Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (2011–12)
2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις του Φυλλαδίου 2 ως την Τετάρτη 21 Δεκεμβρίου 2011.

1. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, Riemann ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Δείξτε ότι:

(α) Αν $f(x+\pi) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε περιττό ακέραιο k.

(β) Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\hat{f}(k)} = \hat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} e^{ikx} \right|^2 dx.$$

3. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ στο $(0, \pi)$, $f(x) = -\frac{\pi + x}{2}$ στο $(-\pi, 0)$ και $f(0) = 0$, και την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S[f](x) = \frac{1}{2i} \sum_{k \neq 0} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Dirichlet, δείξτε ότι η $S[f](x)$ συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ποιά είναι η τιμή της $S[f](0)$;

4. (α) Θεωρώντας την περιττή επέκταση της $\cos x$ από το $(0, \pi)$ στο $(-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ δείξτε ότι

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin(2kx)}{4k^2 - 1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) Θεωρώντας την άρτια επέκταση της $\sin x$ από το $(0, \pi)$ στο $(-\pi, \pi)$ δείξτε ότι

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \|f - s_n(f)\|_\infty = 0.$$

Υπόδειξη. Αφού η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, γνωρίζουμε ότι $f \equiv S[f]$. Συνεπώς,

$$f(x) - s_n(f)(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς,

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|).$$

Χρησιμοποιήστε, αν θέλετε, την σχέση των συντελεστών Fourier της f με τους συντελεστές Fourier της f'.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Αν

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 0,$$

δείξτε ότι $s_n(f) \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε την $g_n := s_n(f) - \sigma_{n+1}(f)$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση, δείξτε ότι $g_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

7. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$Q_n(t) = \alpha_n \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^n,$$

όπου η θετική σταθερά α_n επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\, dt = 1.$$

Δείξτε ότι: αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε

$$f * Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f.$$

Παρατηρήστε ότι αυτό δίνει άλλη μια απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

8. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) f(t)\, dt$$

είναι συνεχής.

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

10. Έστω $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ σειρά πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $s_n = c_1 + \cdots + c_n$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ συγκλίνει στον s, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον s.

Υπόδειξη. Μπορείτε να υποθέσετε ότι $s = 0$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε πρώτα ότι, για κάθε $r \in (0,1)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r) \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.$$

(β) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον s, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον s.

Υπόδειξη. Μπορείτε να υποθέσετε ότι $s = 0$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε πρώτα ότι, για κάθε $r \in (0,1)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k \sigma_k r^k.$$