *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αν η f^2 είναι μετρήσιμη και το σύνολο $\{x \in A \mid f(x) > 0\}$ είναι μετρήσιμο, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε το μη μετρήσιμο σύνολο V του Vitali στο $[0,1]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = 1$ αν $x \in V$ και -1 αλλιώς. Τότε, η f δεν είναι μετρήσιμη, αλλά η f^2 είναι η σταθερή 1 κι άρα είναι μετρήσιμη.

(β) Παρατηρήστε ότι το σύνολο $A_2 = \{x \in A \mid f(x) \leq 0\}$ είναι επίσης μετρήσιμο, αφού το $A_1 = \{x \in A \mid f(x) > 0\}$ είναι μετρήσιμο. Έστω $b \in \mathbb{R}$. Αν $b \leq 0$. Τότε, $[f \leq b] = [f^2 \geq b^2] \cap A_2$ το οποίο είναι μετρήσιμο. Αν $b > 0$ τότε

$$[f \leq b] = (A_1 \cap [f^2 \leq b^2]) \cup A_2$$

το οποίο είναι μετρήσιμο, ως πράξεις τέτοιων.

5. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο*

$$L = \{x \in A \mid \text{ η ακολουθία } (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνει } \}$$

είναι μετρήσιμο.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις $g(x) = \liminf f_n(x)$ και $h(x) = \limsup f_n(x)$ είναι μετρήσιμες. Τότε, το L γράφεται ως $L = [g = h] = \{x \in A \mid g(x) = h(x)\}$, το οποίο είναι μετρήσιμο.

6. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο και $f : A \to [-\infty, +\infty]$ συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, το σύνολο $\{x \in A \mid f(x) > q\}$ είναι μετρήσιμο. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Λόγω της πυκνότητας του $\mathbb{Q}$ υπάρχει (q_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία ρητών ώστε $q_n \to a$. Τότε,

$$\{x \in A \mid f(x) \geq a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A \mid f(x) > q_n\}.$$

Επειδή κάθε $\{x \in A \mid f(x) > q_n\}$ είναι μετρήσιμο έπεται ότι το $[f \geq a]$ είναι μετρήσιμο. Καθώς το $a \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, το ζητούμενο έπεται.

7. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το B είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in B\}$ είναι μετρήσιμο.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid f^{-1}(B) \text{ μετρήσιμο}\}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η σ-άλγεβρα των Borel του $\mathbb{R}$ περιέχεται στην $\mathcal{A}$. Γι' αυτό δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα: Πράγματι· $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ μετρήσιμο, επομένως $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$. Αν $B \in \mathcal{A}$ τότε $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(B)$ και εφόσον το $B \in \mathcal{A}$ έπεται ότι το $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(B)$ είναι μετρήσιμο. Τέλος, αν $\{B_n\}$ ακολουθία στην $\mathcal{A}$, τότε $f^{-1}(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$ είναι μετρήσιμο αφού κάθε $f^{-1}(B_n)$ είναι μετρήσιμο.

(ii) Δείχνουμε ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά: Αφού f μετρήσιμη το $f^{-1}((a, b)) = [f < b] \cap [f > a]$ είναι μετρήσιμο, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Δηλαδή, $(a, b) \in \mathcal{A}$. Όμως κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη (ξένη) ένωση ανοικτών διαστημάτων κι εφόσον η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα προκύπτει ότι περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Από τον ορισμό των Borel έπεται ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

Ομάδα Β′

8. (α) *Δείξτε ότι αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.*

(β) *Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Cantor–Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, $(h \circ g)^{-1}((a, +\infty)) = g^{-1}(h^{-1}(a, +\infty))$. Όμως, η h είναι μετρήσιμη, άρα το $B = h^{-1}(a, +\infty)$ είναι Borel. Έπεται, ότι $g^{-1}(B)$ είναι επίσης Borel αφού g συνεχής.

(β) Έστω $\phi : [0, 1] \to [0, 1]$ η συνάρτηση Cantor–Lebesgue και ξαναλέμε ϕ την επέκτασή της σ' όλο το $\mathbb{R}$ με $\phi(x) = 1$ αν $x > 1$ ενώ $\phi(x) = 0$ αν $x < 0$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \phi(x)$. Έχουμε δει ότι $\mu(f(C)) = 1$, άρα υπάρχει $V \subseteq f(C)$ μη μετρήσιμο. Επίσης, το $A = f^{-1}(V)$ είναι μετρήσιμο. Παρατηρήστε ότι ορίζεται η $g = f^{-1}$, η οποία είναι συνεχής και $h = \chi_A$ η οποία είναι μετρήσιμη. Τότε, η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεν είναι μετρήσιμη αφού $\{x \mid (h \circ g)(x) > 0\} = V$.

9. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.*

(α) *Δείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα.*

(β) *Δείξτε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subset [a,b]$ με $\mu(A) = 0$ ισχύει $\mu(f(A)) = 0$.*

Υπόδειξη. (α) Πρώτα δείχνουμε ότι η f απεικονίζει κλειστά υποσύνολα του $[a,b]$ σε κλειστά. Πράγματι· αν F κλειστό στο $[a,b]$, επειδή το $[a,b]$ είναι συμπαγές έπεται ότι το F είναι συμπαγές. Αφού η f είναι συνεχής παίρνουμε ότι το $f(F)$ είναι συμπαγές, άρα κλειστό. Αν τώρα $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι F_σ σύνολο, τότε κάθε E_n είναι κλειστό, οπότε το $f(E) = \cup_{n=1}^{\infty} f(E_n)$ είναι F_σ.

(β) Υποθέτουμε ότι αν $\mu(A) = 0$ τότε $\mu(f(A)) = 0$. Θα δείξουμε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σε μετρήσιμα. Πράγματι· αν A μετρήσιμο, τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχουν N και E μηδενικό σύνολο και F_σ-σύνολο αντίστοιχα, ώστε $A = E \cup N$. Τότε, $f(A) = f(E) \cup f(N)$. Αλλά, από το (α) το $f(E)$ είναι F_σ, ενώ από την υπόθεση το $f(N)$ είναι μηδενικό. Συνεπώς, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο.

Αντίστροφα· έστω ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σε μετρήσιμα. Θα δείξουμε ότι απεικονίζει μηδενικά σύνολα σε μηδενικά. Έστω $A \subset [a,b]$ με $\mu(A) = 0$. Τότε, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο. Αν είναι $\mu(f(A)) > 0$ τότε υπάρχει $V \subset f(A)$ μη μετρήσιμο. Έστω $E = f^{-1}(V) \cap A$, το οποίο είναι προφανώς μετρήσιμο. Τότε, το $f(E) = V$ δεν είναι μετρήσιμο κι έχουμε αντίφαση.

10. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\mu(A) < \infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\omega_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$\omega_f(t) = \mu(\{x \in A : f(x) > t\}).$$

(α) *Δείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;*

(β) *Αν οι $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_k \uparrow f$, δείξτε ότι $\omega_{f_k} \uparrow \omega_f$.*

Υπόδειξη. (α) Είναι προφανές ότι η ω_f είναι φθίνουσα. Για να δείξουμε ότι είναι δεξιά συνεχής, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $t_n \downarrow t$ ισχύει $\omega_f(t_n) \to \omega_f(t)$. Ορίζουμε $A_n = \{x \in A : f(x) > t_n\}$. Τότε, $A_n \subseteq A_{n+1}$ και $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in A : f(x) > t\}$. Επομένως, από την ιδιότητα του μέτρου παίρνουμε:

$$\omega_f(t) = \mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \omega_f(t_n),$$

που αποδεικνύει την δεξιά συνέχεια της f.

Η ω_f είναι συνεχής αν και μόνον αν είναι συνεχής από τα αριστερά. Ισοδύναμα, αν για κάθε (t_n) με $t_n \uparrow t$ ισχύει $\omega_f(t_n) \to \omega_f(t)$. Δείχνουμε όπως πριν ότι

$$\lim_{n\to\infty} \omega_f(t_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(x \in A : f(x) > t_n) = \mu(x \in A : f(x) \geq t),$$

όπου εδώ χρησιμοποιούμε την υποθέση $\mu(A) < \infty$. Επομένως, η ω_f είναι αριστερά συνεχής αν και μόνον αν

$$\mu(x \in A : f(x) > t) = \mu(x \in A : f(x) \geq t) \overset{\mu(A)<\infty}{\Longleftrightarrow} \mu(x \in A : f(x) = t) = 0.$$

Μ' άλλα λόγια η ω_f είναι συνεχής στο t αν και μόνον αν $\mu(f^{-1}(\{t\})) = 0$.

(β) Είναι προφανές ότι για κάθε t έχουμε $\omega_{f_k}(t) \leq \omega_{f_{k+1}}(t)$. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $B_k = \{x \in A : f_k(x) > t\}$. Τότε, $B_k \subseteq B_{k+1}$ και $\cup_{k=1}^{\infty} B_k = \{x \in A : f(x) > t\}$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \omega_{f_k}(t) &= \lim_{k\to\infty} \mu(x \in A : f_k(x) > t) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) \\ &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mu(x \in A : f(x) > t) = \omega_f(t). \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

11. *Έστω E μη μετρήσιμο υποσύνολο του $(0,1)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x\chi_E(x)$. Δείξτε ότι η f δεν είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$ αλλά, για κάθε $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, το σύνολο $\{x : f(x) = a\}$ είναι μετρήσιμο.*

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\{x \mid f(x) > 0\} = E$ το οποίο είναι μη μετρήσιμο. Παρ' όλα αυτά αν $a \neq 0$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $a \in E$, τότε $[f = a] = \{a\}$, ενώ αν

(ii) $a \notin E$, τότε $[f = a] = \emptyset$,

δηλαδή σε κάθε περίπτωση το $[f = a]$ είναι μετρήσιμο.

12. *Σωστό ή λάθος; Αν η f είναι μετρήσιμη στο $(a, b - \varepsilon)$ για κάθε $0 < \varepsilon < b - a$, τότε η f είναι μετρήσιμη στο (a, b).*

Υπόδειξη. Σωστό. Έστω $k \in \mathbb{N}$ ώστε $1/k < b - a$. Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n = f \cdot \chi_{[a, b - \frac{1}{n+k}]}$. Παρατηρήστε ότι κάθε f_n είναι μετρήσιμη από την υπόθεση και $f_n \to f$ κατά σημείο. Άρα, η f είναι μετρήσιμη.

13. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, $A = g^{-1}((a, +\infty))$ είναι διάστημα της μορφής $[b, +\infty)$ ή (b, ∞) αφού η g είναι αύξουσα. Επομένως, το $(g \circ f)^{-1}((a, +\infty)) = f^{-1}(A)$ είναι μετρήσιμο, αφού η f είναι μετρήσιμη.

14. *Έστω (ϕ_n) ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν $\phi_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι φραγμένη.*

Υπόδειξη. Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f - \phi_k\|_\infty < 1$. Καθώς η ϕ_k είναι απλή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|\phi_k(x)| \leq M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|f(x)| \leq |\phi_k(x)| + \|f - \phi_k\|_\infty < 1 + M,$$

γεγονός που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Ομάδα Γ΄

15. (α) *Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x : f_n(x) > \alpha\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) \leq \alpha$ για κάθε $x \notin Z$.*

(β) *Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\varepsilon_n \to 0^+$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x : f_n(x) > \varepsilon_n\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \notin Z$.*

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $A_n = \{x : f_n(x) > \alpha\}$. Τότε, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, άρα από το πρώτο λήμμα Borel–Cantelli έπεται ότι $\mu(\limsup A_n) = 0$. Θέτουμε $Z = \limsup A_n$ επομένως, αν $x \notin Z$ τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq N_x$ τότε $x \notin A_n$ δηλαδή $f_n(x) \leq \alpha$, άρα $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) \leq \alpha$.

(β) Όπως προηγουμένως, υπάρχει Z με $\mu(Z) = 0$ ώστε αν $x \notin Z$, τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq N_x$ τότε $f_n(x) \leq \varepsilon_n$. Καθώς, $\varepsilon_n \to 0^+$ το ζητούμενο έπεται.

16. *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (α_n) θετικών πραγματικών αριθμών και υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} = 0$ για κάθε $x \notin Z$.*

Υπόδειξη. Για κάθε n υπάρχει $\beta_n > 0$ ώστε $\mu(\{x : |f_n(x)| > \beta_n\}) < 1/2^n$. Προς τούτο αρκεί να αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός. Αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\beta > 0$ ώστε $\mu(x : |g(x)| > \beta) < \varepsilon$.

Έστω $E_n = \{x : |g(x)| \leq n\}$. Τότε, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = [0,1]$ και η $\{E_n\}$ είναι αύξουσα. Άρα, είναι $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu([0,1]) = 1$. Επομένως, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(A_k) > 1 - \varepsilon$. Τότε, $\mu(x : |g(x)| > k) < \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Εφαρμόζοντας αυτό για $g = f_n$ και $\varepsilon = 2^{-n}$ βρίσκουμε $\beta_n > 0$ ώστε $\mu(x : |f_n(x)| > \beta_n) < 1/2^n$. Θέτουμε $E_n = \{x : |f_n(x)| > \beta_n\}$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty$. Αν θέσουμε $Z = \limsup E_n$, τότε από το πρώτο λήμμα Borel–Cantelli παίρνουμε $\mu(Z) = 0$. Αν $x \notin Z$ τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq N_x$ ισχύει $|f_n(x)| \leq \beta_n$. Αν θεωρήσουμε την $\alpha_n = \frac{1}{n\beta_n}$ τότε έχουμε ότι για κάθε $x \notin Z$ ισχύει $\frac{f_n(x)}{\alpha_n} \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

17. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι t-περιοδική και s-περιοδική για κάποιους $t, s > 0$ με $t/s \notin \mathbb{Q}$, δείξτε ότι η f είναι σχεδόν παντού σταθερή.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι μη αρνητική και φραγμένη. Ορίζουμε $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Για κάθε y της μορφής $y = kt + ms,\ k, m \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x f(t+y)\,dt = \int_y^{x+y} f(t)\,dt = F(x+y) - F(y),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από το θεώρημα του Kronecker γνωρίζουμε ότι το σύνολο $D = \{kt+ms : k, m \in \mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$. Εφόσον, η F είναι συνεχής (εξηγήστε γιατί) και ικανοποιεί τη συναρτησιακή εξίσωση $F(x+y) = F(x) + F(y)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε y σε ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έπεται ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $F(x) = \alpha x$. Έτσι,

$$F(x) - \alpha x = \int_0^x f(t)\,dt - \alpha x = \int_0^x (f(t) - \alpha)\,dt = 0,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από εδώ έπεται εύκολα ότι η $h(t) = f(t) - \alpha$ έχει ολοκλήρωμα μηδέν σε κάθε διάστημα κι άρα είναι μηδέν σχεδόν παντού.

Για τη γενική περίπτωση θεωρούμε τη συνάρτηση $f_1(t) = 1 + \frac{2}{\pi}\arctan f(t)$ για την οποία πρέπει πρώτα να παρατηρήσουμε ότι είναι μετρήσιμη (βλ. Άσκηση 13) και ότι $0 < f_1 < 2$.

10.3 Ολοκλήρωμα Lebesgue

Ομάδα Α΄

1. *Έστω ϕ μη αρνητική απλή συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\int \phi = \sup\left\{ \int \psi \mid 0 \le \psi \le \phi, \psi \text{ απλή ολοκληρώσιμη} \right\}.$$

Υπόδειξη. Έστω $\phi = \sum_{i=0}^n a_i \chi_{A_i}$ η κανονική αναπαράσταση της ϕ, όπου $a_0 = 0$ και τα A_i είναι ξένα, με $A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_n = \mathbb{R}$. Γράφοντας $\int \phi$ στο αριστερό μέλος, εννοούμε τον αρχικό ορισμό:

$$\int \phi = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

Έχουμε δεί ότι αν $0 \le \psi \le \phi$ τότε $\int \phi \ge \int \psi$. Συνεπώς,

$$\int \phi \ge \sup\left\{ \int \psi \mid 0 \le \psi \le \phi, \psi \text{ απλή ολοκληρώσιμη} \right\}.$$

Ορίζουμε $\phi_k = \phi\chi_{[-k,k]}$. Η ϕ_k είναι απλή ολοκληρώσιμη, έχουμε $0 \leq \phi_k \leq \phi$ και

$$\int \phi_k = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i \cap [-k,k]) \to \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i) = \int \phi.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int \phi &= \sup\left\{\int \phi_k : k \in \mathbb{N}\right\} \\ &\leq \sup\left\{\int \psi \mid 0 \leq \psi \leq \phi, \psi \text{ απλή ολοκληρώσιμη}\right\}. \end{aligned}$$

2. *Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $F : [0,\infty) \to [0,\infty]$ με $F(t) = \mu(\{f > t\})$. Δείξτε ότι η F είναι φθίνουσα, συνεχής από δεξιά, και $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $t > s \geq 0$ έχουμε $\{f > t\} \subseteq \{f > s\}$. Συνεπώς,

$$F(t) = \mu(\{f > t\}) \leq \mu(\{f > s\}) = F(s).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι φθίνουσα. Για να δείξουμε ότι η F είναι συνεχής από δεξιά, αρκεί να δείξουμε ότι: για κάθε $t \geq 0$ και για κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία $t_n \to t$ ισχύει $F(t_n) \to F(t)$ (γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό). Όμως,

$$\{f > t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{f > t_n\}.$$

Πράγματι, είναι προφανές ότι αν για κάποιον n ισχύει $f(x) > t_n$ τότε $f(x) > t$, ενώ αντίστροφα, αν $f(x) > t$, από το γεγονός ότι $t_n \to t$ έπεται ότι υπάρχει n ώστε $f(x) > t_n > t$. Έχουμε επίσης υποθέσει ότι η (t_n) είναι φθίνουσα, άρα $\{f > t_n\} \subseteq \{f > t_{n+1}\}$ για κάθε n. Δηλαδή, η $(\{f > t_n\})_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Έπεται ότι

$$F(t) = \mu(\{f > t\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(\{f > t_n\}) = \lim_{n\to\infty} F(t_n).$$

Τέλος, για κάθε $t > 0$, από την ανισότητα του Markov έχουμε

$$tF(t) = t\,\mu(\{f > t\}) \leq \int f.$$

Άρα,

$$F(t) \leq \frac{1}{t}\int f,$$

και αυτό δείχνει ότ $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 0$.

3. *Δείξτε ότι* $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} = \infty$.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση

$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \chi_{[k,k+1)}(x).$$

Η ϕ_n είναι απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $0 \leq \phi_n(x) \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in [1,\infty)$. Πράγματι, αν $x \geq n+1$ έχουμε $\phi_n(x) = 0 < \frac{1}{x}$, ενώ αν $x \in [1, n+1)$ τότε υπάρχει μοναδικός $1 \leq k \leq n$ ώστε $x \in [k, k+1)$ και $\phi_n(x) = \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x}$. Έπεται ότι

$$\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} \geq \int_{[1,\infty)} \phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \mu([k,k+1)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

Από το γεγονός ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = +\infty,$$

έπεται ότι $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} = \infty$.

4. *Βρείτε μια ακολουθία (f_n) μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων που ικανοποιεί τα εξής: $f_n \to 0$ αλλά $\lim_n \int f_n = 1$. Μπορείτε να επιλέξετε την (f_n) έτσι ώστε να συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση;*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ με

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \chi_{[0,n]}(x).$$

Παρατηρήστε ότι $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Όμως,

$$\int f_n = \frac{1}{n}\,\mu([0,n]) = \frac{1}{n}\,n = 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

5. *Υποθέτουμε ότι f και f_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $f_n \searrow f$, και υπάρχει k τέτοιος ώστε $\int f_k < \infty$. Δείξτε ότι*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $\{f_k - f_n\}_{n=k}^{\infty}$. Αφού η $\{f_n\}$ είναι φθίνουσα, συμπεραίνουμε ότι η $\{f_k - f_n\}_{n=k}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Αφού $f_n \searrow f$, έχουμε $f_k - f_n \nearrow f_k - f$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int (f_k - f_n) \to \int (f_k - f).$$

Παρατηρήστε ότι $0 \leq f_k - f \leq f_k$, άρα

$$\int (f_k - f_n) \leq \int (f_k - f) \leq \int f_k < \infty$$

για κάθε n. Δηλαδή, η $f_k - f$ και όλες οι $f_k - f_n$ είναι ολοκληρώσιμες. Από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος,

$$\int f_n = \int f_k - \int (f_k - f_n) \to \int f_k - \int (f_k - f) = \int f.$$

6. *Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f > 0$ σ.π. Αν $\int_E f = 0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο E, δείξτε ότι $\mu(E) = 0$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f > 0$ παντού στο E, δηλαδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_n = \{x \in E : f(x) > 1/n\}$. Παρατηρήστε ότι

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

διότι $f(x) > 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x) > 1/n$. Από την ανισότητα του Markov,

$$\frac{1}{n}\,\mu(E_n) \leq \int_{E_n} f \leq \int_E f = 0,$$

άρα $\mu(E_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0.$$

Αυτό το επιχείρημα καλύπτει και την περίπτωση όπου $f > 0$ σ.π.: αν $Z = \{x \in E : f(x) = 0\}$ τότε $\mu(Z) = 0$ και $\int_{E\setminus Z} f = 0$. Μπορούμε λοιπόν να δουλέψουμε με το $E \setminus Z$: αν δείξουμε ότι $\mu(E \setminus Z) = 0$, θα έχουμε και $\mu(E) = 0$.

7. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\geq 1/n\}} f.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{[-n,n]}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα και, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε τελικά $x \in [-n, n]$ άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{-n}^{n} f = \int f\chi_{[-n,n]} = \int g_n \to \int f.$$

Για το δεύτερο ερώτημα, ορίζουμε $h_n(x) = f(x)\chi_{\{f\geq 1/n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{h_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f \geq 1/n\} \subseteq \{f \geq 1/(n+1)\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ έχουμε τελικά $f(x) \geq 1/n$ άρα $h_n(x) = f(x) \to f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $h_n(x) = 0$ για κάθε n, οπότε πάλι $h_n(x) \to 0 = f(x)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f\geq 1/n\}} f = \int f\chi_{\{f\geq 1/n\}} = \int h_n \to \int f.$$

8. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\leq n\}} f.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{f\leq n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f \leq n\} \subseteq \{f \leq n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) < \infty$ έχουμε τελικά $f(x) \leq n$ άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$. Δηλαδή, αν $E = \{f < \infty\}$, έχουμε $g_n\chi_E \nearrow f\chi_E$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f\leq n\}} f = \int f\chi_{\{f\leq n\}} = \int g_n = \int g_n\chi_E \to \int f\chi_E.$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, γνωρίζουμε ότι $\mu(E^c) = 0$ και $\int f\chi_{E^c} = 0$. Έπεται ότι

$$\int f = \int f\chi_E + \int f\chi_{E^c} = \int f\chi_E = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\leq n\}} f.$$

9. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι σωστό ότι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$;*

Υπόδειξη. Όχι. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$$

είναι σχεδόν παντού ίση με την μηδενική συνάρτηση. Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int f = 0$. Όμως, το $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ δεν υπάρχει: έχουμε

$$f(n) \to 1 \text{ και } f(-n) \to 1.$$

Ομάδα Β΄

10. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(\{f > 2^k\}) < \infty.$$

Υπόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε:

$$\int f, d\mu = \int_0^\infty \mu(f > t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^{k-1}}^{2^k} \mu(f > t)\, dt.$$

Επειδή η συνάρτηση $t \mapsto \mu(f > t)$ είναι φθίνουσα η τελευταία σειρά είναι ισοδύναμη με την $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(f > 2^k)$ και το συμπέρασμα έπεται.

11. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\mu(E) < \infty$ τέτοιο ώστε*

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Επιπλέον, δείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{1/n \leq f \leq n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{1/n \leq f \leq n\} \subseteq \{1/(n+1) \leq f \leq n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $0 < f(x) < \infty$ έχουμε τελικά $f(x) \geq 1/n$ και $f(x) \leq n$, άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $g_n(x) = 0$ για κάθε n, οπότε πάλι $g_n(x) \to 0 = f(x)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{1/n \leq f \leq n\}} f = \int f\chi_{\{1/n \leq f \leq n\}} = \int g_n \to \int f.$$

Συνεπώς, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε, αν θέσουμε $E = \{1/n \leq f \leq n\}$ τότε

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Παρατηρήστε ότι η f είναι φραγμένη (από n) στο E. Τέλος, από την ανισότητα του Markov,

$$\mu(E) \leq \mu(\{f \geq 1/n\}) \leq n \int f < +\infty.$$

12. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f$ είναι συνεχής.*

Υπόδειξη. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Εύκολα βλέπουμε ότι $F(x) \leq F(y)$, δηλαδή η F είναι αύξουσα. Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε μονότονη ακολουθία (x_n) με $x_n \to x$ ισχύει $F(x_n) \to F(x)$ (εξηγήστε γιατί). Υποθέτουμε ότι $x_n \downarrow x$ (όμοια αντιμετωπίζεται κι άλλη περίπτωση). Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g_n = f\chi_{(-\infty, x_n]}$ και $g = f\chi_{(-\infty, x]}$, οπότε $F(x_n) = \int f_n \, d\mu$ και $F(x) = \int g \, d\mu$. Επιπλέον, $g_n \to g$ κατά σημείο και $|g_n| \leq f$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$$F(x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} f = \int g_n \, d\mu \to \int g \, d\mu = F(x).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι δεξιά συνεχής.

13. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\mu(E) < \delta$, τότε $\int_E f < \varepsilon$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$. Παρατηρήστε ότι $f_n \leq n$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

(εξηγήστε γιατί η $\{f_n\}$ είναι αύξουσα και $f_n \to f$). Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\int (f - f_n) = \int f - \int f_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu(E) < \delta$. Γράφουμε

$$\int_E f = \int_E f_n + \int_E (f - f_n) \leq \int_E f_n + \int (f - f_n) \leq n\mu(E) + \frac{\varepsilon}{2} < n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

14. *Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f_n = \chi_{[n,n+1)}$ δείξτε ότι στο Λήμμα του Fatou η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια.*

Υπόδειξη. Αν $f_n = \chi_{[n,n+1)}$, τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$: παρατηρήστε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > x$ και τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $x \notin [n, n+1)$, άρα $f_n(x) = \chi_{[n,n+1)}(x) = 0$. Έπεται ότι

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n = 0,$$

ενώ $\int f_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n = 1.$$

15. *Έστω (f_n) μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Είναι σωστό ότι*

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int \left(\limsup_{n\to\infty} f_n \right) ;$$

Αν προσθέσουμε την υπόθεση ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη;

Υπόδειξη. Όχι. Αν $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$, τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη ($0 \leq f_n \leq 1$). Παρατηρήστε ότι

$$\int \limsup_{n\to\infty} f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n = 0,$$

αλλά $\int f_n = \frac{1}{n}\mu([0,n]) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n = 1.$$

16. *Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \leq f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$. Δείξτε ότι*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Υπόδειξη. Αφού $f_n \leq f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\int f_n \leq \int f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f.$$

Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n = \liminf_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Άρα,

$$\int f_n \to \int f.$$

17. *Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f < \infty.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n = \int_E f$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο E. Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει αν $\int f = \infty$.

Υπόδειξη. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int_E f \leq \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n$$

και

$$\int_{E^c} f \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{E^c} f_n$$

δηλαδή

$$\int f - \int_E f \leq \liminf_{n\to\infty}\left(\int f_n - \int_E f_n\right).$$

Αφού

$$-\int f = \lim_{n\to\infty}\left(-\int f_n\right),$$

προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$-\int_E f \leq \liminf_{n\to\infty}\left(-\int_E f_n\right) = -\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n.$$

Δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n \leq \int_E f \leq \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n.$$

Συνεπώς,

$$\int_E f_n \to \int_E f.$$

18. *Έστω (f_n) ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a,b]$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_a^b |f_n - f| \to 0$.*

Υπόδειξη. Η f είναι μετρήσιμη διότι $f_n \to f$ κατά σημείο. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Η σταθερή συνάρτηση ε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, οπότε, από την $|f| < |f_{n_0}| + \varepsilon$ έπεται ότι η $|f|$ (άρα και η f) είναι ολοκληρώσιμη. Τέλος, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \varepsilon(b-a).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f.$$

19. *Δείξτε ότι*

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = 1.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = (1-x/n)^n \chi_{[0,n]}(x)$ των μετρησίμων συναρτήσεων για την οποία ισχύει $|f_n(x)| \leq e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$. Παρατηρούμε ότι η $x \mapsto e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και $f_n(x) \to e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$ κατά σημείο. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται το συμπέρασμα.

20. *Υπολογίστε το* $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 - (x/n))^n e^{x/2} dx$ *(αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = (1-x/n)^n e^{x/2}\chi_{[0,n]}$, η οποία αποτελείται από από μετρήσιμες συναρτήσεις με $|f_n(x)| \leq e^{-x/2}\chi_{[0,\infty)}$. Η συνάρτηση $g(x) = e^{-x/2}\chi_{[0,\infty)}$ είναι ολοκηρώσιμη, οπότε από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι $\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n$. Αλλά, $\lim_n f_n(x) = 0$ για κάθε $x < 0$ ενώ αν $x \geq 0$ εχουμε

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\right] = e^{-x}e^{x/2} = e^{-x/2}.$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\lim_n \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x/2}\, dx = \int_0^\infty e^{-x/2}\, dx = 2,$$

που υπολογίζει το ζητούμενο όριο.

21. *Έστω ότι οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $f_n \nearrow f$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\int f_n \to \int f$;*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $g_n := f - f_n$. Παρατηρήστε ότι $g_n \geq 0$, $g_n \geq g_{n+1}$ και $g_n \searrow 0$. Εφόσον, οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $\int g_1 < +\infty$ μπορούμε να γράψουμε (από το δυϊκό του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης – Άσκηση 5):

$$\int f - \lim_n \int f_n = \lim_n \left(\int f - \int f_n\right) = \lim_n \left(\int f - f_n\right) = \lim_n \int g_n = \int \lim_n g_n = 0,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

22. *Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \to 0$, δείξτε ότι $\int f_n \to \int f$ και $\int |f_n| \to \int |f|$.*

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\left|\int |f_n| - \int |f|\right| \leq \int \big|\, |f_n| - |f| \,\big| \leq \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int |f_n| \to \int |f|.$$

Με ανάλογο τρόπο,

$$\left|\int f_n - \int f\right| = \left|\int (f_n - f)\right| \leq \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int f_n \to \int f.$$

23. *Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \to 0$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E, και $\int f_n^+ \to \int f^+$.*

Υπόδειξη. Έστω E μετρήσιμο σύνολο. Γράφουμε

$$\left|\int_E f_n - \int_E f\right| = \left|\int_E (f_n - f)\right| \leq \int_E |f_n - f| \leq \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int_E f_n \to \int_E f.$$

Για το δεύτερο ερώτημα χρησιμοποιούμε την Άσκηση 22. Με την υπόθεση ότι $\int |f_n - f| \to 0$, δείξαμε ότι $\int f_n \to \int f$ και $\int |f_n| \to \int |f|$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int f_n^+ &= \int \frac{f_n + |f_n|}{2} = \frac{1}{2}\int f_n + \frac{1}{2}\int |f_n| \to \frac{1}{2}\int f + \frac{1}{2}\int |f| \\ &= \int \frac{f + |f|}{2} = \int f^+. \end{aligned}$$

24. *Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(\{|f| > 2^k\}) < \infty$.*

Υπόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε το ολοκλήρωμα της f με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\int |f|\,d\mu = \int_0^\infty \mu(|f|>t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2^{k-1}}^{2^k}\mu(|f|>t)\,dt.$$

Παρατηρήστε ότι η $t\mapsto \mu(|f|>t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του $t>0$, οπότε

$$2^{k-1}\mu(|f|>2^k) < \int_{2^{k-1}}^{2^k}\mu(|f|>t)\,dt < 2^{k-1}\mu(|f|>2^{k-1}),$$

για κάθε $k\in\mathbb{Z}$. Επομένως, το ολοκλήρωμα $\int |f|\,d\mu$ είναι πεπερασμένο αν και μόνον αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\mu(|f|>2^k) < +\infty$.

Ομάδα Γ′

25. *Υπολογίστε (με πλήρη αιτιολόγηση) το*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi/2}\left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n \cos x dx.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_n(x) = (1-\sqrt{\sin x})^n\cos x$, $x\in[0,\pi/2]$. Είναι $f_n\geq 0$ και για κάθε $x\in(0,\pi/2]$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{1-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}}\cos x.$$

Επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει σχεδόν παντού κι από το θεώρημα Beppo–Levi παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi/2} f_n = \int_0^{\pi/2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}-\cos x\right)dx = -1+\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα με την αλλαγή μεταβλητής $u=\sin x$ δίνει

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int_0^1\frac{1}{\sqrt{u}}\,du = 2.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο άθροισμα ισούται με 1.

26. *Έστω (f_n), (g_n) και g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $|f_n|\leq g_n$, $f_n\to f$, $g_n\to g$ (όλα αυτά σχεδόν παντού) και ότι $\int g_n\to\int g$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int f_n\to\int f$.*

Υπόδειξη. Οι υποθέσεις εξασφαλίζουν ότι οι f, g και οι f_n, g_n παίρνουν πεπερασμένες τιμές σχεδόν παντού. Από την $|f_n| \leq g_n$ έχουμε $-g_n \leq f_n \leq g_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$f_n + g_n \geq 0 \quad \text{και} \quad g_n - f_n \geq 0.$$

Αφού $f_n + g_n \to f + g$ και $g_n - f_n \to g - f$, το Λήμμα του Fatou μας δίνει:

$$\int f + \int g = \int (f+g) \leq \liminf_{n\to\infty} \int (f_n + g_n) = \liminf_{n\to\infty} \int f_n + \int g$$

(χρησιμοποιήσαμε την $\int g_n \to \int g$). Άρα,

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Πάλι από το Λήμμα του Fatou,

$$\int g - \int f = \int (g-f) \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g_n - f_n) = \int g - \limsup_{n\to\infty} \int f_n,$$

δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n = \liminf_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Άρα,

$$\int f_n \to \int f.$$

27. *Έστω (f_n), f ολοκληρώσιμες και έστω ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι $\int |f_n - f| \to 0$ αν και μόνο αν $\int |f_n| \to \int |f|$.*

Υπόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έχουμε

$$\left| \int |f_n| - \int |f| \right| \leq \int \big| |f_n| - |f| \big| \leq \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int |f_n| \to \int |f|.$$

($\Longleftarrow$) Έχουμε $\big| |f_n - f| - |f_n| \big| \leq |f|$. Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και $|f_n - f| - |f_n| \to -|f|$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int (|f_n - f| - |f_n|) \to \int (-|f|).$$

Έχουμε υποθέσει ότι
$$\int |f_n| \to \int |f|.$$
Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε
$$\int |f_n - f| \to 0.$$

28. *Έστω (f_n) ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση g τέτοια ώστε $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού για κάθε n. Δείξτε ότι*
$$\int \left(\liminf_n f_n\right) \leq \liminf_n \int f_n \leq \limsup_n \int f_n \leq \int \left(\limsup_n f_n\right).$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $h_n = g - f_n$, η οποία είναι ακολουθία ολοκηρωσίμων συναρτήσεων με $h_n \geq 0$. Από το λήμμα του Fatou παίρνουμε:
$$\int [g + \liminf(-f_n)]\, d\mu = \int \liminf h_n\, d\mu \leq \liminf \int h_n\, d\mu = \liminf \left(\int g\, d\mu - \int f_n\, d\mu\right).$$
Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\liminf(-f_n) - \limsup f_n$ και ότι $\int g\, d\mu < +\infty$ προκύπτει ότι
$$-\int \limsup f_n\, d\mu \leq -\limsup \int f_n\, d\mu,$$
το οποίο αποδεικνύει το δεξιό ζευγάρι ανισοτήτων. Για την άλλη μη τετριμμένη ανισότητα εργαζόμαστε ανάλογα θεωρώντας την ακολουθία συναρτήσεων $u_n = g + f_n$.

29. *Έστω f μετρήσιμη και σχεδόν παντού πεπερασμένη στο $[0,1]$.*

(α) *Αν $\int_E f = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subset [0,1]$ με $\mu(E) = 1/2$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$.*

(β) *Αν $f > 0$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι $\inf\{\int_E f : \mu(E) \geq 1/2\} > 0$.*

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_{[0,1]} f = 0$ (διότι το $[0,1]$ είναι η ένωση δύο συνόλων μέτρου $1/2$. Έστω $A, B \subset [0,1]$ με $\mu(A) = \mu(B) = \frac{1}{4}$. Τότε, $\mu([0,1] \setminus (A \cup B)) \geq 1/2$. Συνεπώς, υπάρχει $C \subseteq [0,1]$ με $\mu(C) = 1/4$ και $C \cap A = C \cap B = \emptyset$ (εξηγήστε γιατί). Γράφουμε
$$\int_A f = \int_{A \cup C} f - \int_C f = -\int_C f = \int_{B \cup C} f - \int_C f = \int_B f,$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\int_{A\cup C} f = 0 = \int_{B\cup C} f$ το οποίο ισχύει από την υπόθεση αφού $\mu(A\cup C) = \mu(B\cup C) = 1/2$. Τώρα, μπορούμε να δείξουμε ότι αν $\mu(A) = 1/4$ τότε $\int_A f = 0$. Πράγματι, υπάρχει $B \subset [0,1]$ με $\mu(B) = 1/4$ και $A\cap B = \emptyset$, συνεπώς,

$$0 = \int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f = 2\int_A f.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι: για κάθε $k \geq 1$, αν $A \subset [0,1]$ και $\mu(A) = \frac{1}{2^k}$ τότε

$$\int_A f = 0.$$

Έπεται τώρα ότι, για κάθε «δυαδικό ρητό» $x = \frac{m}{2^k}$, όπου $k \in \mathbb{N}$ και $0 \leq m \leq 2^k$, ισχύει

$$\int_{[0,m/2^k]} f = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f$. Όπως στην Άσκηση 12, μπορούμε να δείξουμε ότι η F είναι συνεχής. Αφού $F(x) = 0$ για κάθε δυαδικό ρητό $x \in [0,1]$, συμπεραίνουμε ότι $F(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Ειδικότερα, $\int_I f = 0$ για κάθε διάστημα $I \subseteq [0,1]$. Έπεται τώρα ότι $\int_E f = 0$ για κάθε ανοικτό $E \subseteq [0,1]$ (εξηγήστε γιατί). Αφού $\int_{[0,1]} f = 0$, έπεται ότι $\int_F f = 0$ για κάθε κλειστό $F \subseteq [0,1]$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\mu(\{f \neq 0\}) > 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε τότε να υποθέσουμε ότι $\mu(\{f > 0\}) > 0$. Έπεται ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(D) > 0$, όπου $D = \{f \geq 1/k\}$ (εξηγήστε γιατί). Μπορούμε να βρούμε κλειστό $F \subseteq D$ με $\mu(F) > 0$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, καταλήγουμε σε άτοπο, διότι

$$\int_F f \geq \frac{1}{k}\mu(F) > 0.$$

(β) Αφού $f > 0$ σχεδόν παντού υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\mu(\{x : f(x) > \varepsilon\}) > 2/3$. [Πράγματι· αν θεωρήσουμε την ακολουθία συνόλων $E_k = \{x : f(x) > 1/k\}$ τότε $E_k \nearrow [0,1]$, άρα $\mu(E_k) \to 1$.] Αν θέσουμε λοιπόν $F = \{x : |f(x)| > \varepsilon\} > 2/3$ τότε μπορούμε να γράψουμε: αν E μετρήσιμο με $\mu(E) \geq 1/2$ τότε

$$\int_E f\,d\mu \geq \int_{E\cap F} f\,d\mu \geq \varepsilon\mu(E\cap F),$$

διότι η f είναι θετική σχεδόν παντού. Επιπλέον, είναι $\mu(E\cap F) \geq \mu(E) + \mu(F) - 1 > 1/6$. Επομένως, $\int_E f\,d\mu \geq \varepsilon/6$ για κάθε τέτοιο σύνολο E, που αποδεικνύει το ζητούμενο.

30. *Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2} = 0.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε $0 < a < 2$ (εδώ έχουμε $a = 1$ ή $a = 2/3$) και τις συναρτήσεις $f_n(x) = \frac{n^a x}{1+n^2x^2}$. Παρατηρούμε ότι $|f_n| \leq 1$ για κάθε n κι η σταθερή συνάρτηση 1 είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Επίσης, για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $f_n(x) \to 0$. Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται το ζητούμενο.

31. *Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| < +\infty$. Δείξτε ότι:*

(α) *Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in E$.*

(β) *Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

Υπόδειξη. (α) Από το θεώρημα Beppo–Levi έχουμε ότι $\int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| < +\infty$, δηλαδή η συνάρτηση $F = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ είναι ολοκληρώσιμη, άρα πεπερασμένη σχεδόν παντού. Μ' άλλα λόγια η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει (απόλυτα) σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(β) Έστω $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, η οποία ορίζεται σχεδόν για κάθε $x \in E$. Τότε, σχεδόν για κάθε $x \in E$ ισχύει

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = F(x).$$

Η F είναι ολοκληρώσιμη, από υπόθεση, άρα η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε την ακολουθία ολοκληρωσίμων συναρτήσεων $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ και παρατηρούμε ότι σχεδόν για κάθε $x \in E$ ισχύει

$$|s_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \leq F(x).$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \int_E \lim_n s_n = \lim_n \int_E s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n.$$

32. *Σταθεροποιούμε $0 < a < b$ και ορίζουμε $f_n(x) = ae^{-nax} - ne^{-nbx}$. Δείξτε ότι*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| = \infty$$

και

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $\delta_n := \frac{\log(n/a)}{n(b-a)}$. Τότε, για κάθε $n > a$ ισχύει $\delta_n > 0$ και $f_n(x) < 0$ για $0 < x < \delta_n$. Επομένως,

$$\int_0^\infty |f_n|\, d\mu \geq \int_0^{\delta_n} [ne^{-nbx} - ae^{-nax}]\, dx = \frac{1}{b} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{\frac{b}{b-a}}}\left(1 - \frac{a}{b}\right) a^{\frac{a}{b-a}},$$

απ' όπου έπεται ότι $\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty |f_n|\, d\mu = +\infty$.
Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^\infty f_n(x) = a\frac{e^{-ax}}{1-e^{-ax}} - \frac{e^{-bx}}{(1-e^{-bx})^2}.$$

Έπεται ότι $\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty f_n = +\infty$. Τέλος, είναι

$$\int_0^\infty f_n\, d\mu = \frac{1}{n} - \frac{1}{b},$$

συνεπώς έχουμε $\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty f_n = -\infty$.

33. (α) *Αν $f \geq 0$ σχεδόν παντού στο E και αν $f_n = \min\{f, n\}$, τότε $\int_E f_n \to \int_E f$.*
(β) *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο E και $f_n = \max\{\min\{n, f\}, -n\}$, τότε $\int_E f_n \to \int_E f$.*

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ και $f_n \to f$ κατά σημείο, σχεδόν παντού στο E. Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης.

(β) Παρατηρούμε ότι $|f_n| \leq |f|$ και ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, σχεδόν παντού στο E. Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

34. *Έστω $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$ και $E_1, \ldots, E_n$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Δείξτε ότι υπάρχει $i \leq n$ ώστε $\mu(E_i) \geq k/n$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $f = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}$. Αφού κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, \ldots, E_n$, έχουμε

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(x) \geq k$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^n \mu(E_i) = \sum_{i=1}^n \int_{[0,1]} \chi_{E_i}(x)\, d\mu(x) = \int_{[0,1]} f\, d\mu \geq k.$$

Έπεται ότι

$$\max_{1\leq i\leq n} \mu(E_i) \geq \frac{k}{n}.$$

Δηλαδή, υπάρχει $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ με την ιδιότητα $\mu(E_{i_0}) \geq \frac{k}{n}$.